MATh.en.JEANS 2021-2022

Sujet 1 : Transport de vaccins

Le réseau de transport de la Région est représenté par un graphe. Sa capitale et centre névralgique est Dijon. Dans chaque ville se trouve un entrepôt de vaccins Pfizentra contre la colvide 17. Et sur chaque route est embusqué un groupe de zombies qui utilisent les doses de vaccin à des fins inavouables (compléter l'histoire fait évidement partie du sujet). On transporte donc les vaccins le long des routes, d'une ville à une ville voisine. Sur chaque route, on ne peut transporter qu'un nombre pair de doses. Mais à chaque livraison une bande de Zombies vole la moitié de la cargaison. Notre but est d'arriver à livrer au moins une dose de vaccin (devinez pour qui !).

Question. Combien de doses de vaccin faut-il avoir au minimum pour que, quelle que soit leur distribution initiale, il soit toujours possible de livrer Dijon ?

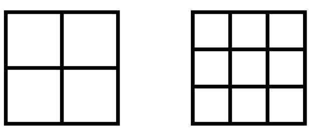
Exemple. Pour le graphe D–B–C représentant Dijon-Beaune-Chalon, il suffit de placer 4 doses de vaccin n'importe où pour atteindre le but. Par contre, avec seulement 3 doses placées à Chalon, c'est impossible. La bonne réponse est donc 4.

En général, la réponse dépend de la complexité du graphe et du nombre de villes. Tester d'abord les « graphes ligne », puis des arbres, etc... Mais sachez que, si vous ne trouvez pas, celui qui l'on ne dit pas ne sera peut-être pas vacciné.....

Sujet 2 : Auto-pavages

On dit qu'un polygone C est *autopavable* si on peut paver C avec un certain nombre de copies de C à une échelle plus petite, toutes de même taille (les pavés sont tous isométriques à un même homothétique de C).

Exemple. On peut paver un carré par 4 carrés de taille moitié. Un carré est donc autopavable. Ici, le rapport d'échelle est 1/2. On peut aussi paver un carré avec 9 carrés de taille 1/3, et plus généralement par n^2 carrés de taille $\frac{1}{n}$.



Question 1. Quels sont les polygones autopavables ? Y-en a-t-il d'autres que le carré ? Parmi les polygones réguliers, lesquels sont autopavables ?

Soit C est un polygone autopavable. Un nombre $\lambda > 1$ est un *rapport d'autopavage* de C s'il existe un autopavage de C de rapport $1/\lambda$. On a vu que, si C est un carré, alors tous les entiers sont des rapports d'autopavage de C.

Question 2. Y a-t-il des polygones qui sont auto-pavables de rapport n pour tous les entiers n, autres que le carré ? Y a-t-il des polygones autopavables autres que le carré qui ont une infinité de rapports d'autopavages ? Y a-t-il des polygones autopavables qui n'ont qu'un nombre fini de rapports d'autopavages ?

Question 3. Le carré a-t-il des rapports d'autopavage autres que les entiers ? Est-ce que $2,5$ peut être un rapport d'autopavage pour un polygone ? Existe-t-il un polygone C ayant un rapport d'autopavage qui ne soit pas entier ? Est-ce que tous les nombres réels > 1 peuvent être des rapports d'autopavage d'un polygone ?

Sujet 3 : Santé !

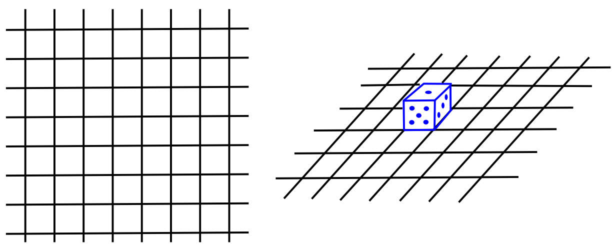
Autour d'une table sont assises n personnes qui veulent trinquer. Plusieurs paires de personnes peuvent trinquer simultanément.

