## 3. Une fourmis sur un tétraèdre régulier

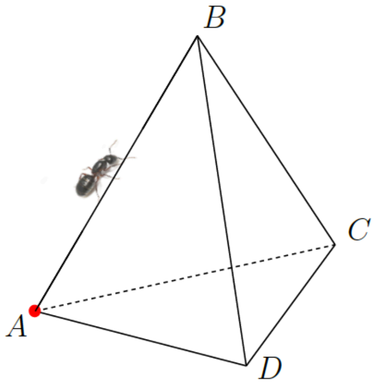


Figure 2. Illustration du problème 3

On considére une fourmis se déplaçant sur les arêtes d'un tétraèdre régulier. On fixe un sommet de référence pour ce tétraèdre et on suppose que la fourmis part de ce sommet. La distance entre deux sommets du tétraèdre est supposée égale à 1 et correspond à la longueur du chemin parcouru par la fourmis allant du premier sommet vers le deuxième. On s'intéresse à la longueur des chemins parcouru par la fourmis qui partent du sommet initial. Combien y a-t-il de chemins de longueurs 7 qui terminent à la position initiale ? Combien y a-t-il de chemins de longueurs 7 qui terminent à un sommet adjacent ?

*Pour les experts :* Combien y a-t-il de chemins de longueurs 2022 qui terminent à la position initiale ? Combien y a-t-il de chemins de longueurs 2022 qui terminent à un sommet adjacent ? Ne pas hésiter à s'aider du site www.wolframalpha.com.

**Suite du problème pour les élèves ayant vu leurs recherches aboutir :**

**Introduction aux matrices.** Une matrice est un tableau de nombres réels représentés entre parenthèses :

$$n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a_{i,j} \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } (i,j) \in \mathbb{R}^2.$$

On note de façon plus concise $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un tel tableau, que l'on appelle matrice de taille $n \times n$.

*Exemple.* Si $n = 2$, la formule précédente devient

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Si $n = 3$, la formule précédente devient

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

On peut additionner des matrices entre elles :

$$(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} + (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

*Exemple.* Si $n = 2$, la formule précédente devient

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On peut également multiplier des matrices entre elles :

$$(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \times (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \text{ où } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + \cdots + a_{i,n} b_{n,j}.$$

*Exemple.* Si $n = 2$, la formule précédente devient

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} & a_{1,1} b_{1,2} + a_{1,2} b_{2,2} \\ a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{2,1} & a_{2,1} b_{1,2} + a_{2,2} b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

**Retour sur le problème de la fourmis.** L'idée de cette partie est de coder les polygones et les polyèdres par des matrices.

(4) Dans cette question, on considère le déplacement d'une fourmis sur un triangle équilatéral. Résoudre les questions (1), (2), (3) dans ce contexte à l'aide des matrices de taille $3 \times 3$.

(5) Dans le cas du tétraèdre régulier, résoudre les questions (1), (2), (3) à l'aide de matrices.

(6) Résoudre les questions (1), (2), (3) à l'aide de matrices dans le cas du déplacement d'une fourmis sur un cube.