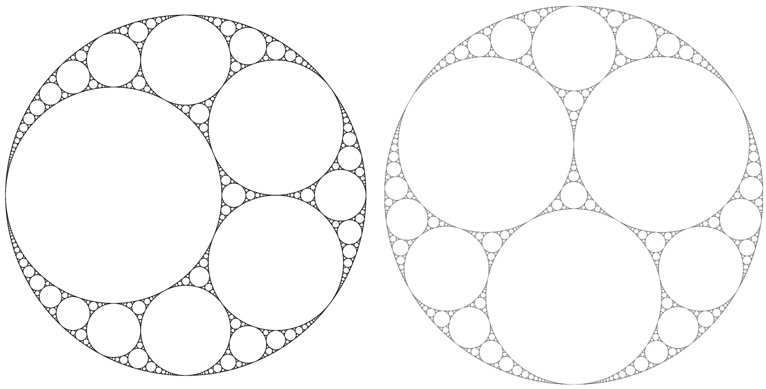
Les cercles d'Apollonius



Le mathématicien grec Apollonius de Pergé (né vers -262, et mort vers -190 av J.-C.) nous a laissé un beau théorème qui a inspiré de nombreux passionnés d'imagerie mathématique :

> *Étant donnés trois cercles mutuellement tangents, ou bien il existe deux cercles qui leur sont tangents, ou bien il existe un cercle et une droite qui leur sont tangents.*

Question : Pouvez-vous représenter ces deux cas ?

Illustration du théorème d'Apollonius.

Le grand cercle de la figure de droite contient trois cercles de mêmes rayons mutuellement tangents, nous les appelons C_1, C_2 et C_3. Ces trois cercles sont tangents au grand cercle, mais aussi à un cercle plus petit contenu dans une région délimitée par des arcs de C_1, C_2 et C_3.

Plus généralement, trois cercles mutuellement tangents partagent le plan en 5 régions : 3 disques, 1 région finie délimitée par trois arcs de cercles, et 1 région infinie elle aussi délimitée par trois arcs de cercles.

Question : Existe-t-il toujours un cercle tangent aux trois premiers qui les contient ?

Question : Pourquoi ne peut-on pas avoir deux droites tangentes aux trois cercles ?

Construction d'empilements apolloniens.

Les figures ci-dessus s'appellent des *empilements apolloniens*. Elles sont construites de la manière suivante :

(1) On trace 4 cercles mutuellement tangents, l'un contenant les trois autres.

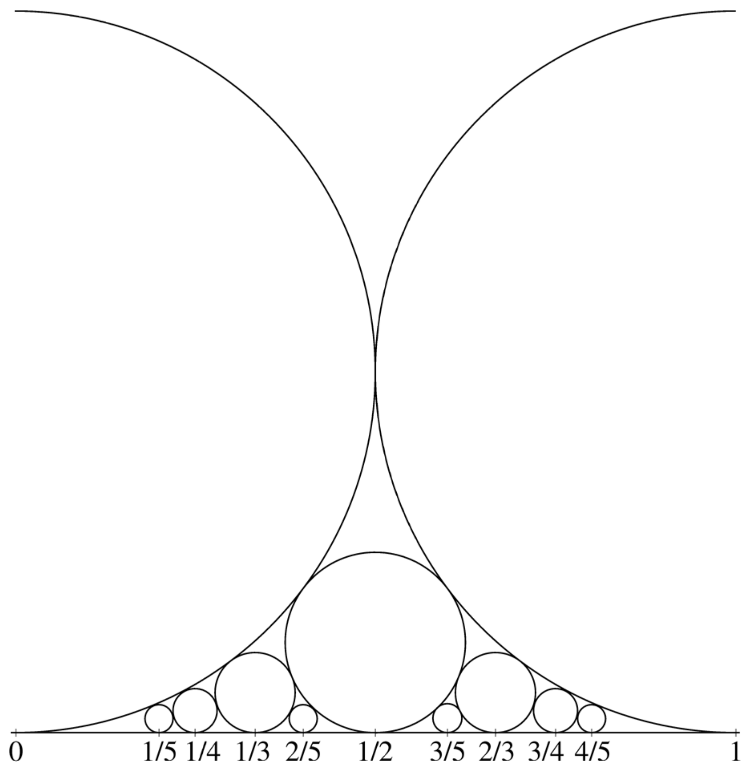
(2) On trace tous les cercles tangents à trois cercles mutuellement tangents tracés lors d'étapes précédentes.

(3) On répète l'instruction (2) à l'infini.

Question : À chaque fois qu'on applique l'instruction (2), combien de nouveaux cercles apparaissent ?

Les fractions et les empilements apolloniens.

Maintenant, nous allons étudier une petite portion d'un empilement apollonien. On trace la droite horizontale passant par l'origine (encore appelée axe réel), et les deux cercles de rayon $1/2$ centrés aux points de coordonnées $(0, 1/2)$ et $(1, 1/2)$. Ensuite, on trace tous les cercles tangents à l'axe réel et à deux cercles tracés précédemment. On répète la dernière opération à l'infini. Au bout de quatre étapes nous obtenons la figure ci-dessous.



Pour comprendre le lien avec les empilements apolloniens définis précédemment, il faut regarder la droite horizontale comme un cercle de rayon infini dont le centre est à l'infini.

Question : Est-ce que le dessin ci-dessus ressemble à une partie de la figure de droite de la première page ?

Sur le dessin ci-dessus, l'abscisse des points de tangence entre l'axe réel et les cercles est une fraction.

Question : L'abscisse d'un point de tangence entre l'axe réel et un cercle de l'empilement apollonien est-elle toujours une fraction ?

Question : Lorsque vous tracez un nouveau cercle de l'empilement, celui-ci est tangent à deux cercles tracés précédemment. Pouvez-vous trouver une relation entre les abscisses des différents cercles ?

Question : Est-ce que toutes les fractions comprises entre 0 et 1 sont les abscisses de points de tangence ?