Question 1. Combien d'étapes sont nécessaires pour chaque personne ait pu trinquer avec chaque autre personne ? La réponse change-t-elle si en plus on interdit de croiser les bras en trinquant ? Combien d'étapes seraient nécessaires si on autorisait également des triplets de personnes à trinquer ensemble ?

Question 2. Supposons qu'il y ait en fait $2m$ personnes autour de la table, m filles et m garçons. Chaque fille a 2 garçons pour voisins, et donc chaque garçon 2 filles. Les filles veulent trinquer avec chaque autre fille, et les garçons avec chaque autre garçon, et tout ceci sans croiser les bras. Combien d'étapes seront nécessaires ?

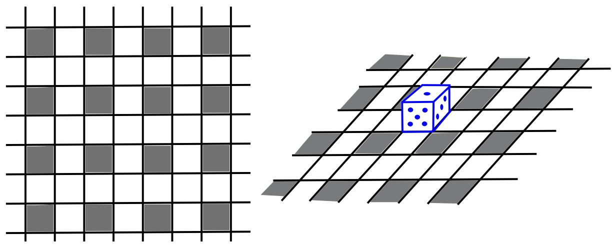
Sujet 4 : Parcours de dés

On considère un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, qu'on fait rouler sur un plan quadrillé en carrés de même taille que les faces du dé. On peut déplacer le dé en le faisant tourner d'un quart de tour dans une des quatre directions. Un *parcours de dé* consiste en une suite de tels déplacements, et un *parcours fermé* est un parcours de dé tel que le dé est de nouveau posé sur son carré initial à la fin du parcours.



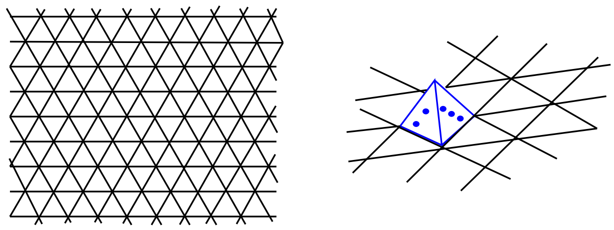
Question 1. Supposons que le dé est initialement posé sur le quadrillage de sorte que la face « 1 » soit au dessus. Existe-t-il un parcours fermé tel qu'à la fin du parcours la face du dessus soit maintenant le « 6 » ? Qu'en est-il des autres faces ? Existe-t-il un parcours fermé qui fasse tourner le dé d'un demi-tour autour d'un axe vertical ? D'un quart de tour ?

On considère maintenant que certaines cases du quadrillage sont inaccessibles ou *grisées*. On autorise donc uniquement les parcours de dé tels que le dé n'est jamais posé sur une case grisée du quadrillage. Bien entendu, la case de départ du dé sera une case non grisée.



Question 2. Si la face « 1 » est initialement au dessus du dé, et la face « 2 » pointe vers le Nord, quelles sont les positions possibles du dé en fin de parcours fermé si les cases sont grisées comme sur la figure ci-dessus ? Trouver une manière de griser certaines cases du quadrillage de sorte qu'il y ait $1, 2, 3, 4, 6$ ou 12 positions possibles en fin de parcours fermé.

A présent, à la place d'un dé classique à 6 faces, on fait rouler un dé à faces triangulaires sur un pavage du plan en triangles équilatéraux. On va considérer des dés à 4, 8 et 20 faces, correspondant au tétraèdre, à l'octaèdre et à l'icosaèdre réguliers.



Question 3. Pour chacun de ces dés, décrire quelles faces peuvent se retrouver au dessous à la fin d'un parcours de dé fermé. Dans chaque cas, existe-t-il un parcours fermé qui fait tourner le dé de $120°$?

