MATh.en.JEANS, chercher, chercher à faire, faire chercher, apprendre, faire apprendre, apprendre à faire chercher, apprendre à faire, faire, aimer, chercher à aimer, aimer chercher, apprendre à aimer chercher, etc.

par (Association MATh.en.JEANS :) Pierre Audin (Palais de la découverte) et Pierre Duchet (CNRS)

Présentation succinte de l'atelier :
Qu'est-ce que l'activité de recherche ? Quelques Phases/phénomènes types liés aux situations de recherche. Rôles du prof et du chercheur. Rôle du 1er séminaire. Apprentissages réalisés grâce au dispositif MeJ. MeJ en pratique. Narration(s) de recherche. Quelques repères sur les situations de recherche (caractéristiques, définition, problèmes de gestion, apprentissages, modélisation des SR). Les documents sur lesquels les stagiaires ont travaillé (sujets de recherche proposé, textes étudiés).

Pour une présentation du dispositif MeJ avec des exemples de sujets et de production finale d'élèves, consulter les actes des universités d'été précédentes (1999 et 2001). Voir aussi le site web d'Animath http://www.animath.fr/UE/univete.html et le site web de MATh.en.JEANS http://www.mjc-andre.org/pages/amej/accueil.htm ou http://www.mathenjeans.free.fr

Compte-rendu de l'atelier : Pierre Audin, Pierre-Henri Bonnet, Aurelia de Crozals, Pierre Duchet, Agnès Duranthon, Françoise Pawlowski

Situations-recherche : quelques repères théoriques

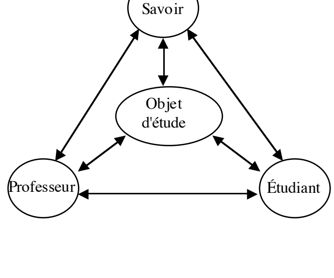
La recherche « experte » (celle des mathématiciens) et la recherche « novice » (celle des élèves dans un atelier MATh.en.JEANS) sont des activités similaires, conformes aux mêmes principes.

1) Un objet de recherche : problématique, présent, central et permanent.

A la différence de l'enseignement, où *Savoir* et *rapport au Savoir* jouent des rôles dominants, la recherche s'organise autour d'un *Objet de science* (« *objet de recherche* », « *objet d'étude* »)

Objet « *à* » savoir et non objet « *de* » savoir, l'objet de recherche est un morceau de réalité (donnons pour exemple « les champs de la vallée du Nil ») qui pose question (les crues du Nil effacent les formes), autour duquel se construisent des pratiques (l'arpentage) et des savoirs (« géométrie plane »), l'objet de science est là avant son étude (objet d'ignorance et de questionnement), pendant son étude (référent et contrôle), et demeure après son étude (objet de connivence, lieu d'investissement des savoirs et de nouveaux questionnements).

Pour modéliser et comprendre le jeu des acteurs dans un atelier de recherche, il faut enrichir le modèle traditionnel de la Didactique, et au triangle « Savoir-Maître-Élève », substituer un tétraèdre.



NB — dans le dispositif MATh.en.JEANS, « Professeur » = « enseignant + chercheur » et « Étudiant » = « élève » alors que dans une recherche experte, « Professeur » ≈ « directeur de recherche » et « Étudiant » = « chercheur »)

2) Une interaction directe entre l' « étudiant » et son « objet d'étude ».

La confrontation entre un sujet « étudiant », qui cherche, et un objet « étudié », qui résiste, conduit à une rencontre effective. La relation sujet-objet qui se noue n'est ni soumise à la médiation du « Professeur », ni assujettie à des savoirs préalablement définis.

3) Une construction de connaissances nouvelles par un jeu de représentations

La recherche est précisément l'activité qui a pour effet, chez un sujet donné, la *transformation des représentations* qu'il se fait d'un problème en vue de le résoudre. Aux représentations initiales qui permettent à l'étudiant d'identifier l'objet de recherche, et d'investir ses premiers questionnements (questions « sources »), se substituent d'autres représentations, supposées plus opérationnelles, qui sous-tendent d'autres questions (questions « cibles »).

Les *connaissances* que se construit celui qui cherche s'appuient sur ces représentations. Elles sont soumises à validation (« expérience » de la preuve) et confrontées aux savoirs (connaissances « légales » et institutionnelles).

<u>Exemples tirés de la situation-recherche «le jeu de Gründy» (voir le document en annexe)</u> :

connaissance « adaptative » : le recours au concept de « type » s'adapte au fait (résistant) que la somme de deux situations de jeu gagnantes n'est ni toujours perdante ni toujours gagnante.

connaissance « de contrôle » : la définition, indirecte, de la relation « S et S' sont de même type » entre situations de jeu par la propriété « S+S' est perdante ».

connaissance « de validation » : application (fréquente) du principe de simplification d'une situation de jeu par suppression d'une situation perdante.

4) Un recours nécessaire à une démarche expérimentale

Une dimension « empirique » de la recherche apparaît déjà dans les phases exploratoires (conceptions d'enquêtes, collecte de faits, formulation de conjectures, ...). La soumission, nécessaire, des énoncés et modèles à *l'expérience de la preuve* confère à la recherche mathématique une véritable dimension expérimentale (bien que le lien *ex*périmental soit ici de nature interne).

5) Production d'une œuvre

Les résultats de recherche (de toute nature, essais, erreurs, exemples, contre-exemples, conjectures et nouveaux problèmes, hypothèses, « îlots déductifs », conclusions, modèles, spécialisations, généralisations, démonstrations, ...) s'organisent peu à peu en « *théories locales* » (= relative à un objet particulier). Ces « organisations mathématiques locales », mises en conformité avec les critères mathématiques usuels en matière de preuve, peuvent être transmis à une communauté plus large.

Situations-recherche : connaissances et apprentissages

A la différence des situations « didactiques », où les objectifs d'apprentissage sont connus à l'avance, les situations-recherche sont, par nature, « imprédictibles » : elles mettent en scène des connaissances « locales », non désignables à l'avance et dont l'apprentissage (sous forme de savoirs*, donc) restera occasionnel.*
En revanche, toute situation-recherche offrira un terrain particulièrement favorable pour l'apprentissage de savoirs « transversaux », communs à de nombreuses situations :

- nature des mathématiques (possible/impossible ; conventions/obligations ; modèle/réalité)

- nature des savoirs mathématiques (qui apparaissent comme des « construits » et non comme des « arbitraires »)

- savoirs démonstratifs (rôle et nature des preuves, notion de démonstration, outils de raisonnement : définitions, induction, contradiction, exhaustion des cas, quantificateurs, ...)

La connaissance scientifique émergeant des situations-recherche n'a-t-elle pas finalement tous les traits de celle à laquelle invitait récemment Michel Serres (in Rameaux, *éd. Le Pommier, 2004, 240 p.) : une connaissance «* approchée, inquiète, ignorante et naïve, obéissante à l'expérience, courant au voisinage de l'erreur, toujours à l'épreuve, changeante et patiente, légère et mobile, perdue souvent, toujours éperdue, passionnée jusqu'à la folie, résignée à des intuitions étrangères et à ne jamais savourer de victoire. » *?*

MATh en JEANS vécue à partir d'un exemple de sujet issu de la robotique.

On veut faire faire un demi-tour à une voiture en utilisant le minimum de surface possible.
Autre version : De combien doit-on creuser une montagne pour que la voiture puisse faire demi-tour ?

Trois conseils :

— Savoir ce qu'on cherche

— Faire un problème à la fois

— Voir si le problème n'a pas des frontières ou des limites (cas particuliers du carré, du segment : est-ce plus facile ?)

Trois situations possibles lors du 1er séminaire :

— Blocage : le rôle de l'accompagnateur est de repérer et valoriser le travail effectué. Les élèves ne doivent pas avoir peur de leurs résultats ni de leurs erreurs.

— Explosion : Pleins d'idées fusent dans tous les sens. Parfois, il n'y a plus de groupes car chacun cherche son idée. C'est une situation courante. Au final, le problème est souvent évité.

— Bouclage : c'est rarement le cas au 1er séminaire. On se trouve devant un mur, les élèves s'entêtent dans une piste. Ils essaient une piste, n'y arrivent pas, recommencent au point de départ à chaque fois sans enrichissement.

Le professeur doit prendre des notes pour voir où cela coince et s'en rappeler lors des séminaires. Cela est aussi utile lorsque plusieurs sujets sont traités à la fois.

Rôle de l'élève :

— Dévolution du problème (a-t-on le droit.. ?)

