

Sujet Collège – Mosaïques de Voronoï et applications

Les mosaïques apparentes sur le pelage de la girafe réticulée ou encore sur la carapace de la tortue répondent à des propriétés géométriques bien précises.



La girafe. A quoi lui servent les taches de son pelage ?



La tortue. A quoi sert la carapace de la tortue ?

Introduction des mosaïques de Voronoï. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si A_1, A_2, \dots, A_n désignent n points deux à deux distincts du plan P , on appelle mosaïque de Voronoï de ces points la réunion des n **cellules** du plan P définies par :

$$C_i = \{M \in P / d(M, A_i) < d(M, A_j) \forall j \neq i\}$$

pour i variant de 1 à n .

Les points A_1, A_2, \dots, A_n sont alors les germes des cellules respectives C_1, C_2, \dots, C_n .

- 1/ On se donne deux points distincts A_1 et A_2 du plan. Déterminez la mosaïque de Voronoï de ces deux points.
- 2/ Etudiez le problème pour les trois points deux à deux distincts A_1, A_2 et A_3 du plan.
- 3/ Etudiez le problème pour les quatre points deux à deux distincts A_1, A_2, A_3 et A_4 du plan.
- 4/ Observez des mosaïques de Voronoï construites pour un plus grand nombre de points.
- 5/ Que peut-on dire sur les mosaïques de Voronoï ? et sur ses cellules ?
- 6/ On appelle nœud d'une mosaïque tout sommet d'une cellule de cette mosaïque. Le degré d'un nœud est le nombre de côtés ayant pour extrémité ce nœud. A quelle condition les nœuds de la mosaïque sont-ils de degré 2 ? de degré 4 ou plus ?
- 7/ Faites des recherches sur internet : qui est Georgi Feodossevitch Voronoï ?

Graphes associés aux mosaïques de Voronoï.

Désormais, on ne considère que les mosaïques de Voronoï dont les nœuds sont forcément de degré trois.

A chaque mosaïque de Voronoï, on associe le graphe de Delaunay en procédant ainsi :

Mosaïque	Graphe
<p>Repérez les cellules voisines (c'est-à-dire qui ont des côtés communs).</p>	<p>Liez par un segment les germes qui ont des cellules voisines. Ces traits sont appelés les arêtes du graphe.</p>

Cette technique est appelée triangularisation de Delaunay.

8/ Donnez des exemples de graphes associés à des mosaïques de Voronoï.

9/ Que pouvez-vous dire sur les graphes de Delaunay ?

10/ On considère un triangle $A_i A_j A_k$ extrait du graphe de Delaunay, i, j et k étant des entiers compris entre 1 et n . On note ensuite $D_{i,j,k}$ le disque circonscrit au triangle $A_i A_j A_k$. Que peut-on dire sur le nombre de germes appartenant au disque $D_{i,j,k}$? Illustrez en donnant des exemples de graphes qui ne correspondent pas à une triangularisation de Delaunay.

11/ Certaines cellules de la mosaïque de Voronoï sont finies et d'autres infinies. A quelle condition les cellules sont-elles infinies ?

12/ Faites des recherches sur internet : qui est Boris Nikolaievitch Delaunay ?

Applications. Montrez comment les mosaïques de Voronoï et les graphes de Delaunay peuvent répondre aux problèmes suivants :

- *Problème du plus proche voisin* : le pays de Math en Jeans possède un réseau de téléphonie mobile qui compte n antennes-relais. On suppose qu'il n'y a pas de zone blanche (sans réseau). Tout en se promenant, Arthur téléphone depuis son portable. Quelles antennes-relais capteront sa communication ?
- *Autre problème de voisin le plus proche* : le Pays de Math en Jeans possède n casernes de pompiers. En cas d'urgence, Francine voudrait connaître la caserne implantée à plus courte distance de son domicile. Comment peut-elle procéder ?
- *Problème du plus grand cercle vide* : Mac Donalds veut ouvrir un autre restaurant. Pour cela, la chaîne de restaurants cherche le meilleur endroit possible, c'est-à-dire le plus loin possible des restaurants déjà existants. Comment peut-elle procéder ?