5 Décomposons

En arithmétique, nous disons que 4 divise 20 car si nous faisons 20 divisé par 4, nous obtenons 5 qui est un entier naturel. Par contre, 4 ne divise pas 22 car $22/4 = 5,5$ qui n'est pas entier. De manière générale, nous disons que l'entier m divise l'entier n s'il existe un entier k tel que $m \times k = n$. L'étude des diviseurs d'un nombre est un point important pour plein de problèmes.

Dans ce sujet, étant donné un entier naturel n nous allons nous intéresser à l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des chiffres (donc des nombres compris entre 0 et 9) qui divisent le nombre n. Par exemple, nous avons $\mathcal{C}_{114} = \{1, 2, 3, 6\}$; remarquons que 57 divise 114 mais comme ce n'est pas un chiffre, il n'apparaît pas dans la liste. Nous pouvons nous interroger sur le comportement de ces ensembles, par exemple : est-ce qu'il existe un entier naturel n qui admet tous les chiffres comme diviseurs ? Est-ce qu'il existe des chiffres qui se retrouvent dans tous les $\mathcal{C}_n$ quelque soit la valeur de n ? Quel est le plus petit entier naturel positif n dont l'ensemble $\mathcal{C}_n$ est exactement $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? Peut-on prévoir facilement pour certains chiffres s'ils se retrouveront ou pas dans l'ensemble $\mathcal{C}_n$?

Dans un second temps, on pourra s'intéresser à l'ensemble $\mathcal{U}_n$ des chiffres unités des diviseurs de n. Par exemple, nous avons $\mathcal{U}_{114} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$ car en plus des chiffres déjà présentés précédemment, nous avons 19, 38 et 57 qui divisent 114. Existe-t-il un lien entre $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{U}_n$? Par exemple, est-ce que l'un est toujours inclus dans l'autre ? Quelle est la condition pour que 0 appartienne à $\mathcal{U}_n$? En bref, on peut se demander ce qui change entre $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{U}_n$