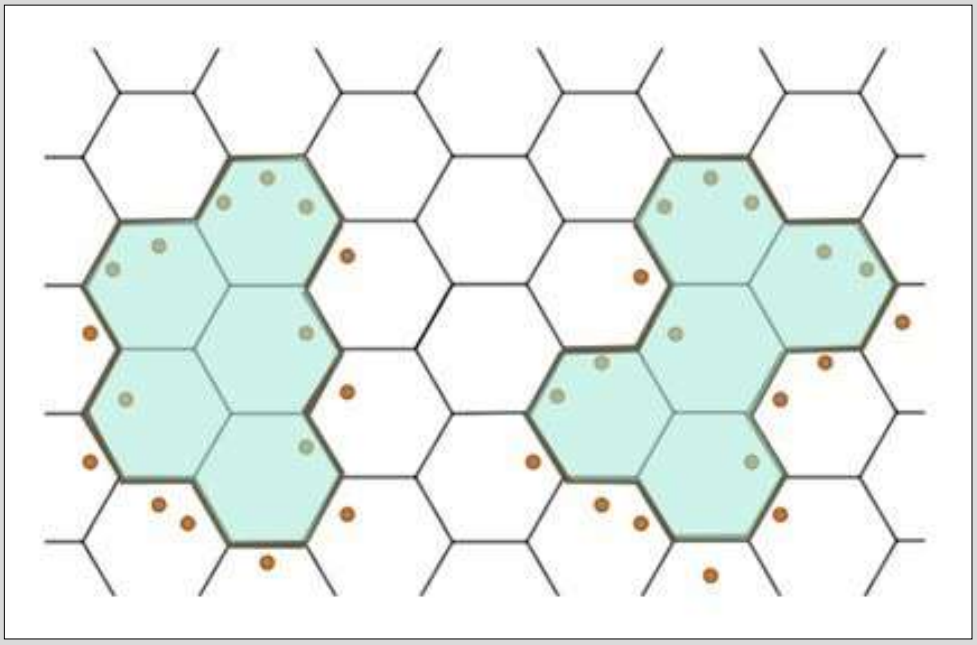
Chercher ...

... Ecrire

Quelques travaux d'élèves

années 2019 - 2020 - 2021



Association **MATh.en.JEANS** Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie 75005 Paris

Congrès 2019

Congrès 2020 (à distance)

Congrès 2021

Sommaire

Editorial 3

L'objet invisible (2020), Orthez, collège 5

Le lapin et le camion (2021), Quimper, lycée 17

La couverture du serpent (2020), La Haye, collège et lycée 27

La valse des polygones (2021), Orsay, collège 43

Modéliser une épidémie (2019), Sélestat, lycée 51

Calculatrice aux touches magiques (2020), Marseille, collège 61

Don't cross the streams (2019), Cluj, lycée 65

Savoir compter jusqu'à 1 (2019), Noé et Carbonne, collège 73

ENI game and probability (2020), Varsovie, lycée 77

Les additions pannumériques (2019), Neuilly-en-Thelle, collège 83

Titus et Pollux : un jeu de traits et de points (2019), Lyon et Bron, lycée 89

Disposer des couples (2019), Laval, collège et lycée 97

Tours de Hanoï (2021), Niort, lycée 105

Editorial

Nous sommes heureux de vous présenter dans cette brochure des écrits de jeunes, filles et garçons, participant à l'activité MATh.en.JEANS dans leurs collèges, dans leurs lycées pendant les années scolaires : 2018-2019, 2019-2020, 2020-2021.

Ces jeunes « vivent » les mathématiques en découvrant et en pratiquant la recherche avec l'aide des enseignants et des chercheurs au cours de l'année scolaire. Les élèves ont aussi l'occasion de se former à la communication orale, en particulier lors des congrès annuels.

La communication écrite reste une étape très importante dans la vie des chercheurs. Il en est de même pour les jeunes participant à MATh.en.JEANS.

C'est le résultat de ce travail annuel dont nous présentons ici quelques exemples. Les articles ont été relus et approuvés par le Comité d'édition de MATh.en.JEANS avant d'être publiés sur le site de l'association.

Nous tenons à souligner que, malgré les difficultés liées à la pandémie au cours des années 2020 et 2021, l'activité MATh.en.JEANS s'est poursuivie dans de nombreux établissements, même si le fonctionnement des ateliers était irrégulier et les congrès à distance. Parmi les conséquences de cette situation particulière : nous avons reçu nettement moins d'articles qu'auparavant et très peu de photos de la part des ateliers.