— Contrat didactique (sous quel contrat on fonctionne ? formulation)

— Par exemple, le problème du bouchon représenté par un cylindre. Si la hauteur est peu importante, le bouchon flotte dans l'eau dans le sens vertical. Si la hauteur est grande, le bouchon va flotter à l'horizontale. Cela s'apparente plus à un problème de physique. Où sont alors les limites ?

Il appartient au chercheur d'apporter une évaluation à ce qui a été fait.
Il doit avertir les groupes qui partent vers des voies où ils ne possèdent pas les outils nécessaires.

Pour réussir à éviter le blocage, il faut mettre en valeur les recherches des élèves, leur montrer que même si c'est une fausse piste, cela va renseigner sur le problème. Les élèves s'imprègnent ainsi du sujet.

Recherche en atelier n°1 :
On peut changer la forme du rectangle (par exemple un losange, un carré, un segment…).
2 « établissements », 1 professeur et 1 chercheur qui intervient aux « congrès ».

L'établissement 2 a orienté directement le problème lors du 1^er^ séminaire en effectuant un demi-tour autour du centre de symétrie du rectangle et en disant qu'il s'agissait de la surface minimale balayée.

L'autre établissement avait penché pour un côté réaliste avec une voiture et avaient donc envisagés que les cas faisables. Il s'était fixé des contraintes non imposées dans l'énoncé. Plusieurs rotations étaient donc utilisées.

Question posée à la fin du congrès « La surface parcourue par 2 rotations est-elle supérieure à la surface parcourue par la composée des deux ? ».

Recherche en atelier n°2 :

Recherche de contre-exemples à la conjecture précédente. La classe 1 pensait avoir trouver un contre-exemple avec le cas où le rectangles était un segment en faisant un quart de tour autour d'une extrémité puis un quart de tour autour du milieu du segment obtenu.

La surface balayée est de $\frac{5 \pi l^2}{16}$ où l est la longueur du segment.

La surface obtenue avec la composée des deux rotations n'a été trouvée (elle l'avait été mais il y avait une erreur dans les rotations). A priori la surface serait plus petite mais cela reste à calculer.

Démonstration non faite.

Ce problème a été posé en 1904 avec un segment. Il a fallu attendre 20 ans pour le résoudre. Le problème avec le rectangle n'a toujours pas été résolu (20 à 30 chercheurs dans le monde s'y intéressent actuellement).

<u>Que sont les résultats ?</u>

— Un nouveau problème

— Des contre-exemples

— Des exemples

— Une conjecture

Il faut se poser des questions : avec une banane, le pivot ne sera pas la bonne solution, cela est dû à la forme « arrondie » de l’objet.

Qu’est-ce qui fait alors que le pivot pour le rectangle serait le meilleur ? Quelles propriétés du rectangle pourraient le justifier ?

<u>Quels sont les apprentissages ?</u>

— Scientificité

— Preuve

— Savoir chercher

— Formulation

<u>Quels sont les types d’évaluation possible ?</u>

— Ecrire un article

— Faire une exposition d’affiches…

<u>Dispositif habituel :</u> 2 heures par semaine
Il faut chercher des subventions auprès du conseil général… L’association Maths en Jeans a des fonds éventuellement pour les transports aux congrès. Prendre contact avant la fin de l’année scolaire pour l’année qui suit.
On peut demander un atelier scientifique « Maths en Jeans » pour obtenir des subventions.

« <u>Tétraèdre didactique</u> » :
La recherche est une relation directe entre les élèves et l’objet. Cela change par rapport à ce qu’il se passe dans la classe.
La mission du professeur est une relation directe entre élèves et savoir.
C’est la différence profonde entre recherche et enseignement, d’où la nécessité d’un chercheur pour un travail de recherche.
Chercher un exercice d’application directe du cours est différent de chercher dans une situation de recherche.

<u>Réussite d’une recherche :</u>

La situation de recherche doit exister. On doit en avoir une représentation qui se modifie jusqu’à ce qu’il y en ait une qui se rapproche d’un savoir mathématique.

Présentation d'un sujet (en «atelier suicide») : Les cartes Terre-lune.

Compte-rendu de la simulation du mardi après-midi : à cette occasion, l'un d'entre nous a joué le rôle du professeur, mais pas d'intervention du chercheur pendant cette expérience.

Informations sur le sujet. (transmises oralement par Pierre Duchet au professeur volontaire pour une présentation du sujet aux autres participants).

On souhaite colorer les territoires figurant sur deux cartes, l'une terrestre, l'autre lunaire, de manière à ce que :

1) deux territoires ayant une frontière commune reçoivent des couleurs différentes.

2) les territoires appartenant à un même pays reçoivent la même couleur.

Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires ?

Remarques. Ce problème est ouvert, même dans le cas où chaque pays terrestre est d'un seul tenant et ne possède qu'une colonie sur la Lune. Cette version «Terre-Lune» est une variante du «problème des m-pires» où il s'agit de colorer les territoires d'une carte plane sous l'hypothèse que chaque «empire» est formé de m morceaux au plus (pour m=1 , on retrouve le problème des 4 couleurs.)
voir par exemple Frederickson, G. N. *Hinged Dissections: Swinging & Twisting*. New York: Cambridge University Press, 2002.

Le « professeur » invite ses collègues à se répartir en deux groupes de quatre et explique (trop ?) brièvement ce que nous allons faire puis donne le sujet :

Nous avons deux planètes, par exemple la Terre et Mars ; les états terriens ont des colonies sur Mars, en nombre fini ; combien faut-il de couleurs différentes pour colorier les cartes de la Terre et Mars de façon que deux pays qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes et qu'en outre une métropole et ses colonies aient la même couleur ?

Immédiatement, les questions fusent :

« Les territoires sont-ils connexes ? » Oui.

« Deux territoires dont les frontières ont un seul point en commun doivent-ils être coloriés dans des couleurs différentes ? » Non (sinon, pensons à un disque partagé en n secteurs : il faudrait n couleurs) .

« Est-ce que l'on colorie les mers ? » Non.

« La carte est-elle plane ou sphérique ? » léger embarras du professeur qui ne voit pas tout de suite que c'est exactement le même problème (du moins tant que l'on ne considère pas de territoire réduit à un point !) ; nous décidons que les cartes sont planes afin de pouvoir démarrer.

« Mais n'est-ce pas le théorème des quatre couleurs ? » le théorème est rappelé : il suffit de quatre couleurs pour colorier une carte de façon que deux pays qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes (sur une surface plane ou sphérique, mais pas sur le tore où il faut sept couleurs). Ce théorème peut donc être utilisé ici.

Le « professeur » comprenant qu'il est urgent que les groupes se mettent au travail s'isole un moment dans un coin de la salle ; d'après les observateurs, il s'est écoulé 12 minutes à cet instant. La nécessité d'un séminaire n'avait pas été assez clairement explicitée au début de la séance pour les collègues qui sont extérieurs à notre groupe ; au bout de 35 à 40 minutes, le professeur annonce aux deux groupes qu'il va être temps de présenter les pistes de départ et les résultats déjà obtenus ; cet échange est positif. (Des exemples sont dessinés dont un comportant une carte où cinq couleurs sont nécessaires, un groupe a déjà envisagé de considérer des îles qui vont être morcelées en deux, puis trois, s'il y a n pays est-ce que n-1 couleurs suffisent ?…) Il ne reste plus que 5 minutes avant la fin de la simulation ; le professeur ne se sent pas le droit ou la compétence pour donner des instructions pour la poursuite du travail ; c'est là précisément **qu'est particulièrement mis en évidence le rôle du chercheur qui doit, à la fin de chaque séminaire, effectuer une synthèse et dégager des pistes à explorer afin de poursuivre le travail.**

Lors de la discussion qui suit nous prenons bien conscience de deux choses :

1) Le professeur ne doit pas intervenir mais il faut qu'il consigne ses observations en vue du séminaire suivant.

2) Le sujet doit être remis aux élèves par le chercheur lui-même qui les quitte aussitôt après pour ne revenir qu'aux séminaires ; les élèves doivent démarrer seuls, encouragés éventuellement par leur professeur.

Simulation de la situation de recherche

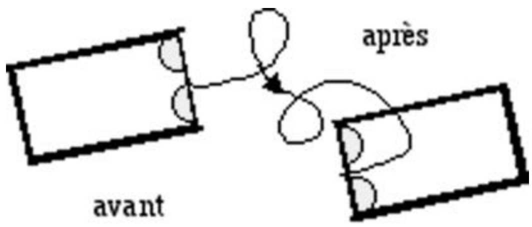
Proposition du sujet par le chercheur : Problème du demi-tour
- Comment faire un demi-tour en utilisant le minimum de place ?
- Quelle excavation minimale doit-on effectuer pour pouvoir faire un demi-tour sur une route de montagne ?

