Mathématiques babyloniennes

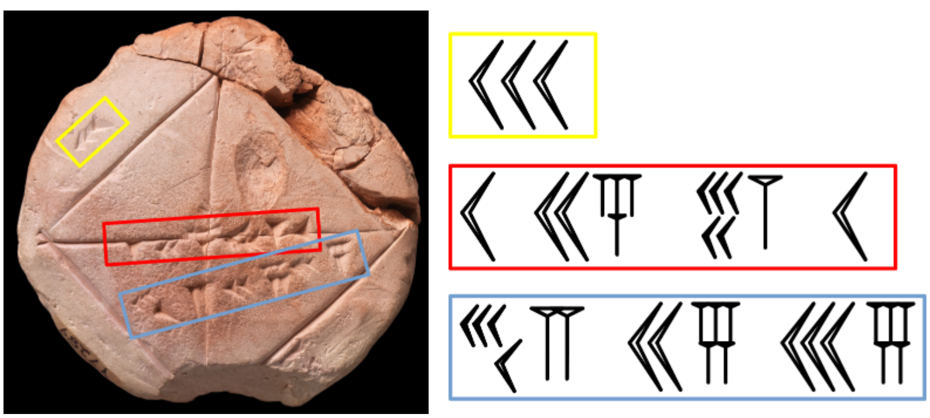
Voici votre objet d'étude. Il s'agit d'une tablette d'argile babylonienne datée entre 1800 et 1600 av.

Les mathématiques babyloniennes, comme celles de l'Égypte ancienne, sont souvent oubliées au profit des mathématiques grecques. Peut-être à juste titre : ce sont en effet les Grecs de l'Antiquité qui ont inventé les démonstrations mathématiques. Pourtant, les Babyloniens étaient d'excellents comptables et ingénieurs et possédaient de grandes connaissances géométriques. Il semble qu'ils construisaient leurs temples selon des formes mathématiques parfaites (cubes, polygones réguliers, ...) communiquées en rêve par les dieux aux prêtres (voir : abstraction, monde des idées, ... ?).

Vous trouverez dans cette tablette un résultat géométrique de grande valeur.

Pour les personnes intéressées par le sujet, je recommande l'excellent livre "A history of mathematics" de Carl B. Boyer, malheureusement non traduit en français, mais facile à comprendre.

Décryptage de la tablette.



La tablette contient trois nombres, manifestement écrits en caractères cunéiformes. Grâce aux informations suivantes, vous pourrez les déchiffrer.

- Les Babyloniens avaient une base sexagénaire et n'utilisaient pas la virgule.
- Chaque symbole-bec < indique 10 et chaque symbole-clou T indique 1.

Remarque : en raison de l'absence de virgule, chacun de ces nombres peut être interprété de différentes manières. Par exemple, <<T peut signifier 21 ou $21 \cdot 60^{-1} = \frac{21}{60} = 0.35$ ou $21 \cdot 60 = 1260$ ou $21 \cdot 60^{-2} = \frac{21}{3600} = 0.0058\overline{3}$, ...

Dans cette optique, interprétez les chiffres trouvés jusqu'à ce que vous reconnaissiez au moins un nombre célèbre. Lequel ?

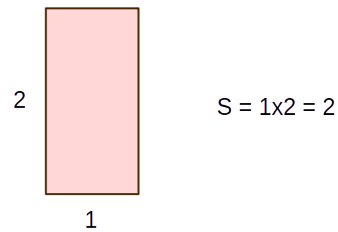
La methode.

Vous avez découvert que la tablette contient une approximation de la racine carrée de deux.

On ne sait pas exactement quelle méthode les Babyloniens ont utilisée pour calculer ce nombre. Cependant, dans un papyrus égyptien daté après la tablette, on a trouvé la méthode expliquée ci-dessous. Sachant que les Égyptiens connaissaient une grande partie (sinon la totalité) des mathématiques babyloniennes et compte tenu de l'extrême simplicité et du caractère naturel de la méthode, on peut supposer qu'il s'agit de la méthode babylonienne d'origine.