Pour finir, plutôt que de faire rouler un dé sur le plan, on peut faire rouler un dé à faces triangulaires sur un autre dé à faces triangulaires de même côté. Par exemple, faire rouler un dé à 4 faces (tétraèdre) sur un dé à 8 faces (octaèdre). L'octaèdre sera considéré comme fixe et à chaque étape une face du tétraèdre sera en contact avec une face de l'octaèdre. Faire rouler le dé signifie faire basculer le dé sur une des faces adjacentes à la face de contact.

Question 4. Si initialement, la face « 1 » du tétraèdre est en contact avec la face « 1 » de l'octaèdre, décrire les faces du tétraèdre qui peuvent être en contact avec la face « 1 » de l'octaèdre en fin de parcours fermé. Et si on fait rouler le tétraèdre sur l'icosaèdre ? L'octaèdre sur le tétraèdre ? L'icosaèdre sur le tétraèdre ? Un octaèdre sur un autre octaèdre ? etc...

Sujet 5 : Paver le plan avec des polygones

Considérons un polygone donné. Le problème est de determiner si on peut paver on non le plan avec des copies de ce polygone. Dire que ces polygones pavent le plan signifie que le plan est

entièrement recouvert (pas d'espace libre !) et que deux polygones ne se touchent que le long de leur bord. Toutes les copies sont obtenues à partir de la forme initiale en la déplacant et en la tournant. Vous avez certainement vu des pavages avec des tomettes (hexagones réguliers) et avec des carrés. Vous pouvez facilement construire un pavage à partir d'un triangle équilateral.
On veut determiner les polygones convexes avec lesquels on peut paver le plan :

Problème 1. Quelles sont les valeurs de n telles qu'on peut paver le plan avec des copies d'un même n-gone ?

Par exemple, on sait qu'on peut paver le plan avec des triangles, des quadrilatères et des hexagones. Peut-on le paver avec des pentagones ? avec des heptagones ? des octogones ? Ensuite, on peut fixer le nombre n de côtés, et se demander quelles sont les formes possibles des n-gones qui pavent le plan.

Problème 2. On regarde les pavages par n-gones à partir de $n = 3$ et on se pose les questions :

1. Quels sont les triangles avec lesquels on peut paver le plan ?
2. Quels sont les quadrilatr̀es (convexes) avec lesquels on peut paver le plan ?
3. Quels sont les pentagones (convexes) avec lesquels on peut paver le plan ?
4. Même question avec les hexagones, heptagones, octogones, etc.

On peut commencer par le cas des triangles.

Question. Peut-on déformer un pavage donné pour obtenir un nouveau pavage ?

Sujet 6 : Fractions proches (suites de Farey)

Considérons les fractions propres irréductibles dont le dénominateur est inférieur ou égal à 7. Écrivons cette liste de fractions en ordre croissant :

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}. \tag{1}$$

Exercice. Vérifiez que l'ordre de cette suite de fractions est, en effet, croissant. Par exemple,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \cdot 7} > 0, \quad \frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{1}{5 \cdot 7} > 0 \quad \text{etc.}$$

Exercice. Faites une liste des régularités et des symétries observées.

Propriété A. *Si deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ de la suite* (1) *sont adjacents et $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, alors*

$$bc - ad = 1\,.$$

Exercice. Vérifiez la propriété A pour les fractions adjacents de la suite (1).

Propriété B. *Chaque fraction de la suite* (1) *est obtenue de ses fractions adjacents de la manière suivante : On additionne les numérateurs et le résultat est divisé par la somme des dénominateurs.* Par exemple, $\frac{2}{5} = \frac{1+3}{3+7}$.

Exercice. Vérifiez la propriété B pour sept ou huit fractions de la suite (1).

