

Titre de l'article : Sardines, requins, pêcheurs...

Un problème mathématique ?

Participants :

Amélie SOLBÈS

Caroline GAUCHÉ, élèves de 2nde

Sabrina RODRIGUÈS, professeure de mathématiques

Guillemette CHAPUISAT, chercheuse à l'Université d'Aix-Marseille

Présentation: Les pêcheurs de la mer Adriatique partent au front pendant la première guerre mondiale. Donc, la pêche des sardines a été interrompue pendant 4 ans et les requins, victimes de la pêche involontaire, ont cessés de mourir. Lorsque les pêcheurs reviennent, ils constatent avec étonnement qu'ils ramènent moins de sardines et plus de requins qu'avant dans leurs filets. On se demande comment cela est possible.

Résumé et résultats: Pour résoudre ce problème ont étudié l'évolution des populations des requins et des sardines avec et sans la pêche. On part de l'hypothèse suivante: Les sardines et les requins, n'étant plus pêchés, leurs populations ont fortement augmentées. Les requins ne meurent plus de faim et mangent un nombre plus considérable de sardines.

Le modèle suivant vérifie l'hypothèse émise, pour la population de requins :

$R_{(n+1)} = (1 - c + d * S_n - pr) * R_n$, R_n étant la population de requins à l'année 0

Et pour la population de sardines :

$S_{(n+1)} = (1 + a - b * R_n - ps) * S_n$, S_n étant la population de sardines à l'année 0

Pour arriver à ce résultat, nous avons fait la démarche décrite ci-dessous :

Article : Quand on se trouve devant un problème de sardines et de requins, le premier réflexe est instantanément de faire de nombreuses recherches biologiques sur ces deux espèces.

Malheureusement il n'est pas possible de trouver le nombre exact de sardines ou de requins dans une mer, même sur Internet. Les seules informations intéressantes que nous avons trouvées sont les suivantes :

1- Un requin mange 10 à 12 fois son poids par an

2- Les sardines pondent 50 000 à 60 000 œufs

3- Les sardines pèsent environ 100 g

4- Les requins pèsent environ 500 kg

5- Les requins font 1 à 2 mètres.

6- Les sardines se nourrissent de plancton

Un premier modèle a été réalisé. Le but était de modéliser l'évolution des deux populations de la manière la plus simple possible. Ce modèle prend les facteurs suivants en compte :

Pour les requins:

→ m de requins qui meurent par an

→ n de requins qui naissent par an

→ g de requins présents de l'année dernière

→ p de requins morts pendant la pêche

Et pour les sardines:

→ N de sardines qui naissent par an

→ M de sardines qui meurent par an

→ G de sardines présentes de l'année dernière

→ Ma de sardines mangées par des requins par an

→ Pe de sardines pêchées par des hommes

On obtient donc un modèle très simplifié :

Population requins année 0 = g

Population requins année 1, $R = g - m + n - p$

Population sardines année 0 = G

Population sardines année 1, $S = G - M + N - Ma - Pe$

Nous avons très vite compris que avoir des valeurs exactes serait impossible. Il a donc fallu

travailler avec des valeurs fictives mais proches de la réalité.

Dans le prochain modèle, on a changé certaines valeurs d'une quantité à un taux et le nombre de sardines mangées par des requins par an a été remplacé par un nombre de sardines mangées par un requin par an :

Pour les requins:

- m taux de requins qui meurent par an
- n taux de requins qui naissent par an
- g de requins présent de l'année dernière
- p taux de requins mort pendant la pêche

Et pour les sardines:

- N taux de sardines qui naissent par an
- M taux de sardines qui meurent par an
- G de sardines présentes de l'année dernière
- Ma de sardines mangées par un requin par an
- Pe taux de sardines pêchés par des hommes

On obtient donc le modèle suivant :

Population requins année 0 = g

Population requins année 1, $R = (1 - m + n - p) * R$

Population sardines année 0 = G

Population sardines année 1, $S = (1 - M + N - Pe) * S - Ma * R$

Comme un requin mange 10 fois son poids par an

$Ma = 500\text{kg} * 10 = 5000$ une sardine pèse près de 100 g

soit 10 sardines = 1 kg

alors $10 * 5000 = 50000 = Ma$

Pour modéliser le fait que moins il y a de sardines, moins il y a de requins, nous avons ajouté un facteurs dans la population des requins. Nous avons également ajouté la population du plancton, pour modéliser la mort par la faim des sardines :