Sujet de recherche posé par Pierre Duchet : le demi-tour

Thème. ***Faire faire demi-tour à une voiture dans le moins d'espace possible.***

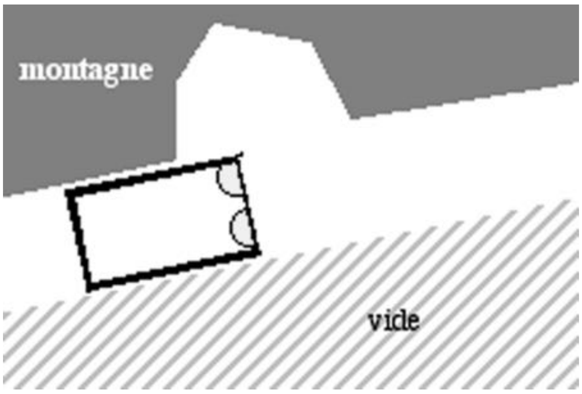
Une voiture est modélisée par un simple rectangle, orienté (de manière à distinguer l'avant et l'arrière). On désire déplacer ce rectangle de manière à lui faire effectuer un demi-tour : après le mouvement on retrouvera le rectangle dans la même direction générale mais tête-bêche.
Tous les types de mouvements sont permis (même ceux qui du point de vue pratique ne sont pas réalistes).

Quel est la plus petite aire qui permette de réaliser un tel demi-tour ?



Variante : ***le demi-tour sur une route de montagne.***

Une route étroite bordée d'un coté par la montagne, de l'autre par le précipice. *Comment creuser la montagne le moins possible pour pouvoir faire demi-tour ?* (ou, ce qui revient au même, quelle aire minimale aurait une plateforme construite au dessus du vide et permettant le demi-tour ?)



Autre variante (non soumise à l'université d'été)
On cherchera seulement les surfaces *convexes* permettant le demi-tour (suivant ainsi un des principes classiques de la recherche mathématique : “ on cherche là où c'est éclairé ” — autrement dit, lorsqu'un problème s'avère trop résistant, on en résout un autre, plus abordable!).

A quoi ça sert ?
Le problème du demi-tour des rectangles est ouvert ; le cas d'un segment (rectangle de largeur nulle), posé par Kakeya en 1917, fut solutionné par Besicovitch en 1928.
Ce genre de question apparaît, sous diverses formes, en robotique (cf. les exemples fameux du problème du *déménageur de piano,* et du problème du *créneau*). Comme nous l'a indiqué Martin Andler, des résultats récents de «*Géométrie sous-riemanienne*» garantissent l'existence de manœuvres pratiques (réalisables par une vraie voiture) permettant le demi-tour à l'intérieur d'une surface solution.

Bibliographie (sur le problème de «l'aiguille de Kakeya»)
http://www.prepas-victorhugo.com/math-p/pcsi1/General/paradoxes/kakeya.htm (Lycée V. Hugo de Caen).
Besicovitch, A. S. «On Kakeya's Problem and a Similar One.» *Math. Z.* **27**, 312-320, 1928.
Besicovitch, A. S. «The Kakeya Problem.» *Amer. Math. Monthly* **70**, 697-706, 1963.
Cunningham, F. Jr. and Schoenberg, I. J. «On the Kakeya Constant.» *Canad. J. Math.* **17**, 946-956, 1965.
Wells, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. London: Penguin, 1991, pp. 128-129.
Traduction française : *Le dictionnaire Penguin des curiosités géométriques*, Ed; Eyrolles, 1996, pp. 117-118.

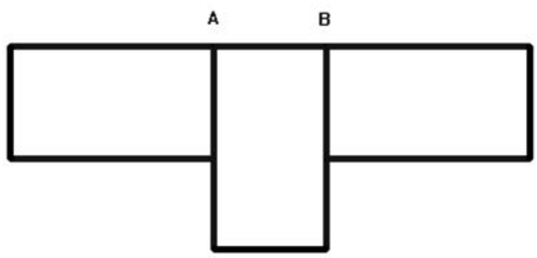
Deux équipes, représentant deux établissements travaillent séparément sur le sujet.

Au départ, chacun a suivi son idée ; la compréhension du problème n'était pas la même pour tous ; nous avons surtout pensé aux manœuvres d'une voiture ; nous nous sommes interrogés sur le rayon de braquage et sa définition (pour le constructeur automobile) ; nous avons mimé les manœuvres d'une voiture sur la table en utilisant un bloc-notes, envisagé de nombreux petits mouvements de faible amplitude, les mouvements d'un train sur ses rails. Puis le premier séminaire a permis au chercheur de recentrer notre travail ; nous avons opéré une première simplification consistant à ne plus considérer que les mouvements dans un plan d'un rectangle qui représente la voiture.

Après environ 1/2 heure de recherche les deux équipes proposent les résultats de leur recherche à l'occasion d'un premier séminaire.

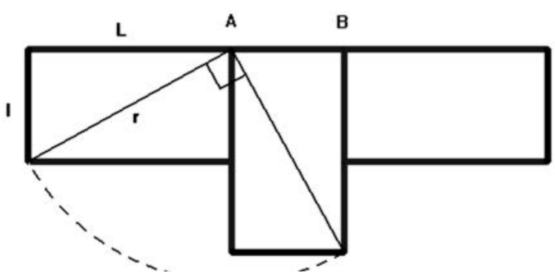
Premier séminaire

Equipe n°1

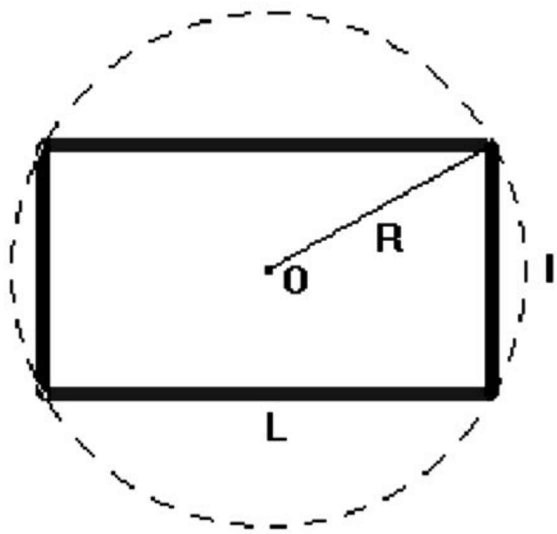


Quelle proposition balaye le moins de surface ?

Soit A l'aire balayée



Equipe n°2



Soit B l'aire balayée

$A > \frac{1}{4}$ aire du disque de rayon r

$A > \frac{1}{4}\pi \times \left(L^2 + l^2\right)$

$B = \pi \times \left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\pi \times \left(L^2 + l^2\right)$

$$A > B$$

Questions suscitées par la première confrontation d'idées :

- Pourquoi utiliser deux rotations plutôt qu'une symétrie centrale ?

- La surface balayée par la succession de deux rotations est-elle la même que celle balayée en effectuant la rotation résultant de la composée ?

- La solution de l'équipe n°1 utilise l'emplacement de trois voitures, celle de l'équipe n°2 l'emplacement d'une voiture et d'une surface « résiduelle », qu'en est-il de cette surface résiduelle ?

Intervention du chercheur à l'issue du premier séminaire pour orienter chacune des deux équipes vers un axe de recherche émergeant des questions.