Vous trouverez quelques articles reçus en 2019, 2020, 2021 représentatifs du travail d'élèves de niveaux divers, de collèges ou de lycées, venant de différentes régions de France et même hors de nos frontières. Ces articles constituent un témoignage et non une sélection : ce ne sont pas forcément les « meilleurs ». L'esprit de compétition est étranger à MATh.en.JEANS.

Ils abordent plusieurs aspects des mathématiques : promenades géométriques, prévisions probabilistes, tactiques des jeux, découvertes de propriétés numériques...

On pourra constater dans ces écrits des oublis, des imperfections signalés dans les notes d'édition mais ils représentent une véritable production mathématique.

Nous en profitons pour remercier tous ces jeunes autrices et auteurs, leurs enseignant·es et les chercheurs et chercheuses qui les ont accompagné·es et nous vous souhaitons, chers lectrices et lecteurs, le plaisir de la découverte de leurs travaux.

Le Comité d'édition

*Pendant l'élaboration de cette brochure, nous avons appris le décès de notre ami **François Ducrot**. En tant que chercheur, il encadrait des ateliers MATh.en.JEANS depuis une dizaine d'années. Il a aussi organisé trois Congrès à Angers et s'est engagé dans le Comité d'édition dès sa création.*

Et François savait que le plus dur pour nos jeunes chercheurs, c'est de rédiger un article.

L’objet invisible

Année 2020-2021

Noa Massoni, Justine Nicolas, Baptiste Pouyanne, Noélie Ramezi,
Thibault Vilbois, Chloé Villemonteix (classe de 3e)
Jade Barel, Lilian Cassou-Leins, Beverly Delannoy, Alexia Puyet (classe de Terminale)

Enseignants : Chantal Barneix Alain, Goyhetche

Etablissements : Collège Gaston Fébus et Lycée Gaston Fébus Orthez.

Chercheur : Jacky Cresson, Université de Pau et des Pays de l’Adour.

1- Introduction :

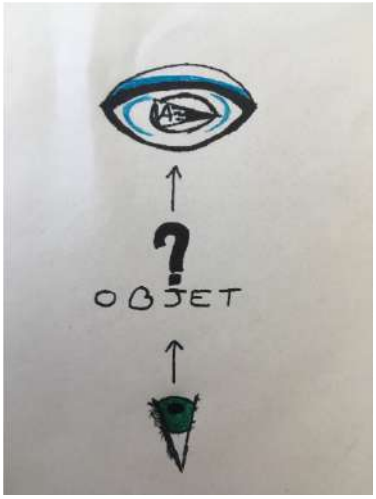
Il nous a été proposé comme sujet de créer un objet invisible et solide. Évidemment, cela pourrait être une vitre !
Or, notre objet ne doit pas être transparent.

Pourquoi les objets ordinaires sont-ils visibles ?

Premièrement, un objet est visible lorsque les rayons lumineux arrivant sur celui-ci sont renvoyés dans toutes les directions ; on le voit.

Un objet est invisible quand on voit ce qu’il y a derrière lui sans déformation, comme s’il n’y avait rien entre.

Donc pour rendre un objet invisible, il faudrait « contrer » ce principe de réflexion de la lumière, ou plutôt s’en servir à notre avantage. On pourra ainsi modifier la trajectoire des rayons arrivant sur l’objet, pour qu’ils le traversent et en ressortent dans le prolongement du rayon entrant.



Pour qu’un objet placé entre l’œil de l’observateur et le ballon soit invisible, il faudra dévier les trajectoires des rayons à l’intérieur de l’objet et qu’ils ressortent alignés avec les rayons du départ.

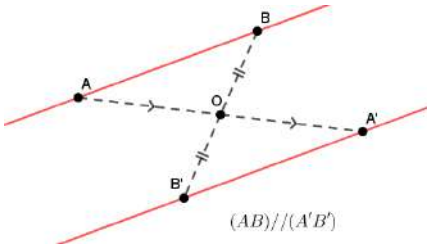
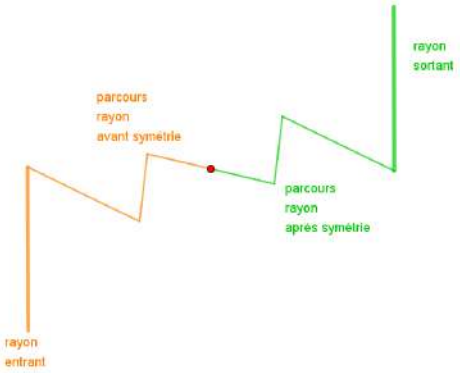
L’objet sera constitué de deux parois parallèles sur lesquelles des miroirs seront fixés.

