Quelques automates cellulaires

On considère des cases alignés sur une droite ou une demi-droite (on parle d'automate unidimensionnel), ou dans le plan (automate bidimensionnel). Un automate cellulaire est un procédé d'évolution qui décrit se qui passe en un site en fonction de règles locales : l'état d'une case à l'instant $N+1$ dépend de la configuration de ses voisins à l'instant N. Pour pouvoir démarrer, il faut une condition initiale, la configuration à l'instant 0. Nous ne donnerons pas de définition formelle des automates cellulaires pour ne pas rentrer dans des considérations trop complexes. La règle locale sera décrite dans chaque cas.

1 Un modèle unidimensionnel : le trafic routier

On simplifie considérablement le problème réel. Il y a une seule file de voitures (modélisé par une droite horizontale). Toutes les voitures ont la même taille et vont à la même vitesse quand elles roulent. Une case est noire si elle est occupée par une voiture, blanche si elle est libre.

La règle locale est la suivante : une voiture avance sur la case à sa droite si elle est libre sinon elle reste immobile.

Exemple de configuration

Au temps 1

Après s'être familiarisé avec la règle locale et avoir programmé cet automate cellulaire, on pourra tester les configurations qui amènent à un embouteillage (plus personne ne peut se déplacer), calculer la vitesse de déplacement d'un véhicule dans le cas d'une configuration périodique, d'une configuration finie (que des cases blanches à l'extérieur d'une fenêtre donnée) etc ...

2 Le jeu de la vie

C'est l'automate cellulaire le plus célèbre. Il a été inventé par le grand mathématicien anglais Conway en 1970. Le jeu de la vie est un automate cellulaire bidimensionnel. Les cases se trouvent sur une grille à 2 dimensions. On parle de cellules car elles peuvent être dans deux états : mortes ou vivantes. Ce modèle est censé représenter l'évolution d'une population au cours du temps. Néanmoins, les règles d'évolution inventées par Conway n'ont rien de réalistes. Voici la règle locale : L'état d'une cellule au temps $N+1$ dépend des 8 cellules qui l'entourent.

— Une cellule morte possédant exactement 3 voisines vivantes devient vivante (elle naît).

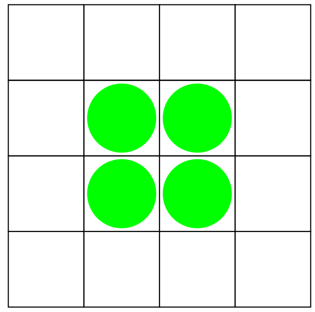
— Une cellule vivante possédant 2 ou 3 voisines vivantes reste vivante, sinon elle meurt.

Là aussi la première chose à faire est de programmer le jeu de la vie. De nombreux programmes se trouvent sur internet mais il est beaucoup plus intéressant d'en faire un soi-même qu'on pourra faire évoluer en fonction des questions qu'on se posera lors du projet.

On pourra chercher des configurations finies[1] avec des propriétés intéressantes.

On dit qu'une configuration est stable si elle n'évolue pas au cours du temps. Un exemple est le suivant

1. configurations possédant un nombre fini de cellules vivantes.



Configuration stable la plus simple

Trouvez-en d'autres ?

Une configuration est oscillante si elle se réapparaît de façon périodique. Une configuration stable est un cas particulier de configuration oscillante (périodique de période 1). On pourra chercher des configurations oscillantes de différentes périodes.

Un vaisseau spacial est un configuration finie qui se répète après un certain nombre d'itérations avec un décalage spacial. Là aussi, on recherchera ces configurations.

On pourra aussi chercher des configurations expansives (dont le nombre de cellules vivantes grandit avec le temps), des configurations qui meurent, etc...

3 Ouverture

Les mathématiciens et les informaticiens théoriciens ont inventé de très nombreux types d'automates cellulaires depuis les années 70 pour modéliser des phénomènes biologiques, informatiques ou pour la compréhension théorique de ces objets. Si le temps le permet, on étudiera les propriétés fascinantes de certains d'entre eux.

Plusieurs exemples d'automates unidimensionnels sont basés sur l'addition modulo 2 :

$0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=0$. On parle d'automates additifs. Les valeurs des cases sont égales soit à 0 soit à 1.

Voici 2 exemples d'automates additifs :

— La valeur d'une case à l'instant $N+1$, est la somme modulo 2 des valeurs de ses deux voisines à l'instant N.

— La valeur d'une case à l'instant $N+1$ est la somme modulo 2 de sa valeur à l'instant N et de la valeur de sa voisine de droite à l'instant N.[2]

2. Cet exemple est très classique car il permet de construire le triangle de Pascal modulo 2 si on part de la configuration ne comportant qu'un 1.