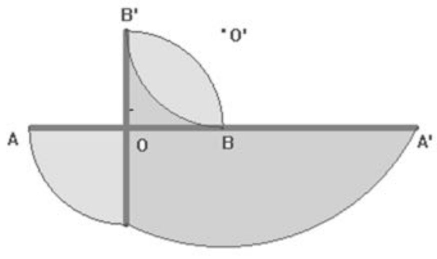
L'équipe n°1 « part » du séminaire avec la question suivante : « La surface balayée par un segment effectuant successivement deux rotations est-elle plus grande que celle balayée par ce segment effectuant la rotation résultant de la composée des deux précédentes rotations ? »

L'équipe n°2 travaillera sur la question suivante : « Pour quelles valeurs de l et L, largeur et longueur de la voiture, a-t-on l'aire de la surface résiduelle inférieure ou égale à l' aire de la voiture ? »

Deuxième séminaire

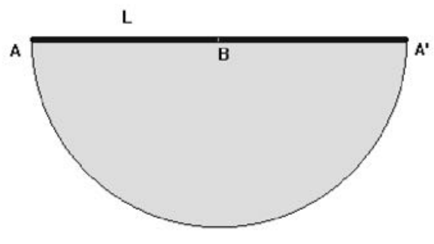
Equipe n°1

Un contre-exemple



Aire balayée après une succession de deux quarts de tour :

$A_1 = \left(\frac{7\pi}{16} - \frac{1}{4}\right)L^2$



Aire balayée après une symétrie centrale de centre B :

$A_2 = \frac{1}{2}\pi \times L^2$

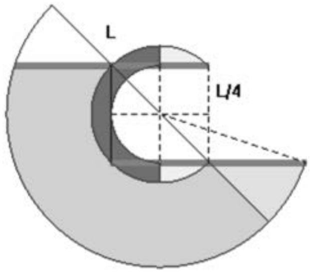
$$A_2 > A_1$$

Dans ce contre-exemple, l'aire balayée en effectuant une symétrie centrale est plus grande que l'aire balayée en effectuant les deux quarts de tour aboutissant à cette symétrie centrale.

Un exemple

Aire balayée après une succession de deux quarts de tour :

$$A_1 = \frac{1}{4}\pi \times L^2 + \frac{1}{4}\pi \times \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{5\,\pi \times L^2}{16}$$



Aire balayée après la symétrie centrale correspondante :

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi \times \left(\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\,L}{4}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{L}{4}\right)^2 + 2 \times \varepsilon$$

avec $\varepsilon > 0$

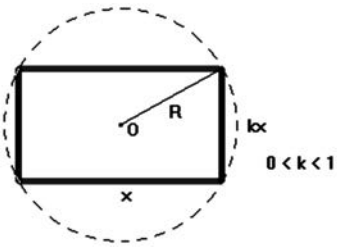
$$A_2 = \frac{1}{2}\pi \times \frac{9}{16} L^2 + 2 \times \varepsilon$$

$$2 \times \varepsilon = \frac{1}{4}\pi \times \left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} L^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$$

$$A_2 = \frac{5}{16} \times \pi \times L^2 - \frac{1}{16} L^2 = A_1 - \frac{1}{16} L^2$$

Dans cet exemple, l'aire balayée en effectuant une symétrie centrale est plus petite que l'aire balayée en effectuant les deux quarts de tour aboutissant à cette symétrie centrale.

Equipe n°2



Aire balayée par la voiture : $A = \pi\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{kx}{2}\right)^2\right)$.

Comparons A et le double de l'aire de la voiture : pour quelles valeurs de k, A est-elle inférieure au double de l'aire de la voiture ?

Posons $f(x) = 2 \times x \times kx - A = x^2\left(2k - \frac{\pi}{4}\left(1 + k^2\right)\right)$

Posons $P(k) = 2k - \frac{\pi}{4}\left(1 + k^2\right)$. On étudie son signe en fonction de k. $\Delta = \frac{16 - \pi^2}{4} > 0$.

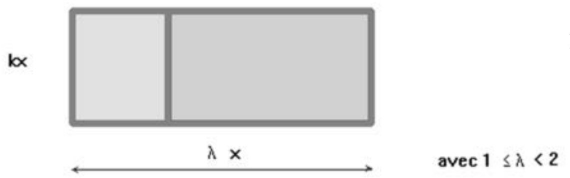
Deux racines k_1 et k_2 : $k_1 = \frac{4 - \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi} \approx 0{,}485$

$$k_2 = \frac{4 + \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi} \approx 2{,}061$$

Pour tout $k \in [\ k_1 ;\ 1]$, $P(k) \geq 0$ et par conséquent pour tout $x \ \in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geq 0$. Lorsque le rapport entre la largeur et la longueur de la voiture est compris entre $k_1$et 1, la surface balayée par la voiture en pivotant autour de son centre de gravité est inférieure ou égale à deux emplacements de voiture.

Conclusion : La solution pivot est dans ce cas là meilleure que toute solution où la position initiale et la position finale de la voiture ne se chevauchent pas.

Etudions maintenant $f_\lambda(x) = \lambda \times x \times kx - A$ avec $1 \leq \lambda < 2$.



$$f(x) = x^2 \left(\lambda k - \frac{\pi}{4}\left(1 + k^2\right)\right)$$

Posons $P_\lambda(k) = \lambda k - \frac{\pi}{4}\left(1 + k^2\right)$. On étudie son signe en fonction de k. $\Delta = \frac{4\lambda^2 - \pi^2}{4}$.

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - \pi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \lambda < 2$

Deux racines k_1 et k_2 : $k_1 = \frac{2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 - \pi^2}}{\pi}$

$$k_2 = \frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 - \pi^2}}{\pi}$$

On remarque que k_1 et k_2 sont positifs et inverses l'un de l'autre donc l'un des deux est élément de $]0\ ;1]$ ici k_1 . Donc pour tout $k \in [\ k_1 ;\ 1]$, $P_\lambda(k) \geq 0$ et par conséquent pour tout $x \ \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, $f_\lambda(x) \geq 0$. Lorsque le rapport entre la largeur et la longueur de la voiture est compris entre $k_1$et 1, la surface balayée par la voiture en pivotant autour de son centre de gravité est inférieure ou égale à λ emplacements de voiture, où $\frac{\pi}{2} \leq \lambda < 2$.

Conclusion : Pour $\frac{\pi}{2} \leq \lambda < 2$, on peut trouver des valeurs de k telles que la solution pivot soit meilleure que toute solution effectuant le chevauchement donné par la valeur de λ.

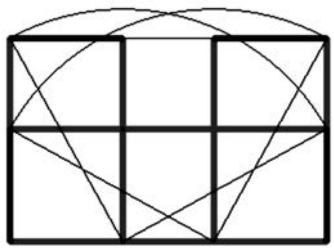
Questions suscitées par la deuxième confrontation d'idées :

- Qu'est-ce qu'un demi-tour ? ? ? ?

- Mais au fait quelle était la question ?

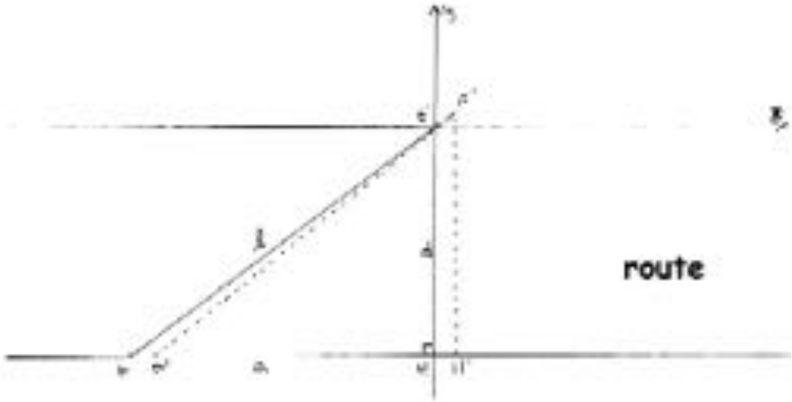
Chaque équipe repart pour quelques minutes de recherche. En vrac :

- Voiture qui pivote et recule en évitant le ravin



- Modélisation de la voiture par un segment, plus concrètement par une aiguille qui s'attaque à la paroi rocheuse pour effectuer l'excavation. Au cours de cette dernière étape, nous avons été amenés à opérer une nouvelle simplification provisoire qui est de taille ; nous avons considéré le cas extrême d'un rectangle de largeur nulle ; alors le problème revient en quelque sorte à étudier les mouvement d'une aiguille dans un plan.

Cela a permis d'avancer et d'explorer une solution pour l'aire minimale de l'excavation qu'il faut creuser pour que l'aiguille puisse faire demi-tour (tout en restant sur la chaussée) voici une première idée ; l'aiguille est représentée par un segment [EF], le point F restant en contact avec le bord de la route opposé à l'excavation que l'on va creuser en faisant avancer l'aiguille d'un pas p suivant la direction FE, puis en ramenant F sur le bord de la route et en réitérant le procédé ; la méthode d'Euler s'applique et cela peut faire une activité pour des élèves de première S ; sinon, on peut dire que l'on recherche une courbe dont la tangente en chaque point M coupe la droite d'équation y = -d en un point P tel que PM garde une longueur constante.



