

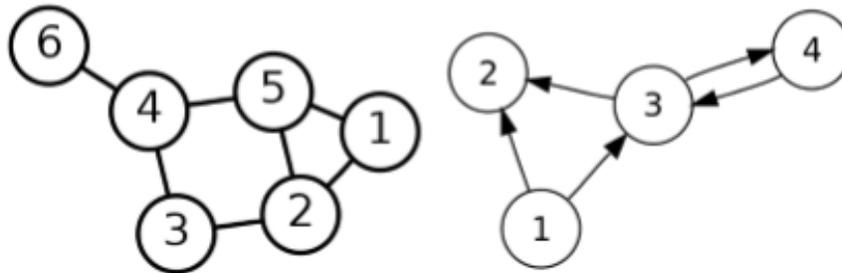
Introduction

En science, une grande importance est donnée à la rigueur employée pour décrire ou encore définir ce que l'on étudie. Les mathématiques ne font pas exception à la règle : être clair et précis sur ce que l'on étudie est primordiale. Certains objets sont plus abstraits que d'autres, et il en est de très simple dont l'utilité pour résoudre des problèmes (ou même simplement pour mieux les comprendre) est grande. Attention cependant, simplicité rime rarement avec facilité en mathématiques ...

Dans ce problème nous allons introduire la notion de graphe qui vient de la théorie éponyme. Vous avez sans doute déjà eu à faire à des graphes dans votre vie : la carte des métros de Paris, facebook (plus généralement internet), votre arbre généalogique etc... Nous verrons comment des objets simple peuvent aider à résoudre des problèmes difficiles en apparences.

Notions de Théorie des graphes

Voici des graphes :



Un graphe \mathbb{G} en mathématique est la donnée de deux ensembles : V qui contient les noeuds et E l'ensemble des arêtes. Pour reprendre l'exemple du métro parisien, les noeuds sont les stations de métro et les arêtes sont les traits entre les stations qui communiquent entre elles (elles représentent la possibilité d'aller d'une station à une autre). Sur les exemples ci-dessus on remarque que les arêtes peuvent être de simple trait ou bien des flèches. En effet, si un graphe représente votre réseau d'amis sur facebook, alors il y aura des traits entre vous et vos amis car la relation que représente le graphe est symétrique (ou réciproque) : il est clair que si vous avez un ami, il est aussi votre ami. Alors que si on regarde votre arbre généalogique, et que dans ce cas une arête représente la filiation, il y aura par exemple une flèche de vos parents vers vous : car ils sont vos parents mais pas le contraire. La relation que décrit le graphe est alors non symétrique (ou non réciproque).

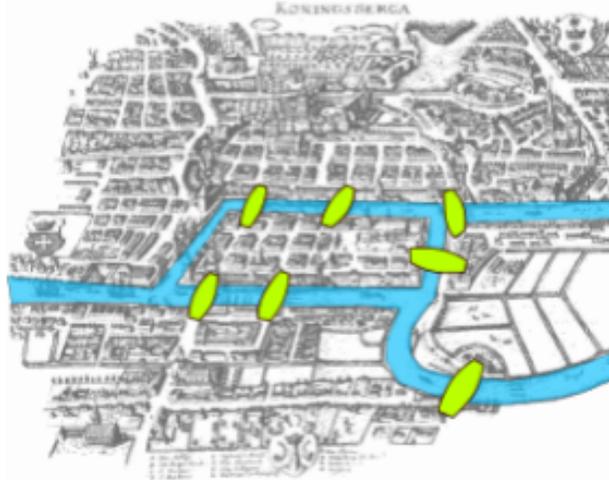
Exercice 0

Tracez les graphes suivants pour vous familiariser avec les notions décrites ci-dessus :

- ★ Tracez votre arbre généalogique en remontant jusqu'à vos grands-parents à l'aide d'un graphe. Une flèche ira d'un noeud à un autre si le premier noeud est le parent direct (c'est à dire le père ou la mère) du second noeud.
- ★ Tracez le graphe qui représente qui est ami facebook avec qui dans votre groupe de travail. Pensez à ce qui a été dit plus haut pour le tracer.

1 Le problème des 7 ponts de Königsberg

1.1 Introduction

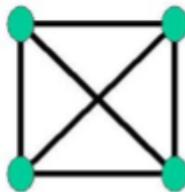


« La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel (c'est le nom du fleuve qui traverse Königsberg) et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts. »

Notre but ici est de résoudre ce problème, pour cela nous allons étudier le problème sur un exemple que vous avez sûrement déjà rencontré ;)

1.2 Questions

1. Traduire le problème des 7 ponts de Königsberg à l'aide d'un graphe non orienté (c'est à dire dont les arêtes ne sont pas des flèches), sans que 2 arêtes ne se croisent, et en précisant ce que représentent les noeuds et les arêtes dans ce cadre (remarque : pensez au réseau de métro pour donner la bonne signification aux arêtes).
2. Détournons nous un instant du problème des 7 ponts de Königsberg. Regardons ce graphe non orienté :

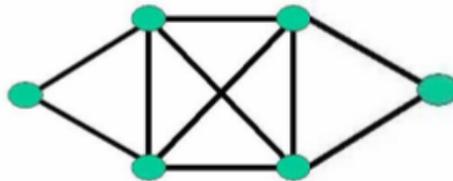


Est-il possible de le tracer sans lever le crayon et en ne passant qu'une et une seule fois par chaque arête ?

3. Même question pour ce graphe :



4. Qu'y a-t-il de différent entre les deux graphes que l'on vient de considérer qui rend la réponse différente ?
5. Conjecturez une condition suffisante permettant de tracer un graphe comme ceux décrit ci-dessus (qui ne se sépare pas en 2 graphes disjoints) en passant une et une seule fois par chaque arête.
6. Que dire du graphe suivant par rapport aux deux précédents ?



7. Conjecturez une condition nécessaire et suffisante permettant de tracer un graphe comme ceux décrit ci-dessus (qui ne se sépare pas en 2 graphes disjoints), ceci en passant une et une seule fois par chaque arête et en revenant au point de départ du tracé.
8. En considérant les résultats des questions précédentes, que pouvez-vous dire du problème des 7 ponts de Königsberg ?

2 Qui as tué le Duc de Densmore ?

2.1 Introduction

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans. À l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-épouses. Or, avant de mourir, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

Holmes : Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !

Watson : Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des femmes : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.

Holmes : Hum ! Leur avez-vous demandé à quelle période elles ont eu leur séjour respectif ?

Watson : Hélas ! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré :

Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia.

Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia et Helen.

Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.

Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.

Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.

Georgia a rencontré Ann et Helen.

Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.

Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes ! C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqué A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis, en moins de trente secondes, Holmes déclara :

- Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine d'une façon unique l'assassin.

2.2 Questions

1. Quels sont les sommets du graphe que Sherlock Holmes a tracé ? Que représentent-ils ? Que représentent les arêtes entre les sommets (c'est très important pour la suite) ?
2. Tracer le graphe que Sherlock Holmes a tracé. Attention vous devez trouver une représentation telle que les arêtes ne se croisent pas (aucune, c'est important) !
3. Qui est l'assassin ?
4. (Bonus) Combien de fois (au moins) l'assassin est-il en réalité venu au château ?