Pour le plancton :

- m' taux de plancton qui meurent par an
- n' taux de plancton qui naissent par an
- g' de plancton présent de l'année dernière
- ma' taux de plancton mangés par une sardine par an

Pour les requins:

- m taux de requins qui meurent par an
- m2 taux de requins morts par la faim

Pour obtenir ce nombre, on soustrait au nombre de requins présents de l'année précédente le nombre de requins qui on pu se nourrir, pour obtenir ceux qui meurent de faim :

$g - \text{Ent}(G/Ma)$

- n taux de requins qui naissent par an
- g de requins présent de l'année dernière
- p taux de requins mort pendant la pêche

Et pour les sardines:

- N taux de sardines qui naissent par an
- M taux de sardines qui meurent par an
- M2 nombre de sardines qui meurent de faim par an

Pour obtenir ce nombre, on soustrait au nombre de sardines présentes de l'année précédente le nombre de sardines qui on pu se nourrir, pour obtenir celle qui meurent de faim :

$G - \text{Ent}(g'/ma')$

- G de sardines présentes de l'année dernière
- Ma de sardines mangées par un requin par an
- Pe taux de sardines pêchés par des hommes

On obtient donc le modèle suivant :

Population requins année 0 = g

Population requins année 1, $R = (1 - m + n - p) * R - g - Ent(G/Ma)$

Population sardines année 0 = G

Population sardines année 1, $S = (1 - M + N - Pe) * S - Ma * R - G - Ent(g'/ma')$

Ce modèle a été testé ensuite sur un tableur, pour empêcher le tableur d'afficher des populations négatives, on a mis la condition suivante : $Si(Population < 0 ; 0 ; Population)$

M	taux de mortalité	0.25	n	Population plancton année n	Population de requins année n	Population de sardines année n
n	taux de natalité	1	0	1,00E+015	2000	1,00E+007
g	pop année 0	1,00E+015	1	1,75E+015	200	2396730000
ma	consommation/sardine	400000	2	2,10E+015	47754	5480653290
m	taux de mortalité	0,4	3	1,48E+015	114188,4	5438669006,17
m2	taux de mortalité-faim	1800	4	409549594532000	119991,84	547952149,92
n	taux de natalité	0,5	5	497530930463636	22758,18	0
p	taux de mortalité pêche	200	6	870679128311364	2075,82	97918126
g	pop année 0	2000	7	1,48E+015	1965,58	2111222173,6
			8	1,75E+015	42220,56	4603632056,11
m	taux de mortalité	0,4	9	1,23E+015	96094,06	4442048235,34
M2	taux de mortalité-faim	0	10	370497039579263	98249,41	355980786,4
N	taux de natalité	0,87	11	505977504705247	16743,94	0
G	pop année 0	1,00E+007	12	885460633234182	1474,39	419746733,09
Pe	taux de mortalité pêche	8000000	13	1,38E+015	8341,44	2330472084,96
Ma	consommation/requin	50000	14	1,49E+015	47243,14	4131384862,91
		36479	15	947441428567503	87151,31	3298266948,13
			16	338715720742200	74480,13	0
			17	592752511298851	7248,01	0
			18	1,04E+015	524,8	1111480620,8
			19	1,37E+015	22081,48	3084782503,92
			20	1,16E+015	63703,15	3773808910,78

Comme ce modèle s'avérait être trop radical, il a fallu le modifier encore une fois.

Une biologiste nous a expliqué que les sardines ne mourraient pas de faim, le plancton étant presque inépuisable, nous l'avons donc enlevé de notre modèle :

→ S_n population de sardines à l'année n

→ R_n population de requins à l'année n

→ repr/s taux de reproduction des requins ou des sardines (taux de mort + taux de naissance)

→ Mar = nombre de sardines mangées par requin par an

→ pr et ps taux de pêche de requins ou de sardines

On obtient :

$R_{n+1} = R_n + repr * R_n - (R_n - E(S_n / Mar)) - pr * R_n$

$S_{n+1} = S_n + reprs * S_n - Mar * R_n * S_n - ps * S_n$

Pour éviter l'effet exagéré de la mort par la faim, on a décidé de faire une fonction pour la reproduction qui varierait par rapport au nombre de sardines ou de requins. Cela permettrait de modéliser que plus il y a de requins, moins les sardines se reproduisent et plus il y a des sardines, plus les requins se reproduisent.