F_1	$\boxed{\frac{0}{1}}$																		$\boxed{\frac{1}{1}}$
F_2	$\frac{0}{1}$									$\boxed{\frac{1}{2}}$									$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$						$\boxed{\frac{1}{3}}$			$\frac{1}{2}$			$\boxed{\frac{2}{3}}$						$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$				$\boxed{\frac{1}{4}}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$		$\boxed{\frac{3}{4}}$				$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$			$\boxed{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{2}{5}}$		$\frac{1}{2}$		$\boxed{\frac{3}{5}}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\boxed{\frac{4}{5}}$			$\frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}$		$\boxed{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\boxed{\frac{5}{6}}$		$\frac{1}{1}$
F_7	$\frac{0}{1}$	$\boxed{\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{2}{7}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\boxed{\frac{3}{7}}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{4}{7}}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\boxed{\frac{5}{7}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\boxed{\frac{6}{7}}$	$\frac{1}{1}$

FIGURE 1 – Les premières sept suites de Farey.

Suites de Farey. La suite (1) est notée F_7 et s'appelle 7-ème *suite de Farey.*
La n-ème *suite de Farey* est constituée des fractions propres irréductibles dont le dénominateur est inférieur ou égal à n, placés en ordre croissant.

On a arrangé les suites de Farey pour $n = 1, 2, \ldots, 7$ dans la figure 1.
Notez que la ligne F_1 et les fractions « bordantes » $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$ ont été incluses pour compléter la table. Les nouvelles fractions de chaque ligne sont montrées dans une boîte.

Concernant les fractions emboitées observez que chaque fraction qui apparaît entre deux fractions (de la ligne précédente) a par numérator la somme des leurs numérateurs et par dénominateur la somme de leurs dénominateurs. Cela nous donne une manière simple de construire la ligne F_n à partir de la ligne F_{n-1} :

Propriété C. *Dans la $(n-1)$-ème ligne on marque les paires de fractions adjacentes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dont la somme des dénominateurs est égal à n et on insère la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ pour chucun de ces pairs.*

Exercice. Complétez la table avec les suites F_8 et F_9. Notez que les nouvelles fractions obtenues sont irréducibles. Il faudra vérifier les propriétés A et B pour les suites de Farey F_8 et F_9.

Fractions proches. On dira que deux fractions arbitraires $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont *proches* si $bc - ad$ est égal à 1 ou -1.

Exercice. Dans la suite (1) trouvez toutes les paires de fractions proches.

Fraction médiante. On appelle $\frac{a+c}{b+d}$ la *fraction médiante* des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

Exercice. Verifiez sur des exemples et essayer de justifier les propriétés suivantes :

a) *Pour toute paire de fractions (arbitraires) $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, la valeur absolute de leur différence est supérieur ou égale à $\frac{1}{bd}$:*
$$\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| \leq \frac{1}{bd}\,.$$
et on obtinet l'égalié uniquement si les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont proches.
(cela explique le terme « *fractions proches* ».)

b) *La fraction médiante de deux fractions arbitraires se trouve toujours entre ces fractions, c-à-d si* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, *alors*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}\,.$$

c) *Si deux fractions sont proches, alors chacune de ces fractions est irréducible.*

d) *Si deux fractions sont proches, alors leur fraction médiante est proche de chacune de ces fractions.*

e) *Si deux fractions sont proches, alors leurs dénominateurs sont relativement premiers* (c'est-à-dire ils n'ont pas de facteur commun, à part 1) *et leurs numérateurs sont relativement premiers.*

Sujet 7 : Les chemins du chasseur et la cartographie de la terre

Un chasseur part de sa tente. Il marche 10 kilomètres au sud, 10 kilomètres à l'ouest, 10 kilomètres au nord et finalement 10 kilomètres à l'est. Après ce parcours le chasseur retrouve sa tente.

Question 1. Où pourrait-on trouver la tente du chasseur ?

La réponse apparemment évidente « n'importe où ! » serait correcte pour la géographie plane, mais la cartographie sur la Terre est un peu plus complexe.
Avant d'aborder cette question (pour la cartographie de la Terre) on va essayer de résoudre un probléme plus simple : Le même chasseur n'a fait que trois étapes : 10 km au sud, puis 10 km à l'ouest, puis 10 km au nord, ensuite il est arrivé à sa tente.

