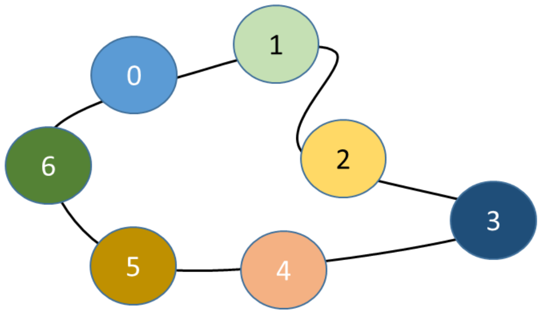
Les bracelets de Fibonacci

Des bracelets modulo m $(m \geq 2)$

Exemple. Si on travaille en modulo 7 (c'est-à-dire m=7), alors il y a seulement sept chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On associe à chacun de ces chiffres une perle de couleur différente (choisissez des couleurs que vous aimez et qui vont bien ensemble). On fabrique un bracelet avec ces sept perles.



Bracelet ouvert

et

bracelet fermé

On suppose le bracelet fermé. On compte les perles à partir du numéro 0 et dans le sens des aiguilles d'une montre. Par exemple, la perle n°3 a pour couleur le bleu foncé, et on peut considérer que la perle n°7 a pour couleur le bleu pâle. Quelle serait alors la couleur de la perle numéro 10 ? numéro 12 ? numéro 121 ?

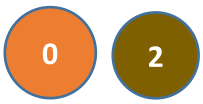
Recommencez la même expérience avec un bracelet modulo 4 ? modulo 5 ?

D'une manière générale, comment caractériseriez-vous deux numéros correspondant à la même perle ?

Recherche sur internet. Qui est Leonardo Fibonacci ?

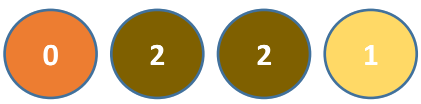
Les bracelets de Fibonacci modulo 3. On ne considère que les chiffres 0, 1 et 2. On associe à chacun de ces chiffres une perle de couleur différente *(choisissez des couleurs que vous aimez et qui vont bien ensemble).*

A présent, choisissez deux chiffres parmi ces trois (éventuellement deux fois le même chiffre). Par exemple, 0 et 2.



Ensuite, vous ajoutez les deux chiffres : 0+2=2, ce qui donne en modulo 3 le chiffre 2.

Vous ajoutez les deux derniers chiffres de la suite pour obtenir le chiffre suivant. On a donc : 2+2=4, ce qui donne en modulo 3 le chiffre 1.



On recommence avec les deux derniers chiffres : 2+1=3, ce qui donne en modulo 3 le chiffre 0.

1/ Continuez ainsi…. Qu'observez-vous ? On dit que la suite est périodique et que la période est 8. On dit aussi que le bracelet est composé de cycles tous égaux à (0 ;2 ;2 ;1 ;0 ;1 ;1 ;2). La longueur de ces cycles est dite égale à 8.

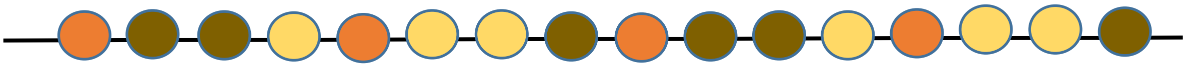
2/ Testez sur d'autres exemples. Que constatez-vous ?

3/ Que pouvez-vous dire sur le bracelet si les deux premières perles sont toutes les deux de la couleur n°0 ? *Dans toute la suite du problème, on supposera que les deux premières perles ne peuvent correspondre au couple de numéros (0 ;0).*

4/ On remarque que les deux premières perles permettent de déterminer toutes les suivantes. De combien de façons peut-on choisir ces deux premières perles ?

5/ Quelles sont toutes les périodes possibles en modulo 3 ?

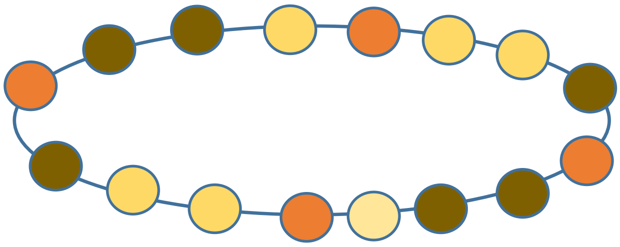
Un bracelet fermé peut compter plusieurs cycles (on enfile les perles de cycles entiers). Par ailleurs, les perles sont disposées dans le sens des aiguilles d'une montre.



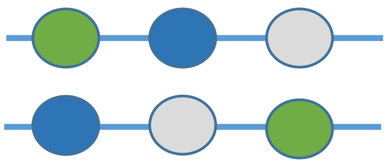
Bracelet de Fibonacci modulo 3

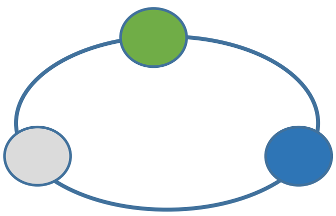
La période est égale à 8.

On compte 2 cycles.



5/ On veut fabriquer des bracelets qui ont 24 perles. Combien de bracelets fermés différents peut-on construire avec cette méthode ? Attention, deux bracelets ouverts distincts peuvent donner un même bracelet fermé !





6/ La photographie suivante correspond-elle à un bracelet de Fibonacci ?

Existe-t-il des bracelets qui sont de Fibonacci à la fois pour m et m' ($m \neq m'$) ?

On dit que les bracelets de Fibonacci sont harmonieux. Qu'en pensez-vous ?

Etudiez les cas des bracelets de Fibonacci modulo 2, puis 4 et 5

Généralisation pour les champions

1/ En modulo m $(m \geq 2)$, quels sont les chiffres que l'on doit considérer ?

2/ On remarque que les deux premières perles permettent de déterminer toutes les suivantes. De combien de façons peut-on choisir ces deux premières perles ? *Ces deux premières perles peuvent être de la même couleur si cette même couleur ne porte pas le numéro 0.*

3/ Montrer que deux perles voisines permettent de déterminer toutes les suivantes, mais aussi toutes les précédentes.

4/ En déduire qu'une suite de Fibonacci modulo m est forcément périodique.

5/ Comment reconnaître deux cycles qui donneront le même bracelet ?

6/ On note $p_1, p_2 \cdots p_r$ toutes les périodes possibles pour les bracelets modulo m $(p_s \geq 2 \text{ pour } s \in [\![1;r]\!])$.

Puis, on désigne par n_s le nombre de bracelets fermés de période p_s. Le nombre total de bracelets ouverts (avec un nombre de cycle donné) est :

$$N = n_1 p_1 + n_2 p_2 + \cdots + n_r p_r$$

-

Pour le professeur

La démonstration de l'existence de la période http://images.math.cnrs.fr/Mysteres-arithmetiques-de-la-suite-de-Fibonacci.html

Un algorithme qui, pour m donné, donne toutes les longueurs possibles, ainsi que le nombre total de bracelets possibles : http://jm.davalan.org/divers/fibonacci/f06.html

Aussi : http://www.geom.uiuc.edu/~addingto/number_bracelets/number_bracelets.html