Indiquons les calculs : Initialement le point E est sur le bord de la route représentée ici par une bande rectiligne de largeur d ; nous prenons un repère d'origine le point E dont les axes sont respectivement parallèle et perpendiculaires à la route .l'aiguille a une longueur l mais il est plus simple de poser $l = \sqrt{a^2 + d^2}$; ainsi l'aiguille est représentée par l'hypoténuse du triangle rectangle EFH où H est la projection de E sur le bord opposé de la route; nous supposons maintenant que l'abscisse de E augmente de h ; son ordonnée augmente de $\frac{d}{a}h$; le point E est en $E'\left(h, \frac{d}{a}h\right)$, le point F est venu en F' et H en H'.

Calculons maintenant F'H' :

$$l^2 = a^2 + d^2 = F'H'^2 + H'E'^2 = F'H'^2 + \left(d + \frac{d}{a}h\right)^2$$

$$a^2 + d^2 = F'H'^2 + d^2 + 2\frac{d^2}{a}h + \frac{d^2}{a^2}h^2$$

$$a^2 + d^2 - d^2 - 2\frac{d^2}{a}h - \frac{d^2}{a^2}h^2 = F'H'^2$$

$$a^2 - 2\frac{d^2}{a}h - \frac{d^2}{a^2}h^2 = F'H'^2$$

$$\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}h - \frac{d^2}{a^2}h^2} = F'H'$$

Nous allons désigner par f la fonction dont le graphe, pour x positif, représente le bord de notre excavation ; nous supposons que l'aiguille reste en chaque point tangente à cette courbe ; nous en déduisons que le coefficient directeur de la tangente en E' est

$$\frac{E'H'}{F'H'} = \frac{d + \frac{d}{a}h}{\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}h - \frac{d^2}{a^2}h^2}}$$

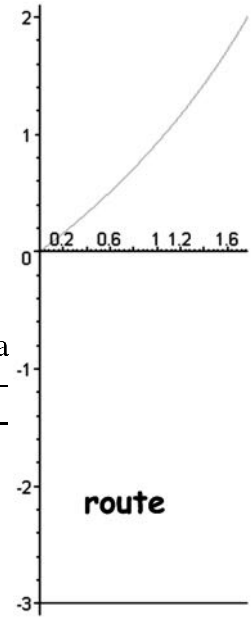
Nous avons ainsi formé une équation différentielle dont la résolution nous réserve une bonne surprise puisqu'elle se résume à :

$$f'(h) = \frac{d + \frac{d}{a}h}{\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}h - \frac{d^2}{a^2}h^2}} = \frac{\left(-\frac{a}{2d}\right)\left(-\frac{2d^2}{a^2}h - 2\frac{d^2}{a}\right)}{\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}h - \frac{d^2}{a^2}h^2}} = \frac{\left(-\frac{a}{2d}\right)u'}{\sqrt{u}} = \left(-\frac{a}{d}\right)\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

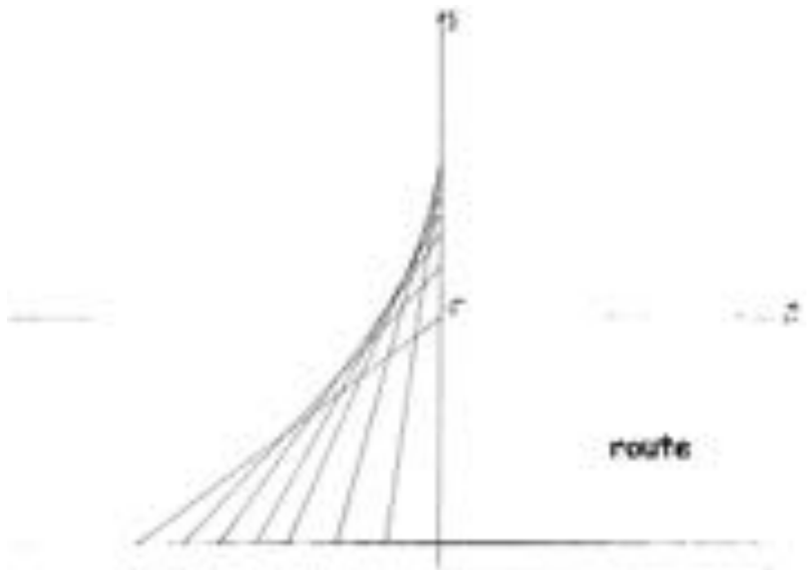
La fonction f est donc définie par : $f(h) = \left(-\frac{a}{d}\right)\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}h - \frac{d^2}{a^2}h^2} + K$ et comme, par le choix de notre origine, $f(0) = 0$,
alors :

$$f(h) = \left(-\frac{a}{d}\right)\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}h - \frac{d^2}{a^2}h^2}$$

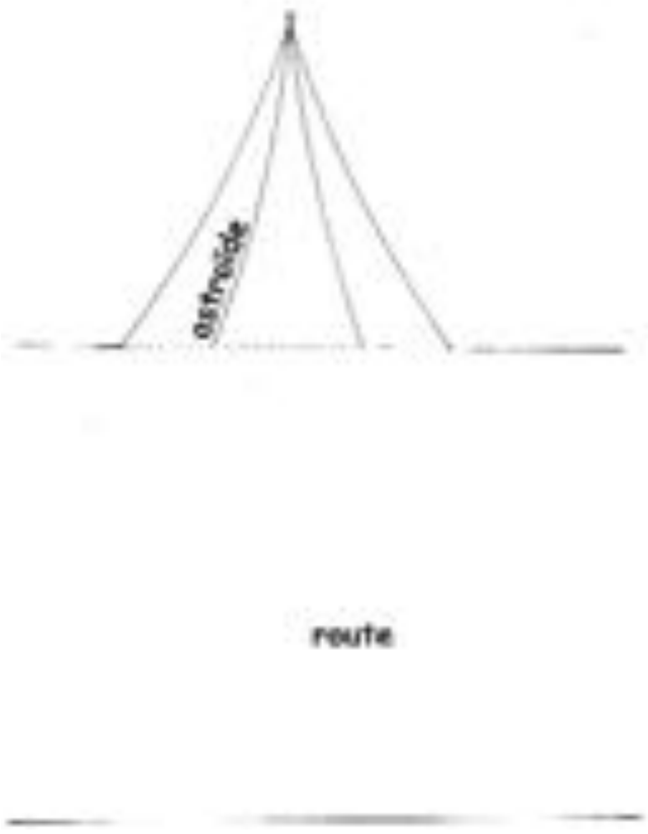
Voici une représentation de f en prenant a = 4 et d = 3



On s'arrête lorsque l'aiguille est perpendiculaire à la route ; il n'y a plus qu'à compléter par symétrie par rapport à l'aiguille pour avoir la forme de l'excavation ; est-ce un minimum ?



Cette idée en fait surgir une deuxième au sein du groupe : faisons glisser l'aiguille initialement en position EF de façon que F ne quitte pas le bord de la route et que H reste fixe ; nous retrouvons un problème bien connu : celui de l'échelle qui glisse le long d'un mur, sa base restant en contact avec le plancher. La courbe obtenue, enveloppe des diverses positions de l'aiguille EF est un arc d'astroïde (ou hypocycloïde à quatre rebroussements : voir par exemple la revue du Palais de la découverte, n° spécial 45 de décembre 1995 co-diffusé par l'APMEP). Il reste à comparer les aires des deux surfaces obtenues suivant la longueur de l'aiguille et la largeur de la route. Dans l'exemple précédent (a = 4, d = 3) voici la forme des deux excavations obtenues, où l'on voit nettement que la deuxième idée est meilleure.



Remarque sur le travail de ces deux premières matinées : **la forme de travail adoptée a permis d'assurer rapidement la cohésion de notre groupe.**

Conclusions auxquelles nous sommes parvenus :

Une communauté scientifique se met en place lors des séminaires et du congrès (qui valident les résultats).

Il peut être utile, dans une recherche, de déterminer le problème le plus difficile que l'on sait résoudre et le problème le plus facile que l'on ne sait pas résoudre (à condition que l'on puisse hiérarchiser les problèmes).

Si l'idée que se fait un groupe du problème ne bouge pas, la recherche ne marche pas ; on continue la recherche jusqu'à obtenir une représentation qui constitue un savoir (on socialise la connaissance que l'on a acquise).

Le professeur est utile au moment d'établir et démontrer les théorèmes ou pour reconnaître le statut de ce que les élèves disent (est-ce une hypothèse, un théorème, ... ?)

Epilogue….

Il est clair que la pratique développée en ateliers nous a permis une exploration totale de la structure de M.E.J., depuis la mise en place et ses formalités administratives jusqu'au congrès.