Question 2. Où pourrait-on trouver sa tente ?

Pour ce voyage de trois étapes, une solution évidente est le pôle Nord. Mais cette solution n'est pas unique !
Trouvez toutes les solutions.

Revenons au problème initial du voyage à quatre étapes - Question 1.
Il est clair qu'en voyageant le long d'un méridien du nord au sud, le chasseur couvre la même distance qu'il parcourt par un autre méridien du sud au nord entre les deux mêmes parallèles ; mais puisque ces parallèles peuvent avoir des circonférences différentes, le chasseur pourrait terminer au-delà ou à l'écart de sa tente.
Une solution naturelle est de mettre la tente n'importe où sur le parallèle situé 5 km au nord de l'équateur. Puis les deux parallèles le long desquels le chasseur voyage sont situés á la même distance de l'équateur et sont donc de la même longueur. Ainsi, il reviendra à sa tente.
Mais y a-t-il d'autres endroits possibles où placer la tente ?

La réponse est oui !

Trouvez toutes les solutions.

Sujet 8 : Rangs de plants

Jean-Jacques cultive des fraises à Labastide-Paumès (Haute-Garonne). Il aime bien planter ses pieds de fraises en rangs de trois. Il a 252 pieds et il sait qu'ils rentreront parfaitement dans ses rangs car 252 est divisible par trois, du fait que $2+5+2=9$ et 3 divise 9.

Question 1. Jean-Jacques veut expliquer aux autres cultivateurs pourquoi cette règle marche, pouvez-vous l'aider ?

Jean-Marie, un copain de Jean-Jacques, préfère faire des rangs de sept plants et aimerait bien, lui aussi, avoir une règle simple pour savoir si 39374041 pieds rentrent bien dans ses rangs. Jean-Jacques trouve le résultat suivant :

$$1\times 1+4\times 3+0\times 2-4\times 1-7\times 3-3\times 2+9\times 1+3\times 3=0$$

et 0 est divisible par 7, donc oui 39374041 est divisible par 7.

Question 2. Pouvez-vous apprendre à Jean-Marie la règle trouvée par Jean-Jacques puis expliquer aux deux copains pourquoi elle marche ?

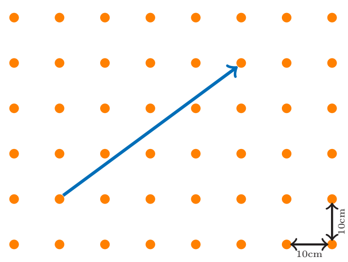
Les exploits de Jean-Marie ont un écho puissant dans les environs, certains paysans vont le consulter comme s'il s'agissait d'un oracle. Un troisième cultivateur, Jean-Baptiste, pratique des rangs de 19 pieds.

Question 3. Pouvez-vous aider Jean-Marie à établir une règle concernant la divisibilité par 19 ?

Le soir, épuisé par sa journée de labeur, parfois Jean-Jacques se pose des questions. Est-ce qu'on pourrait trouver des règles de divisibilité pour n'importe quel nombre n ? Combien d'opérations du type somme et produit devrais-je faire pour savoir si m est divisible par n ? Est-ce avantageux d'utiliser ces règles, par rapport à la division euclidienne ?

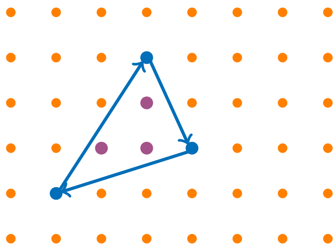
Sujet 9 : Carottes

Jean-Pierre est un agriculteur de Saint-Saturnin (Puy-de-Dôme) et il adore les carottes. Il possède un très vaste terrain et il y cultive ses carottes paisiblement. Jean-Pierre est plutôt méticuleux et pose ses pieds de carotte en rangs perpendiculaires séparés de 10 centimètres, en direction Est-Ouest et Nord-Sud. Il se déplace toujours en ligne droite, par exemple dans la figure ci-dessous il effectue un déplacement de 40cm E et 30cm N.



