MATh.en.JEANS

Collections de 3-ensembles vérifiant une propriété combinatoire

3 Octobre 2022

1 Le cadre

Soit n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n. Par exemple, $E = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Définition 1.1. On appelle 3-ensemble de E tout sous-ensemble de E de cardinal 3. On parle aussi juste de bloc.

Remarque 1.2. Attention, pour les blocs on a $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$, tandis que pour les triplets $(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$.

Exemple 1.3. $\{1, 2, 3\}$ est un bloc de E.
L'ensemble de tous les blocs de $E = \{1, 2, 3, 4\}$ est $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$

2 Le problème

On voudrait construire des collections S de blocs de $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ vérifiant :

Problème 2.1. À chaque fois qu'on choisit deux élements distincts de E, il existe exactement un bloc de la collection $\mathcal{S}$ qui les contienne.

Exemple 2.2. Pour $n = 3$, on a $E = \{1, 2, 3\}$ et S ne contient qu'un seul élément $\mathcal{S} = \{\{1, 2, 3\}\}$.

Exemple 2.3. Pour $n = 4$, on a $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Supposons que $\{1, 2, 3\} \in \mathcal{S}$, alors $\{1, 2, 4\} \notin \mathcal{S}$, $\{1, 3, 4\} \notin \mathcal{S}$, $\{2, 3, 4\} \notin \mathcal{S}$... Le problème n'a pas de solution pour $n = 4$.

3 Les questions de départ

Question 3.1. Construire de telles collections S pour certaines valeurs de n. Combien ces collections S comportent-elles d'éléments ? Montrer qu'il n'est pas possible d'en construire pour certaines valeurs de n.

Question 3.2. Imaginer des jeux exploitant les caractéristiques combinatoires de S.
Réaliser géométriquement de telles collections S. Réaliser géométriquement les jeux associés.