Dans un premier temps, nous avons tenu les rôle d'élèves et avons découvert différentes phases :

— le blocage : il était parfois difficile de sortir de nos pratiques quotidiennes. Le problème se compliquait inutilement : conduite d'un vrai véhicule, notion mal connue de rayon de braquage, etc….

— la mini-explosion : relancés par le séminaire, nos esprits surchauffés inventaient toutes sortes de solutions de demi-tour…

— le découragement : devant tant d'idées, quelle voie poursuivre ? Nous y perdions nos habituels repères d'enseignants, telles la simplification du problème, l'analyse correcte du sujet, l'examen des cas particuliers, comme le carré par exemple .

— le soulagement : il nous fallait comprendre que ce problème était en recherche, non résolu encore, et qu'ainsi la confusion apparue était fort normale.

— l'obsession : donner un tel énoncé présente un danger, celui d'envahir les esprits, les conversations et tout le temps libre…

En serait-il de même pour certains élèves ?

Lors de la troisième matinée d'atelier, nous avons retrouvé notre statut d'enseignant pour nous livrer à l'analyse de travaux de lycéens portant sur le « Jeu de Gründy », qui oppose deux joueurs A et B sur la base d'un nombre d'allumettes. A chaque étape de la partie, il faut séparer en deux un des tas d'allumettes formés : le perdant est celui qui se verra contraint de séparer un tas en deux tas égaux. L'activité consistait en la recherche des nombres initiaux d'allumettes qui assuraient la victoire au premier joueur, quelle que soit la stratégie employée. La lecture de cette dizaine de pages nous a montré la puissance mathématique d'une pratique MeJ.

Pour étudier ce jeu, les adolescents ont du se livrer à une classification des situations rencontrées ; aucune connaissance mathématiques n'était requise pour se livrer à ce travail, n'importe quel jeune pouvait se passionner pour ce jeu et en venir aux conclusions exposées dans ce rapport.

Mais , et c'est là que ce type d'activité parait excellent ! Notre œil averti et nos connaissances en mathématiques(petites) de supérieur ont fait apparaître des notions surprenantes : relation d'équivalence, passage au quotient, travail de construction d'une opération sur les classes d'équivalence, quasi structure de groupe……..et construction d'une fonction, que seul le chercheur avait repérée dans ce travail !

Ce simple constat, tout à fait imprévisible au départ de leur travail, a suffit à nous persuader de la puissance de ce type d'activité.

Et, de plus, l'aspect « jeu » a permis à ces lycéens une prestation vivante et intéressante lors du congrès MeJ.

Félicitations aux concepteurs de ce projet, qui réellement permet de faire des mathématiques vivantes, dans tous les sens de cet adjectif !

L'ensemble des professeurs, conquis et convertis…

Annexe 1 *Étude d'un texte d'élèves : Le jeu de Gründy*

Texte final : Le jeu de Gründy, par Rakibe GUNDAG, Nathalie KALKA, Ludovic NOBLET, Amélie SERVOL (lycée R. Rolland d'Argenteuil,1998-99).*Comptes Rendus MATh.en.JEANS* n°99-03, http://www.mathenjeans.free.fr

Extraits du manuscrit des élèves (les passages entre crochets sont de nous)

(A) SUJET DE RECHERCHE

[Au départ un ou plusieurs tas d'allumettes. A chaque tour de jeu, un des tas est partagé en deux tas inégaux. Le dernier à pouvoir jouer gagne. Une classification des diverses situations en "types" permet, du moins en théorie, de jouer le mieux possible...]

[...] Nous avons cherché à savoir si certaines situations permettaient au premier joueur de gagner systématiquement (ce qui serait logique car il influence le jeu en premier) et si certaines situations permettaient, au contraire, au second joueur de gagner.

Nous supposons que les deux joueurs utilisent toujours la bonne stratégie (qui est à préciser d'ailleurs) c'est-à-dire qu'aucun des deux joueurs ne jouera volontairement une situation qui l'amènerait à perdre s'il peut faire autrement. Ainsi lorsqu'un joueur perdra, c'est qu'il n'aura pas de choix possibles l'amenant à gagner.

Exemple. [Les deux joueurs sont appelés **A** et **B**, **A** étant celui qui commence]:

7 →**A** 4 + 3→**B** 4 + 2 + 1→**A** 3 + 1 + 2 + 1 → **B** 2 + 1 + 1 + 2 + 1 , le joueur **B** gagne.

Ainsi le joueur **A** ne va pas jouer 4 + 3 au départ mais :

7 →**A** 5 + 2 →**B** 3 + 2 + 2 →**A** 2 + 1 + 2 + 2 , le joueur **A** gagne.

Mais le joueur **B** peut s'y prendre autrement (ce qu'il fait, donc)

7 →**A** 5 + 2 →**B** 4 + 1 + 2 →**A** 3 + 1 + 1 + 2 →**B** 2 + 1 + 1 + 1 + 2 , ce qui lui permet de gagner.

Premières constatations :

- Un tas de 1 allumette ne peut être recoupé car il ne se partage pas
- Un tas de 2 allumettes ne peut être recoupé car il ne se partage pas en deux tas inégaux.

De ce fait, dans la suite, nous ne tiendrons plus compte de ces deux nombres dans les décompositions.

[On appelle ***décomposition d'une situation***, toute situation qui peut lui succéder suivant les règles du jeu.]

Avec cette remarque, le dernier exemple de partie devient :

7 →**A** 5 →**B** 4 →**A** 3 →**B** 2 (plus facile à lire).

On notera aussi 5 + 2 ⇔ 5. (Le symbole ⇔ ne correspond pas à un tour de jeu mais à une simplification.)

(B) METHODE EMPLOYEE

1°) Définitions

On a décidé d'appeler ***situation perdante***, une situation où le joueur qui commence à jouer est sûr de perdre et de même ***situation gagnante***, une situation où celui qui commence à jouer est sûr de gagner. En fait, on se réfère au [...] joueur [qui a le trait] pour savoir si une situation est gagnante ou perdante.

Exemple : Traitons les cas de 4 et de 5

4 →**A** 3 →**B** 2 : le joueur **B** est gagnant, cependant, le joueur **A** n'a pas d'autre choix possible.

• Ainsi, 4 est une situation perdante .

5 →**A** 3 →**B** 2 le joueur **B** gagne mais le joueur **A** a une autre possibilité :

5 →**A** 4 →**B** 3 →**A** 2 : et il gagne .

• En offrant le 4 (perdant) , le joueur **A** est sûr de gagner. Ainsi, le 5 est gagnant.

• D'après l'exemple du (A) vous pouvez remarquer que 7 est perdant.

Nous constatons aussi, avec ces exemples, et particulièrement celui de 5, que donner une situation perdante à son adversaire est une stratégie. D'où une plus grande nécessité de connaître la liste (une liste) des perdants et des gagnants. Pour la construire, en décomposant tour à tour les nombres les uns après les autres, nous avons utilisé la propriété inhérente à notre définition de perdant et de gagnant suivante (à méditer):

Pour qu'une situation soit perdante, il faut que toutes ses décompositions possibles soient gagnantes. Pour qu'une situation soit gagnante, il suffit qu'une seule de ses décomposition soit perdante.

2°) Suppression de certains tas

- **Les perdants** Nous avons déjà vu que nous pouvions supprimer les tas de 1 ou de 2 allumettes. En fait nous pouvons supprimer toutes les situations perdantes car lorsqu'on commence à jouer une situation perdante, notre adversaire a toujours quelque chose à faire après nous (c'est d'ailleurs pour cela que l'on perd ! ! !). Ou encore, une situation perdante sera réglée en un nombre pair de coups.
  Exemple : 4→3→2 et 4 + 3→3 +1+ 3→2 + 1 + 1 + 3 ⇔ 3 c'est toujours au même joueur de jouer.
  Ainsi 4 + 3⇔3 et le 4 a été supprimé.
- **Les doubles** Un double est une situation où il y a deux tas ayant le même nombre d'allumettes. Un double peut être supprimé car c'est une situation perdante. En effet, notre adversaire aura toujours le moyen de copier ce que l'on vient de faire.
  Exemples : 4 + 4 →**A** 3 + 4 →**B** 3 + 3 →**A** 2 + 3 →**B** 2 + 2 le joueur **B** gagne
  5 + 5 →**A** 4 + 5 →**B** 4 + 4 ou 5 + 5 →**A** 3 + 5 →**B** 3 + 3 le joueur **B** gagne.