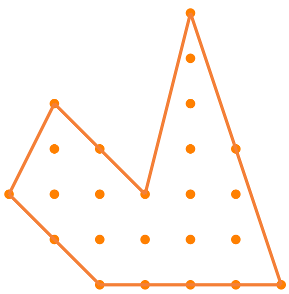
Question 1. Jean-Pierre récolte une carotte, puis il effectue un déplacement de 4,5m E et 10,5m N. Combien de carottes ramasse-t-il sur le chemin ? Et pour un déplacement de xm E et ym N ?

Les carottes ça rend aimable et Jean-Pierre veut en récolter un maximum. Il en ramasse une, il effectue un premier déplacement de 20cm E et 30cm N, puis un deuxième de 10cm E et 20cm S, il revient ensuite au point de départ. Il ramasse aussi les carottes dans le triangle qu'il vient de décrire. Cela fait 6 carottes au total.



Question 2. Combien de carottes ramasse Jean-Pierre de cette manière pour un déplacements de xm E et ym N, puis de um E et vm N, puis retour à la case départ ?

Bon, tout cela c'est bien gentil, se dit Jean-Pierre, alors qu'il effectue des déplacements qui bordent le périmètre de son terrain, en ramassant ainsi un nombre n de carottes ($n = 12$ dans le schéma). Mais combien de carottes il y a-t-il ?

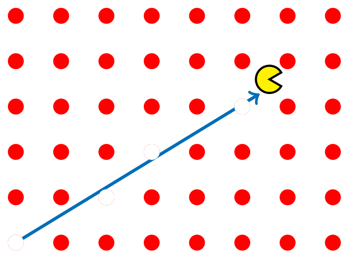


Question 3 (Question « roi des carottes »)**.** Si Jean-Pierre connaît le nombre n de carottes sur le bord et l'aire de son terrain, peut-il dire combien de carottes il contient ?

Sujet 10 : Pac-Man

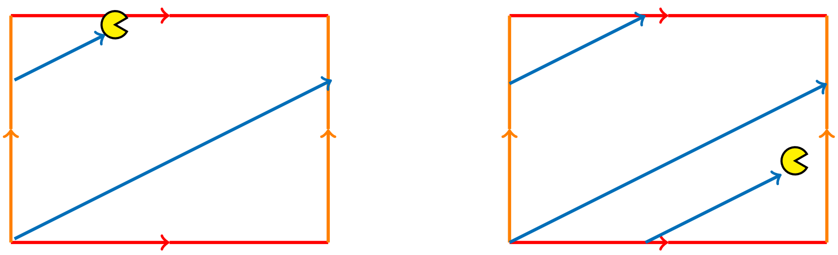
Dans un jeu vidéo inspiré de Pac-Man, un personnage avale des boutons disséminés sur un terrain aux bords magiques ; ceux-ci le font passer du coté opposé du terrain avec différentes règles. Les concepteurs du jeu ont imaginé plusieurs niveaux pour une expérience plus amusante.

Au niveau 1, le terrain est un rectangle où les bords droit et gauche sont magiques et envoient le personnage du côté opposé à la même hauteur. De même, les bords haut et bas envoient le joueur du côté opposé, le point de sortie étant situé à la verticale du point d'entrée.



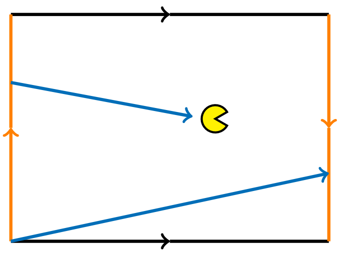
Question 1. Le personnage part du coin bas gauche et se déplace en ligne droite avec l'inclinaison de son choix. À quelle condition revient-il sur place au bout d'un moment ?