***L’objet lui-même sera invisible,* les rayons entrant seront déviés dans l’objet puis ressortiront dans leur alignement.**
De plus, nous créerons entre les miroirs des zones invisibles de l’extérieur.

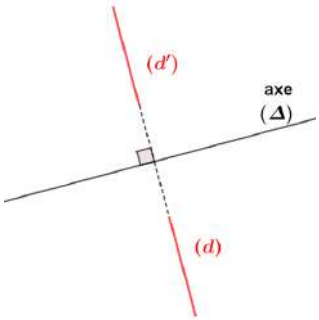
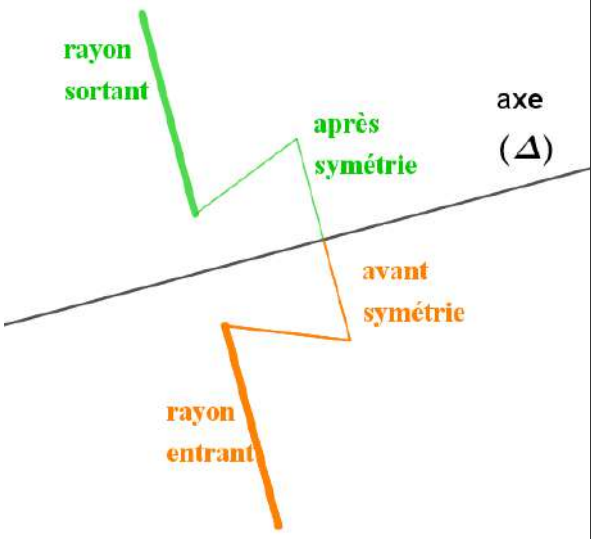
Nous avons utilisé un laser et des miroirs afin de comprendre comment un rayon se reflète en essayant plusieurs configurations.

Deux outils mathématiques :

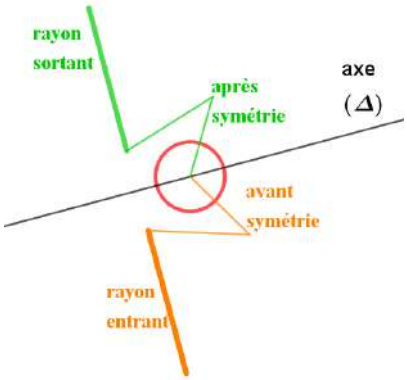
Symétrie centrale

Propriété :	**Une application :**
Le symétrique d'une droite, par une symétrie centrale est une droite parallèle. 	Si on trace le symétrique du trajet d'un rayon par une symétrie centrale, alors le rayon sortant sera parallèle au rayon entrant.  (rayon entrant) // (rayon sortant)

Symétrie Orthogonale :

Propriété :	**Une application :**
Le symétrique, par une symétrie orthogonale d'une droite perpendiculaire à l'axe est la droite elle-même. 	 Si le rayon entrant (orange, gras) est perpendiculaire à l'axe de symétrie, le rayon sortant (en vert, gras) sera dans l'alignement.

Remarque : il faudra que le rayon lumineux intercepte l'axe de symétrie perpendiculairement.
Dans le cas contraire, on obtiendrait la figure ci-contre.
Or cette figure est impossible car un rayon ne peut changer « seul » de direction (problème entouré en rouge).

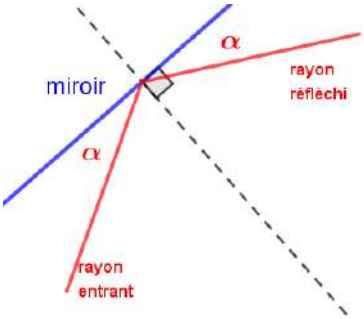


Partie 1 : Réflexion d'un rayon sur un miroir :

Lorsqu'un miroir reflète un rayon, le rayon sortant forme avec le miroir un angle égal à l'angle formé entre le miroir et le rayon entrant.