Nous avons trouvés une fonction affine qui vérifie cela :

La reproduction des sardines en fonction de requins est une fonction appelée $reprs(x)$, avec $x = R_n$, elle vérifie $reprs(0) > 0$ et $reprs(R_n) < 0$ pour $R_n > N$, N étant nombre de requins trop élevé. La fonction la plus simple vérifiant ces conditions est $reprs(R_n) = a - b * R_n$.

Pour la reproduction des requins en fonction des sardines, on prend une fonction appelée $repr(x)$, avec $x = S_n$, qui vérifie $repr(0) < 0$ et $repr(S_n) > 0$ si S_n est un nombre très grand. La fonction la plus simple qui vérifie cela est $repr(S_n) = -c + d * S_n$. Les représentations graphiques de ces deux fonctions sont les suivantes :

Il y a à droite la représentation graphique de repr et à gauche celle de reprs.

Cela nous donne le modèle définitif :

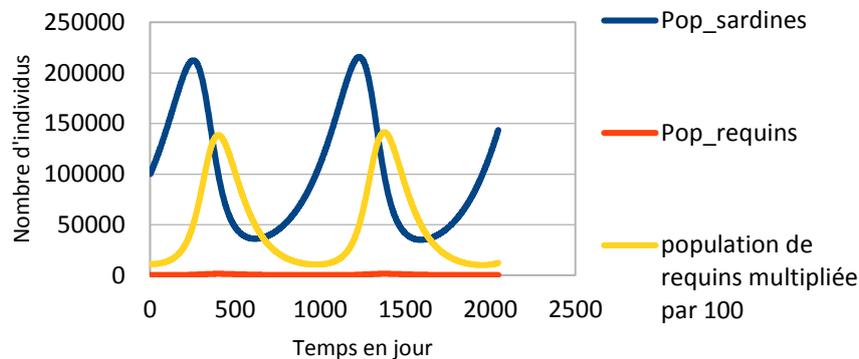
$S(n+1) = (1 + a - b * R_n - ps) * S_n$

$R(n+1) = (1 - c + d * S_n - pr) * R_n$

Ce modèle a ensuite été mis sur un tableur, sans prendre en compte la pêche pour voir comment évoluait ces populations sans l'intervention des pêcheurs :

On peut observer leurs évolutions sur un graphique, mais pour mieux voir la population des requins, trop petite par rapport à celle des sardines, on la multiplie par 100 :

Evolution des populations



Nous avons ensuite ajouté la pêche et fait un tableau montrant le nombre moyen de sardines et de requins pour un jour, par rapport au taux de pêche :

Mr	Ms	Pr	Ps
100000	500	0	0
100674	481	0,00000005	1,00E-007
100676	481	0,0000005	0,000001
100700	480	0,000005	0,00001
100947	473	0,00005	0,0001
104915	403	0,0005	0,001
8970	6	0,005	0,01
510	1	0,05	0,1

Ce tableau montre que dans des intervalles de $[1,00E-007; 1,00E-003]$ en taux de pêche pour les sardines et $[5,00E-008 ; 5,00E-004]$ pour les requins, la pêche est bénéfique pour la population moyenne de sardines.

Conclusion : On peut conclure que l'étrange observation des pêcheurs après la première guerre mondiale n'est pas le fruit du hasard, mais qu'il y a une réponse mathématique qui explique cela. En effet, la relation proie et prédateur entre les requins et les sardines nous montre que, jusqu'à un certain taux, la pêche est bénéfique pour les sardines et néfaste pour les requins. Ainsi on peut expliquer pourquoi on retrouve moins de sardines et plus de requins qu'avant, après une longue période sans pêche.

Mais ce modèle nous prouve aussi à quel point les quotas de pêche sont importants pour les espèces pêchées, car toutes les populations s'effondrent, si la pêche est trop importante.