Questions accessoires. Si le terrain est de taille $n \times m$, à quelle condition le personnage avale tous les boutons avant de revenir sur place ? Trouvez-vous plusieurs lignes droites fermées disjointes ?



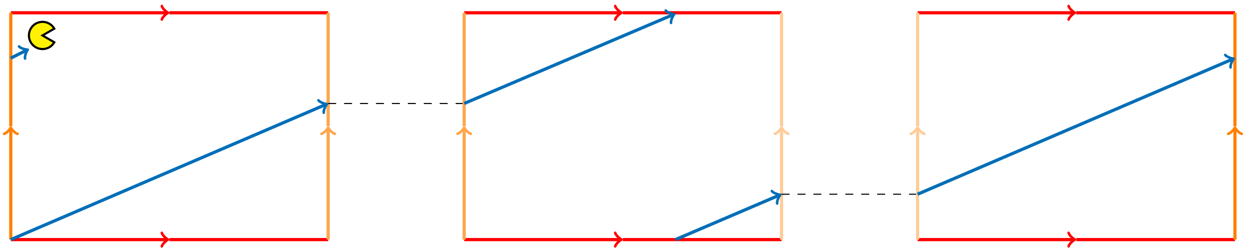
Au niveau 2, uniquement les bords droit et gauche sont magiques : ils envoient le personnage du côté opposé à hauteur opposée – par exemple si le personnage passe au coin bas droite il se retrouve en haut à gauche. D'abord on peut se demander : si le personnage au début est en forme de P, quelle forme prend-il après son passage par le bord droit ? Et si il passe deux fois ?

Question 2. Supposons que le personnage se promène en ligne droite et que cette droite soit fermée ; notons-la d. Peut-on marcher en ligne droite de l'un à l'autre des boutons restants, sans traverser d ?



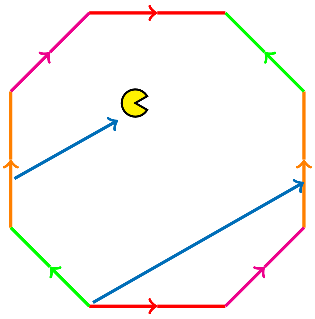
Au niveau 3, le personnage se trouve dans un bâtiment à plusieurs étages rectangulaires (RdC, 1er, 2ème). Les bords droits et gauches de ces rectangles envoient le personnage du côté opposé à la même hauteur, mais dans un étage différent : si on est au RdC on se retrouve au 1er étage, si on est au 1er on se retrouve au 2ème, si on est au 2ème on retombe au RdC. Les bords haut et bas en revanche envoient le joueur du côté opposé, le point de sortie étant situé à la verticale du point d'entrée, dans le même étage.

Question 3. Sauriez-vous répondre aux mêmes questions que dans la Question 1 ? Et si on est un peu hacker et on trafique les bords pour les inverser comme dans la Question 2 ?



Le niveau final est le plus difficile ! Les concepteurs ont changé radicalement la forme du terrain de jeu. Au lieu d'un terrain rectangulaire, on se trouve sur un polygone régulier avec $4n$ côtés. Chaque bord envoie le personnage sur le côté opposé, de façon à ce que le point de départ et d'arrivée se trouvent sur la même perpendiculaire aux deux côtés en question.

Question 4. Pouvez-vous répondre à la Question 1 pour ce niveau ? Et si on arrange les bords par couples doublés, par exemple en rouge, jaune, rouge, jaune, orange, violet, orange, violet etc, dans le sens que vous voudrez ?



Notre personnage rêve de revenir sur terre : sur la Terre, on est sur une sphère, donc en marchant en ligne droite, au bout d'un certain temps on se retrouve toujours au point de départ. Aussi, deux chemins fermés parcourus en ligne droite se recoupent toujours aux antipodes.

Question 5. Comment agencer les bords magiques pour reproduire la situation d'une sphère ? À quoi ressemble la « planète » de Pac-Man dans les différents niveaux du jeu ?