Pour dessiner un rayon réfléchi, il y a plusieurs étapes :

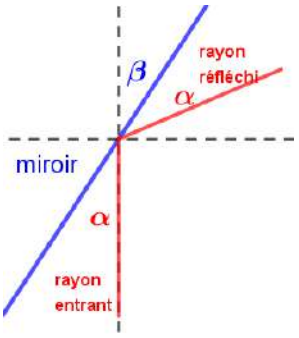
- On trace la perpendiculaire au miroir passant par le point de contact entre le rayon et le miroir.
- Puis on trace le symétrique de ce rayon par rapport à la perpendiculaire.

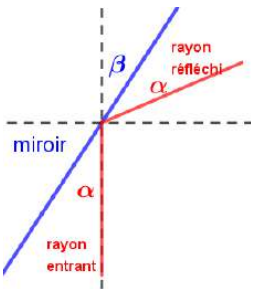
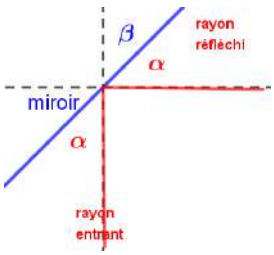
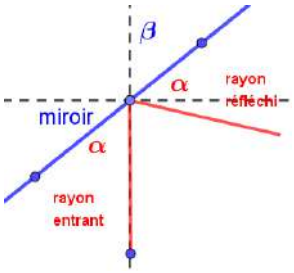


Nous avons remarqué 3 cas possibles, en fonction de l'inclinaison des miroirs :

On considère un miroir (tracé en bleu) formant un angle β avec l'axe vertical (figure ci-contre). Le rayon entrant est vertical.
On remarque que les angles α et β sont opposés par le sommet donc de même mesure.

On en déduit que l'angle formé entre l'axe vertical et le rayon réfléchi est égal à $\alpha+\beta=2\alpha$.



Cas 1	***Cas 2 :***	***Cas 3 :***
Si $\alpha(ou\beta)<45°$ Alors le rayon se réfléchira vers l'avant et il nous sera possible de le faire ressortir parallèlement au rayon de départ.	Si $\alpha(ou\beta)=45°$ Le rayon se reflète alors à 90°	Si $\alpha(ou\beta)>45°$ Le rayon se réfléchit alors vers l'arrière, il nous faut donc écarter cette possibilité.
		

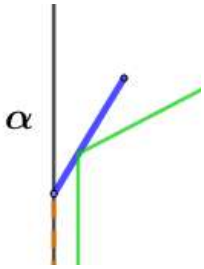
On en conclut que pour réaliser un objet invisible à partir de miroirs, les rayons devront toujours aller vers l'avant ; on se servira donc du 1er cas énoncé ci-dessus, et notre cas limite sera le rayon reflété "à 90°".

Nous séparerons l'étude des objets en deux grandes catégories :
- **Les miroirs sont situés sur les deux parois,**
- **Ils sont situés sur une seule paroi.**

Partie 2 : les miroirs se situent sur les deux parois :

1/ Placement des deux premiers miroirs et étude du trajet d'un rayon lumineux :

On place d'abord, sur la paroi de gauche, un miroir, qui forme avec la paroi un angle α $(\text{avec } \alpha < 45°)$.
Le rayon se reflète donc de l'angle α vers l'avant.

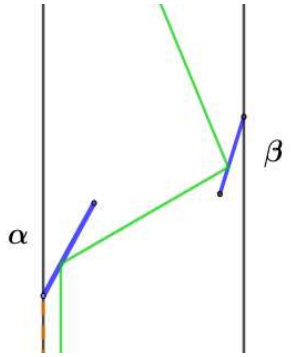


Après cela, nous avons suivi la trajectoire du rayon vert et placé un second miroir, d'angle β avec la paroi de droite $(\beta \leq 45°)$.
Le rayon se reflète donc vers l'avant à nouveau mais n'est pas forcément parallèle au rayon entrant.

On obtient alors trois cas possibles.

Cas 1 :

Dans ce cas, $\alpha > \beta$. En traçant le trajet d'un rayon reflété par ces deux miroirs, on se rend compte que le rayon sortant "repart" vers la paroi de gauche en formant un angle aigu. Il faudra donc faire une symétrie centrale pour le redresser et le faire ressortir parallèlement.