3°) Tableau des situations initiales gagnantes et perdantes

[...] Construit par nos soins jusqu'à 27 et complété jusqu'à 50 grâce à J.H Conway (On numbers and games)

situations perdantes	0	1	2	4	7	10	20	23	26	50
Situations gagnantes	3	5	6	8	9	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	21	22	24	25	27 à 49	

(C) SITUATIONS DE MEME TYPE

1°) Différents cas

En partant du couplage des situations gagnantes et perdantes, les cas possibles sont :

Perdant et perdant noté P + P , ex : 7 + 4
Perdant et gagnant noté P + G , ex : 4 + 5
Gagnant et gagnant noté G + G , ex : 5 + 3 .

Nous avons cherché à savoir si ces cas étaient des situations gagnantes ou perdantes.

Or : **P + P ⇔P** , par suppression d'un tas perdant (voir (B) 2°)). De même : **P + G ⇔ G**

Par contre, deux gagnants ensemble peuvent créer une situation gagnante ou une situation perdante suivant les cas :

Exemples : G + G ⇔ P : 5 + 5 est une situation perdante puisque c'est un double

Mais G + G ⇔ G : 5 + 3 →3 + 2 + 3 ⇔ 3 + 3 ainsi, 5 + 3 est une situation gagnante
(car , petit rappel, elle se décompose en une situation perdante : 3 + 3).

2°) Cas Gagnant + Gagnant

Nous avons vu qu'il y avait deux cas différents avec Gagnant + Gagnant.

Nous avons décidé d'appeler :

- ***Gagnants de même type*** , deux gagnants qui donnent, ensemble, une situation perdante.
  C'est à dire G + G ⇔ P .
- ***Gagnants de type différents*** , deux gagnants qui donnent, ensemble, une situation gagnante.
  Soit G + G ⇔ G

Exemples : - D'après le 1°), *5 et 3 sont de types différents*

– Voici la liste des décompositions possibles de 6 + 3

6 + 3 → 5 + 3 ⇔ G
→ 4 + 3⇔ 3 ⇔ G
→ 6 + 2 + 1 ⇔ 6 ⇔ G

elles sont toutes gagnantes. Ainsi, 6 + 3 est perdant et *6 et 3 sont de même type*.

3°) Tableau des différents types

Le tableau ci-contre s'est construit au fur et à mesure. Nous vous expliquons sa construction jusqu'au nombre 8, nous l'avions construit jusqu'à 27 et nous vous le donnons jusqu'à 50 grâce à J.H Conway [...], toujours.

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
0	3	5	13	18	41
1	6	8	16	21	44
2	9	11	19	24	47
4	12	14	22	27	
7	15	17	25	33	
10	28	29	30	36	
20	31	32		39	
23	34	35		42	
26	37	38		45	
50	40			48	
	43				
	46				
	49				

- Le type **T0** est le premier rencontré, celui de 0, 1 ou 2, c'est à dire le **type des Perdants**.
- Le nombre 3 est gagnant, il n'est donc pas de type T0, il sera de type **T1**
- 4 étant perdant sera de type T0
- Le nombre 5 est un gagnant de type différent que 3 (voir 2°)), par conséquent, il se trouve dans une autre colonne : **T2**
- Puis 6 est un gagnant de même type que 3 (voir 2°)). Ainsi, il sera dans la même colonne : **T1**
- Le 7 est perdant (voir (A) 1°)) et donc de type T0
- Enfin, le 8 est gagnant (car : 7 + 1 est une décomposition perdante).
  De quel type est il ?
  -Est il du type de 3 ? Décomposons 8 + 3
  8 + 3 → 7 + 3 ⇔ 3 ⇔ G
  8 + 3 → 6 + 3 ⇔ P (car 6 et 3 sont de même type) On trouve une décomposition perdante,
  ainsi 8 + 3 est gagnant et donc 8 et 3 sont de type différents et 8 n'est pas dans la colonne T1.
  -Est il du type de 5 ? Décomposons 8 + 5
  8 + 5 → 7 + 5 ⇔5 ⇔G
  → 6 + 5 ⇔G
  → 5 + 3 + 5 ⇔ 3 ⇔ G
  → 8 + 4 ⇔ 8 ⇔ G
  → 8 + 3 ⇔ G
  Toutes les décompositions étant gagnantes, 8 + 5 est une situation perdante, ainsi 8 et 5 sont de même type et 8 est de type T2. [...]

(D) TRAVAIL SUR LES TYPES

1°) Mélange des types

On peut se demander comment vont réagir des configurations réalisées à partir des différents types.

- On voit très vite pourquoi, par exemple, **T0 + T0 ⇔T0**. En effet, deux perdants ensemble donnent une situation perdante.
  De même, rapidement, on a **T0 + Ti ⇔Ti** puisque l'on peut supprimer tout perdant dans une décomposition .
  D'autre part, et par définition des gagnants de même type, **Ti + Ti ⇔T0** .

Reste à étudier les mélanges un peu moins évidents de types.

- Commençons par **T1 + T2** , on sait (gagnants de types différents) que c'est une situation gagnante, mais de quel type est-elle ?

-De type T1 ? Pour cela, il faudrait que T1 + T2 + T1 ⇔ T0, or, T1 + T2 + T1 ⇔ T2 puisque T1 + T1⇔T0 et que l'on peut le supprimer. Ainsi T1 + T2 n'est pas de type T1.

-De type T2 ? Comme précédemment, T1 + T2 + T2 ⇔ T1 et pas T0 et donc T1 + T2 n'est pas de type T2.

-De type T3 ? Regardons la décomposition d'une situation T1 + T2 + T3, par exemple 3 + 5 + 13 :

3 + 5 + 13 → 5 + 13 ⇔G
→ 3 + 4 + 13 ⇔ 3 + 13 ⇔G
→ 3 + 3 + 13 ⇔13 ⇔G
→ 3 + 5 + 12 ⇔5 ⇔G
→ 3 + 5 + 11 ⇔3 + 5 ⇔G
→ 3 + 5 + 10 + 3 ⇔5 + 10 ⇔5 ⇔G
→ 3 + 5 + 9 + 4 ⇔ 3 + 5 + 9 ⇔5 ⇔G
→ 3 + 5 + 8 + 5 ⇔3 + 8 ⇔G
→ 3 + 5 + 7 + 6 ⇔3 + 5 + 6 ⇔5 ⇔G

Ainsi, 3 + 5 + 13 est une situation perdante et 3 + 5 est du même type que 13, soit **T1 + T2 ⇔T3.**

- De cette règle, on déduit : T1 + T3 + T2 ⇔ T3 + T3 ⇔ T0 . Soit : **T1 + T3 ⇔T2**
- Et de même, **T2 + T3 ⇔ T1**
- **Avec T4** : T1 + T4 est gagnant mais de quel type ?

- Il ne peut pas être de type T1 ni T4 (voir pour T1 + T2 qui n'est ni T1 ni T2).
- Est-il de type T2 ? T1 + T4 + T2 ⇔ T3 + T4 qui n'est pas perdant donc T1 + T4 n'est pas de type T2.
- De même, T1 + T4 n'est pas de type T3.
- Voyons s'il est de type T5 : essayons avec la décomposition de 3 + 18 + 41

3 + 18 + 41 →18 + 41 ⇔G
→3 + 18 + 40 ⇔18 ⇔G
→3 + 18 + 39 ⇔3 ⇔G
→3 + 18 + 38 + 3 ⇔18 + 38 ⇔G
→3 + 18 + 37 + 4 ⇔3 + 18 + 37 ⇔18 ⇔G
→3 + 18 + 36 + 5 ⇔3 + 5 ⇔G
→3 + 18 + 35 + 6 ⇔18 + 35 ⇔G il faut continuer :

3 + 18 + 41 →3 + 18 + 34 + 7 ⇔3 + 18 +34 ⇔18 ⇔G
→3 + 18 + 33 + 8 ⇔ 3 + 8 ⇔G
→3 + 18 + 32 + 9 ⇔18 + 32 ⇔G
→3 + 18 + 31 + 10 ⇔3 + 18 + 31 ⇔18 ⇔G
→3 + 18 + 30 + 11 ⇔18 ⇔G (car 3 + 30 + 11 ⇔T1 + T3 + T2 ⇔T0)
→3 + 18 + 29 + 12 ⇔18 +29 ⇔G
→3 + 18 + 28 + 13 ⇔18 + 13 ⇔G
→3 + 18 + 27 + 14 ⇔3 + 14 ⇔G
→3 + 18 + 26 + 15 ⇔3 + 18 + 15 ⇔18 ⇔G
→3 + 18 + 25 + 16 ⇔3 + 18 ⇔G
→3 + 18 + 24 + 17 ⇔3 + 17 ⇔G
→3 + 18 + 23 + 18 ⇔3 + 23 ⇔3 ⇔G
→3 + 18 + 22 + 19 ⇔3 + 18 ⇔G
→3 + 18 + 21 + 20 ⇔3 + 18 + 21 ⇔3 ⇔G

reste le 18 à décomposer.

