Décorations de Noël

Cathy, Nadine et Philippe préparent les décorations de Noël. Cette année, ils décident de préparer des arbres en papier décorés par des numéros.

Les arbres de nos compagnons sont particuliers. Ils reproduisent une espèce rare d'arbre, que seuls les mathématiciens font pousser dans leurs jardins. Déjà, ils poussent de haut en bas. Ensuite, lorsque l'arbre naît, il possède une unique branche, avec, à son bout, un noeud. Cette toute première branche est appelée la racine de l'arbre.

Lorsqu'une branche d'un arbre pousse, le noeud situé au bout de la branche peut produire :

— une branche gauche et une branche droite, toutes deux terminées, par un noeud ;

— une seule branche gauche qui se termine par un noeud (et donc pas de branche à droite) ;

— une seule branche droite qui se termine par un noeud (et donc pas de branche à gauche).

La figure 1 montre un exemple d'arbre qui pousse.

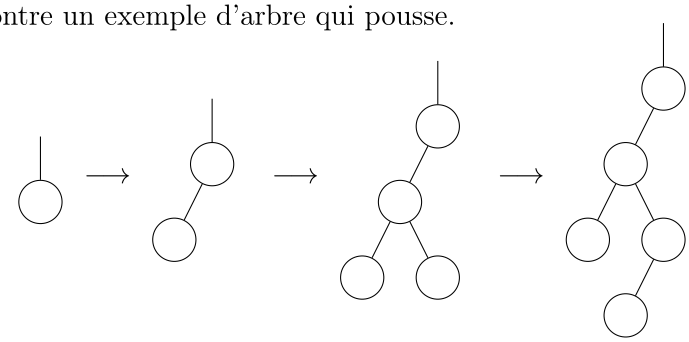

Figure 1 – Un arbre qui pousse.

Cathy, Nadine et Philippe souhaitent produire, en papier, pleins d'arbres en décorant les noeuds avec des entiers.

La façon de décorer fait débat.

Pour Cathy, il faut que les numéros soient tous différents, commencent à 1, et croissent au fur et à mesure que l'arbre grandit. La Figure 2 montre plusieurs exemples d'arbres décorés à la mode de Cathy.

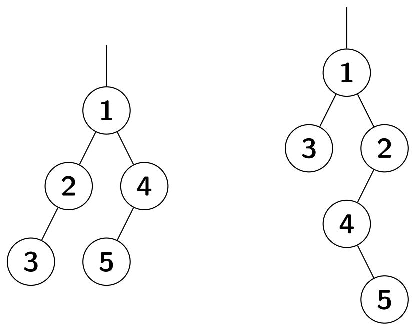

Figure 2 – Arbres décorés à la mode de Cathy.

Combien d'arbres à N noeuds, ainsi décorés, est-il possible de construire ?

Philippe souhaite proposer sa propre décoration. Il souhaite décorer chaque noeud à l'aide d'un couple de nombres, avec la règle suivante, le long d'une branche droite, seul le nombre de droite augmente strictement, le long d'une branche gauche, seul le nombre de gauche augmente strictement.

S'il y a N (resp. M) branches gauche (resp. droites), tous les nombres de 1 à $N+1$ (resp. $M+1$) doivent être présents dans les nombres gauches (resp. droits) des couples.

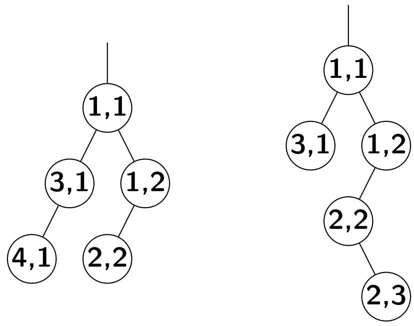

FIGURE 3 – Arbres décorés à la mode de Philippe.

La figure 3 montre deux exemples d'arbres décorés à la mode de Philippe.

Pour un arbre donné, combien de décorations est-il possible de faire ? Combien d'arbres à N noeuds est-il possible de faire ?

C'est au tour de Nadine de proposer sa propre décoration. Dans sa décoration, il faut que tous les numéros soient différents, commencent à 1, et que, pour un noeud donné, son numéro soit

— plus grand que tous les numéros accessibles à partir de la branche gauche,
— strictement plus petit que tous les numéros accessibles à partir de la branche droite.

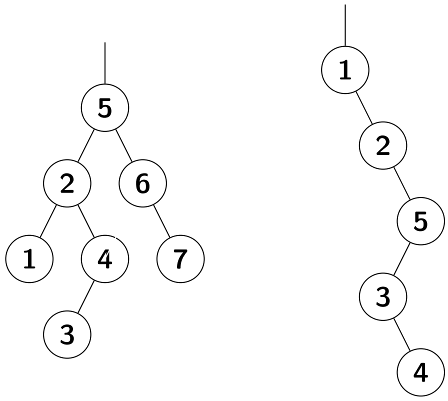

FIGURE 4 – Arbres décorés à la mode de Nadine.

La Figure 4 montre plusieurs exemples d'arbres décorés à la mode de Nadine.

Combien d'arbres à N noeuds est-il possible de faire ?

Après discussion, il est décidé de produire des arbres décorés selon la méthode de Nadine.

Pour cela, Cathy propose une méthode pour en construire. Elle part d'un mot dont les lettres sont les nombres de 1 à N où chaque nombre apparaît une et une seule fois, puis elle fait pousser l'arbre, noeud après noeud en insérant les nombres du mot successivement dans l'arbre en respectant la règle de Nadine.

Par exemple, le mot 21453 donne l'arbre de la figure 5 suivant :

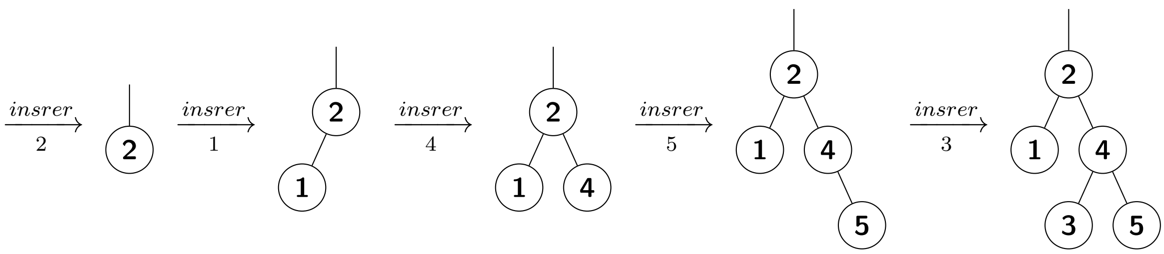

FIGURE 5 – L'arbre du mot 21453.

Est-ce que la méthode de Cathy permet d'obtenir tous les arbres décorés à la mode de Nadine ? Pour un arbre donné, combien de mots permettent de construire cet arbre ?