Cas 2 :

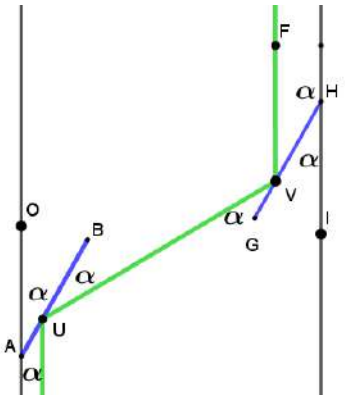
Dans ce cas, $\alpha = \beta$, les miroirs forment avec les parois le même angle. Les miroirs sont donc parallèles.

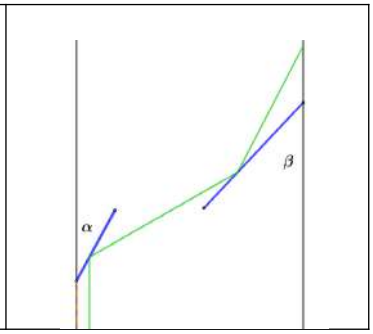
Le rayon (VU) forme avec les miroirs des angles alternes-internes.
Les miroirs sont parallèles donc les angles ont même mesure.
Donc $\widehat{UVG} = \alpha$

Le rayon reflété (VF) formera donc avec le miroir un angle de mesure α.

Le rayon (FV) et la paroi (HI) forment avec le miroir [GH] deux angles alternes-internes de même mesure donc ces droites sont parallèles.

En conclusion le rayon sortant (VF) est parallèle au rayon entrant.



Cas 3 : Dans ce cas, $\beta > \alpha$. Le rayon sortant est dévié vers la droite. Il sera alors nécessaire de placer un troisième miroir sur la paroi de droite.	

2/ Comment obtenir un rayon aligné avec le rayon de départ dans ces trois cas :

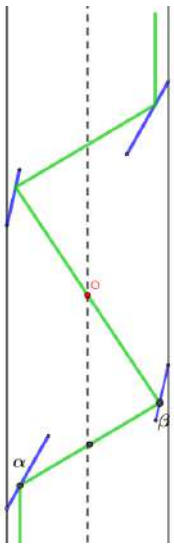
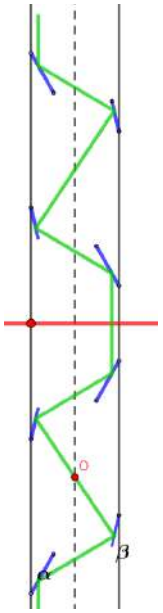
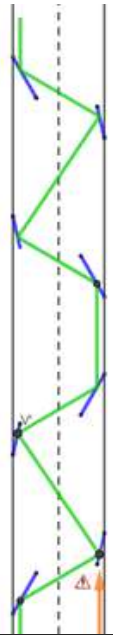
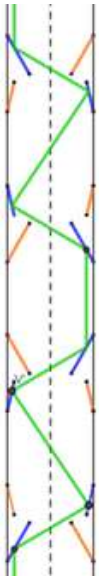
Cas 1 : $\alpha > \beta$

Pour obtenir à la sortie, un rayon parallèle à l'entrant, nous allons appliquer une symétrie centrale.
Le centre de symétrie doit se trouver sur l'axe de symétrie des deux parois. Ainsi, les miroirs symétriques seront aussi associés aux parois. (Figure 1)

Puis, pour que le rayon ressorte dans l'alignement du rayon de départ, il suffit d'effectuer une symétrie axiale. L'axe de symétrie doit être perpendiculaire aux parois (Figure 2).

Dans cette configuration, il y a un problème : les rayons arrivant de la droite ne rencontrent pas de miroir et ne sont donc pas renvoyés vers l'avant (Figure 3).

Pour y remédier, il faut utiliser une symétrie axiale dans la longueur (l'axe de symétrie utilisé est l'axe de symétrie des parois) pour que des miroirs soient placés avec fonction de renvoyer les rayons arrivant de droite vers l'avant (miroirs orange sur la Figure 4).

