

Sujet 2 : Chaînes d'entiers

Emile a un certain nombre p de perles numérotées de 1 à p ; il veut les utiliser pour confectionner un collier pour la fête des mères. Mais pas question de ranger les perles, c'est-à-dire les numéros, par ordre croissant ou décroissant sur le collier, il faut plus d'originalité. Emile a décidé que la somme des numéros de deux perles contiguës doit toujours être un carré parfait.

Il s'agit donc de former une chaîne ouverte (avec deux extrémités) de p entiers où chaque entier compris entre 1 et p apparaît exactement une fois, et telle que la somme de deux entiers voisins soit toujours un carré parfait. On se convainc assez vite que ce n'est pas possible pour n'importe quel choix de p .

1. Pourquoi n'est-ce pas possible si par exemple $p=11$?
2. Est-ce possible pour certaines valeurs de p ? Si oui quelle est la plus petite valeur de p pour laquelle c'est possible ?
3. Et si Emile veut confectionner un collier fermé, quelle est la plus petite valeur de p pour laquelle c'est possible ? On doit alors former une chaîne fermée, où chaque entier a deux voisins.

On peut ensuite généraliser le problème à d'autres conditions sur les sommes d'entiers voisins. De manière générale, on a un sous-ensemble A de \mathbb{N} (par exemple l'ensemble des carrés parfaits, l'ensemble des nombres premiers...) et on veut former une chaîne (ouverte ou fermée) où apparaît une fois chaque entier compris entre 1 et p , de telle sorte que la somme de deux entiers voisins soit toujours dans A .