L'observation de base est que la racine de deux est la longueur du côté d'un carré de surface deux.

Considérons donc un rectangle d'aire deux, par exemple celui dessiné ci-dessous.



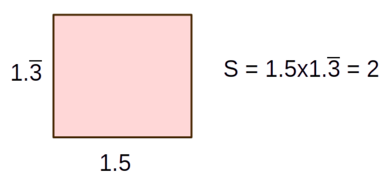
Il ne ressemble en rien à un carré d'aire 2 : un côté est trop grand et l'autre trop petit. La racine carrée de deux est nécessairement plus petite que le grand côté et plus grande que le petit côté : pourquoi ? Trouvez une justification. Construisons alors un rectangle, de surface 2, dont l'un des côtés a la valeur moyenne entre 1 et 2, c'est-à-dire

$$\frac{1+2}{2} = 1.5$$

Pour que le nouveau rectangle ait toujours une surface de 2, l'autre côté doit avoir une longueur de

$$\frac{S}{1.5} = \frac{2}{1.5} = 1.\overline{3}$$

Dessinons-le



Il ressemble déjà davantage à un carré ! Pour les mêmes raisons que précédemment, la racine carrée doit avoir une valeur comprise entre 1.5 et $1.\overline{3}$. Nous construisons ensuite un rectangle dont le côté est égal à la valeur moyenne entre 1.5 et $1.\overline{3}$... Et ainsi de suite, nous obtenons des approximations de plus en plus précises de la racine carrée de deux.

Questions sur la méthode.

Familiarisez-vous d'abord avec la méthode en effectuant quelques itérations supplémentaires. Ensuite, étudiez-le plus en détail en répondant aux questions suivantes.

1. En partant du rectangle 1x2, combien d'itérations sont nécessaires pour obtenir l'approximation babylonienne ?

2. Que se passerait-il si, au lieu de partir du rectangle 1x2, on partait d'un autre rectangle ? Quelles conditions le premier rectangle doit-il remplir pour que la méthode fonctionne ?

3. Vous constatez qu'à chaque itération de la méthode, le nombre de chiffres significatifs de la base et de la hauteur correspondant à la racine de deux augmente. Nous le savons parce que nous connaissons la racine de deux, qui a déjà été calculée pour nous. Supposons que nous ne

connaissions pas la vraie valeur de la racine de deux : existe-t-il un moyen de savoir combien de chiffres significatifs de la longueur de la base ou de la hauteur correspondent à la racine de deux ? Si oui, lequel ?

4. Trouvez la formule qui décrit cette méthode itérative. C'est-à-dire, en appelant x_n et y_n respectivement la base et la hauteur du nième rectangle, trouver la relation entre (x_{n+1}, y_{n+1}) et (x_n, y_n). N'oubliez pas de définir (x_1, y_1).

5. Si vous êtes un passionnées de programmation, écrivez un programme qui calcule la racine carrée de deux en utilisant la méthode babylonienne.

Première généralisation.

1. Généraliser la méthode de recherche de la racine carrée de trois.

2. Généralise la méthode de recherche de la racine carrée de 17.

3. Généralise la méthode pour trouver la racine carrée d'un nombre quelconque.

Deuxième généralisation.

1. En vous inspirant de la méthode que vous connaissez maintenant sur le bout des doigts, développez une méthode pour trouver la troisième racine de deux. Illustrez-la par des dessins.

2. Généralisez encore : trouvez une méthode itérative qui donne la racine troisième de n'importe quel nombre.

Généralisation suprême.

1. Généraliser davantage et trouver une méthode pour calculer la racine ième de n'importe quel nombre.

2. Est-il encore possible de faire des dessins ? Qu'est-ce qu'on imagine ?

Examinez attentivement la formule suprême que vous avez construite. Vous rappelle-t-elle quelque chose ? Quelles autres méthodes itératives connaissez-vous ? Indice : une méthode itérative très célèbre a été développée 3500 ans après nôtre tablette, par un scientifique anglais, fondateur de la mécanique classique...