Sujet 2. Le meilleur candidat?

On suppose que n points du plan $M_1, \ldots, M_n$ (les "électeurs") sont donnés. Si A et B (les "candidats") sont deux autres points du plan, on note $p_{A/B}$ le nombre de points M_i plus proches de A que de B et $p_{B/A}$ le nombre de points M_i plus proches de B que de A. Les points M_i à égale distance de A et de B ne sont pas pris en compte. On dira que A bat B si $p_{A/B} > p_{B/A}$ et que B bat A si $p_{B/A} > p_{A/B}$. Si $p_{A/B} = p_{B/A}$, on dit que A et B font match nul.

Quelques questions :

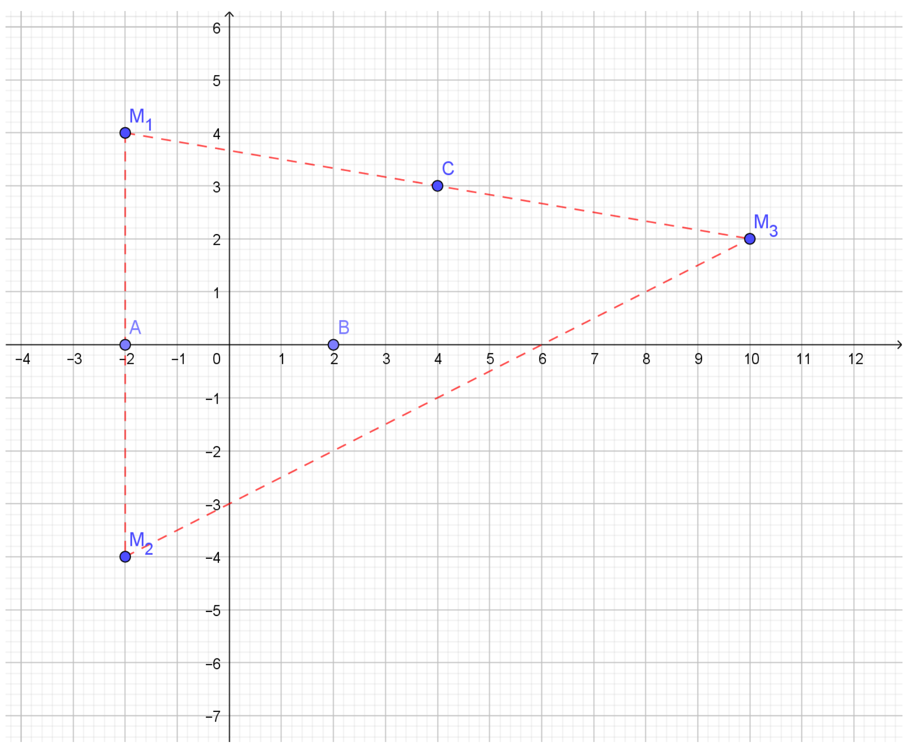
1. Si on fixe A, comment déterminer l'ensemble des points du plan qui battent A?

2. Est-il possible d'avoir trois points du plan A, B, C tels que : A bat B, B bat C et C bat A?

3. Existe-t-il un point du plan qui n'est battu par aucun autre point?

Les réponses à ces questions dépendent sûrement de la position des points M_i (les "électeurs"). On peut commencer par regarder le cas où $n = 2$, puis celui où les points M_i sont alignés (avec n quelconque), puis celui où $n = 3$...

Voici une autre question (en relation avec la question 2) : étant donné trois points du plan A, B, C, peut-on placer les "électeurs" M_i pour que A batte B, B batte C et C batte A? On peut se poser la même question avec un nombre quelconque p de candidats (on veut alors que A_1 batte A_2, A_2 batte A_3,..., A_p batte A_1).



Dans la configuration de cette figure, A bat B, B bat C, A bat C.