3 + 18 + 41 →3 + 41 + 17 ⇔T1 + T2 + 41 ⇔T3 + 41 ⇔G
→3 + 41 + 16 ⇔T1 + T3 + 41 ⇔ T2 + 41 ⇔G
→3 + 41 + 15 + 3 ⇔41 + 15 ⇔G
→3 + 41 + 14 + 4 ⇔3 + 41 +14 ⇔T1 + T2 + 41 ⇔T3 + 41 ⇔G
→3 + 41 + 13 + 5 ⇔T1 + T2 + T3 + 41 ⇔T0 + 41 ⇔ 41 ⇔G
→3 + 41 + 12 + 6 ⇔41 + 12 ⇔G
→3 + 41 + 11 + 7 ⇔3 + 41 + 11 ⇔T1 + T2 + 41 ⇔T3 + 41⇔ G

→3 + 41 + 10 + 8 ⇔3 + 41 + 8 ⇔T1 + T2 + 41 ⇔T3 + 41 ⇔G

Enfin, toutes les décompositions sont gagnantes et donc 3 + 18 + 41 est perdant et donc 3 + 18 et 41 sont de même type soit : **T1 + T4 ⇔T5**

-De cette règle on peut déduire **T1 + T5 ⇔T4** [et] **T4 + T5 ⇔T1**

-Ensuite pour T2 + T4 : il n'est ni T1 ni T2 ni T3 ni T4 ni T5 : en effet :

T2 + T4 + T1 ⇔T3 + T4 ⇔G
T2 + T4 + T4 ⇔T2 ⇔G
T2 + T4 + T2 ⇔T4 ⇔G
T2 + T4 + T5 ⇔T2+ T1 ⇔G
T2 + T4 + T3 ⇔T4 + T1 ⇔G

on va donc nommer **T6** son nouveau type. Ainsi **T2 + T4 ⇔T6**

- Il s'ensuit que **T2 + T6 ⇔T4** [et que] **T4 + T6 ⇔T2**

- T3 + T4 est gagnant mais ni T1 ni T2 ni T3 ni T4 ni T5 ni T6 (le raisonnement est le même que pour T2 + T4). Ainsi : **T3 + T4 ⇔T7** , **T7 + T4 ⇔T3** [et] **T7 + T3 ⇔T4**

- **Avec T5** : certains cas ont déjà été traités. Pour ceux qui restent :

  T2 + T5 ⇔T1 + T3 + T5 ⇔T3 + T4 ⇔T7 donc **T2 + T5 ⇔T7**

  De même : T3 + T5 ⇔T2 + T1 + T5 ⇔T2 + T4 ⇔T6 donc **T3 + T5 ⇔T6**

  Puis, des deux règles précédentes, on déduit : **T5 + T6 ⇔T3** , **T5 + T7 ⇔T2**, **T2 + T7 ⇔T5**, **T3 + T6 ⇔T5**
- **Avec T6** : T1 + T6 ⇔T1 + T2 + T4 ⇔T3 + T4 ⇔T7 soit **T1 + T6 ⇔T7** Et donc : **T6 + T7 ⇔T1**, **T1 + T7 ⇔T6**
- **Avec T7** : Tous les cas ont déjà été traités.

Récapitulatif	T1 + T2 ⇔T3					
	T1 + T3 ⇔T2	T2 + T3 ⇔T1				
	T1 + T4 ⇔T5	T2 + T4 ⇔T6	T3 + T4 ⇔T7			
	T1 + T5 ⇔T4	T2 + T5 ⇔T7	T3 + T5 ⇔T6	T4 + T5 ⇔T1		
	T1 + T6 ⇔T7	T2 + T6 ⇔T4	T3 + T6 ⇔T5	T4 + T6 ⇔T2	T5 + T6 ⇔T3	
	T1 + T7 ⇔T6	T2 + T7 ⇔T5	T3 + T7 ⇔T4	T4 + T7 ⇔T3	T5 + T7 ⇔T2	T6 + T7 ⇔T1

2°) Détermination du type d'une situation

Lors de la décomposition d'une situation, nous avons fait une constatation que nous n'avons pas démontré :

le plus petit type manquant dans ses décompositions est celui de la situation initiale.

Exemple : pour 19	*Autre exemple* : pour 29 :
cherchons le type de toutes ses décompositions 19 →18 ⇔T4 →17 ⇔T2 →16 + 3 ⇔T3 + T1 ⇔T2 →15 + 4 ⇔15 ⇔T1 →14 + 5 ⇔T0 →13 + 6 ⇔T3 + T1 ⇔T2 →12 + 7 ⇔12 ⇔T1 →11 + 8 ⇔T0 →10 + 9 ⇔9 ⇔T1 Ainsi, le plus petit type manquant est le type 3, qui est celui de 19.	29 →28 ⇔T1 →27 ⇔T4 →26 + 3 ⇔ 3 ⇔T1 →25 + 4 ⇔ 25 ⇔T3 →24 + 5 ⇔ T4 + T2 ⇔T6 →23 + 6 ⇔ 6 ⇔T1 →22 + 7 ⇔ 22 ⇔T3 →21 + 8 ⇔ T4 + T2 ⇔T6 →20 + 9 ⇔ 9 ⇔T1 →19 + 10 ⇔19 T3 →18 + 11 ⇔T4 + T2 ⇔T6 →17 + 12 ⇔T2 + T1 ⇔T3 →16 + 13 ⇔T0 →15 + 14 ⇔T1 + T2 ⇔T3 Le plus petit type qu'il manque est T2 et c'est en effet celui de 29.

***

Annexe 2

Les savoirs mis en scène par les élèves dans la situation "jeu de Gründy"

NB — *Pour retrouver les conditions de l'atelier, le lecteur aura intérêt à étudier le document des élèves [annexe1] avant de lire ce qui suit.*

Sur le plan des concepts et notions mathématiques, le travail des élèves est très riche. Chacun des savoirs suivants peut devenir un enjeu d'apprentissage intéressant lors de la phase de conclusion de l'atelier de recherche.

- *Relation d'équivalence* sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des *situations* (une situation est une *somme* de *situations simples*, i.e. réduites à un seul tas). La notation ⇔ désigne d'abord la relation " de même nature" puis une relation plus fine "être de même type". Les *classes d'équivalence* sont alors les "*types*". En particulier toute situation s'avère équivalente à une situation simple (il s'agit d'un "théorème en acte" chez les élèves).
- Introduction d'une opération *somme* sur les situations. C'est une *loi de groupe* (qui correspond à la notion de "somme de jeux" classique en théorie des jeux) qui passe au *quotient* par la relation d'équivalence précédente.
- Les "types" des situations sont définis de proche en proche (*induction* ou *récurrence)* :
    - le type T_0 est attribué aux situations perdantes.
    - Pour k>0, le type T_k est attribué à une situation S si pour chaque situation élémentaire S_i de type T_i avec $i<k$, S+Si est une situation gagnante.

- En fait le résultat le plus marquant de la recherche revient à la définition par récurrence d'une *fonction* $\mathcal{S}\to\mathbb{N}$ qui associe un nombre naturel à chaque situation. Il y a en effet équivalence entre les notions d'*application* et celle de *partition* d'ensemble :
  A une partition $(E_i)_{i\in I}$ *d'un ensemble E, indexée par un ensemble d'indices I, est associé une unique application* $f:E\to I$ *: pour* $e\in E$, $f(e)$ *est l'unique indice tel que* $e\in E_{f(e)}$. *Inversement à chaque application* $f:E\to I$ *est associé la partition de son domaine en préimages :* $(f^{-1}(i))_{i\in I}$.

  NB. Historiquement, c'est la propriété énoncée en conjecture par les élèves (voir annexe §(D)2°)) qui servit de définition à Gründy (et indépendamment à Sprague) pour attribuer une valeur entière à chaque jeu de NIM (*fonction de "Sprague-Gründy"* : voir les notes de l'article final des *Comptes Rendus MATh.en.JEANS* sur http://www.mathenjeans.free.fr).