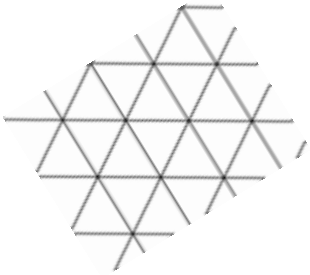
Sujet de recherche MATh.en.JEANS 2014
Lycée français de Varsovie
DISTANCE DE PUCE



On appelle l'espace X le plan formé d'un pavage de triangles équilatéraux identiques.

Des puces vivent dans les triangles équilatéraux de ce plan.

Elles peuvent sauter du triangle où elles vivent dans un nouveau triangle de deux façons différentes :

- par-dessus un côté
- ou bien par-dessus deux côtés consécutifs.

On considère deux triangles x et y de l'espace X.
La « distance de puce » entre x et y, notée $d_p(x;y)$, est le nombre minimal de sauts d'une puce permettant de se déplacer de x à y.

En particulier, on a $d_p(x;x)= 0$.

Questions :

a) Prouver que X avec la distance de puce d_p forme un espace métrique.
Pour cela, on vérifiera trois conditions.

b) Proposer un repère dans X puis déterminer $d_p(x;y)$ à partir de ce repère.
On pourra éventuellement se limiter à certaines configurations de x et de y.

c) Quels sont les cercles dans cet espace métrique ?

d) Déterminer le nombre d'éléments d'un cercle de rayon r entier naturel dans cet espace métrique.