

MATH.en.JEANS 2020-2021

Lycée Montchapet

SUJET. Fractions proches (suites de Farey)

Considérons les fractions propres irréductibles dont le dénominateur est inférieur ou égal à 7. Écrivons cette liste de fractions en ordre croissant:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}. \quad (1)$$

Exercice. Vérifiez que l'ordre de cette suite de fractions est, en effet, croissant. Par exemple,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \cdot 7} > 0, \quad \frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{1}{5 \cdot 7} > 0 \quad \text{etc.}$$

Prenez note des régularités et des symétries observées

Propriété A. Si deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ de la suite (1) sont adjacents et $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, alors $bc - ad = 1$.

Exercice. Vérifiez la propriété A.

Propriété B. Chaque fraction de la suite (1) est obtenue de ses fractions adjacents de la manière suivante. On additionne les numérateurs et le résultat est divisé par la somme des dénominateurs. Par exemple, $\frac{2}{5} = \frac{1+3}{3+7}$.

Exercice. Vérifiez la propriété B.

La suite (1) est noté F_7 et s'appelle 7ème suite de Farey. On construira la table avec les suites précédentes (F_1, F_2, \dots, F_6) et les suites suivantes (F_8, F_9, \dots). Il faudra vérifier les propriétés A et B pour les différents suites F_i .