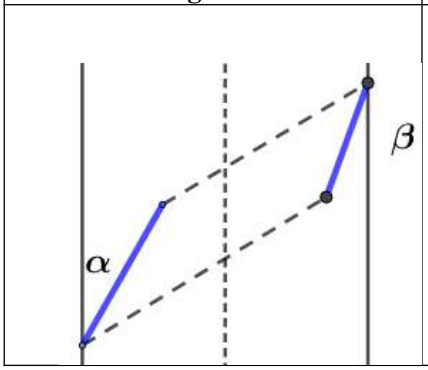
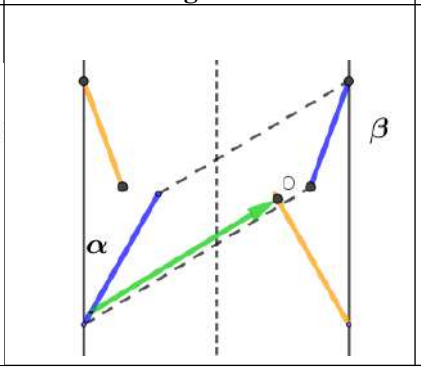
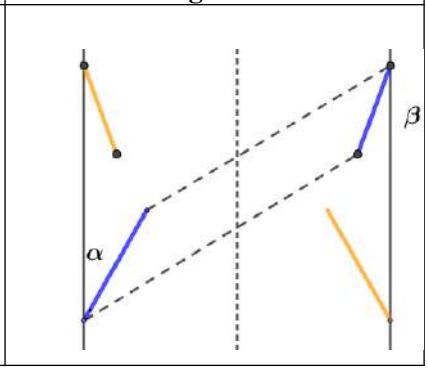
Figure 1	**Figure 2**	**Figure 3**	**Figure 4**
			

Problème du « chevauchement » :

On part d'une configuration banale, les miroirs forment des angles α *et* β avec les parois.
Comme nous l'avons vu, pour que les rayons arrivant à droite se reflètent aussi, nous traçons les symétriques des miroirs (on obtient les miroirs orange - Figure 1).

Se pose alors un problème : le rayon vert devrait se réfléchir sur le second miroir bleu, mais il est arrêté par le miroir orange. Nous appelons cela le problème du chevauchement. (Figure 2).

Pour résoudre ce problème, nous devons augmenter la distance entre les deux parois, ainsi le second miroir bleu « monte » et les rayons ne sont plus arrêtés. (Figure 3).

Figure 1	Figure 2	Figure 3
		

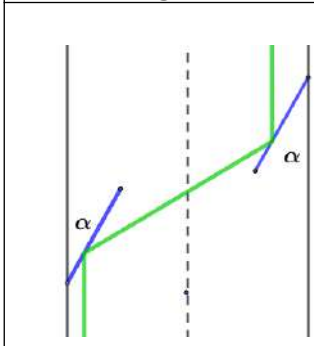
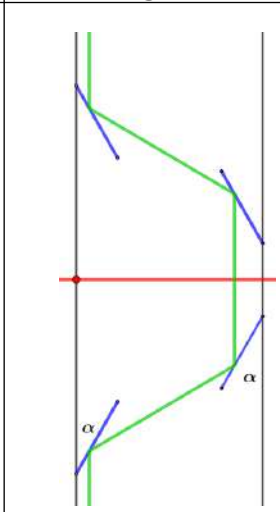
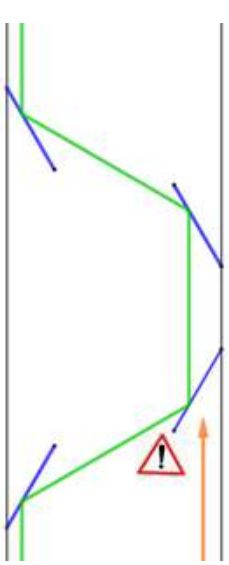
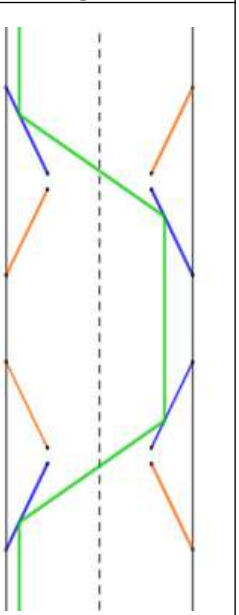
Cas 2 : $\alpha = \beta$

Le rayon ressort donc de la configuration parallèlement au rayon de départ (figure 1)

Dans ce cas, on peut éviter d'utiliser la symétrie centrale ; une seule symétrie axiale située après les deux premiers miroirs suffit car le rayon ressort déjà parallèlement à son arrivée. Notre objet comportera donc 4 miroirs seulement. (Figure 2)

Mais là aussi nous rencontrons le même problème qu'au cas n°1. Les rayons arrivant de la droite ne sont pas renvoyés vers l'avant (Figure 3).

Donc il nous faut effectuer la même symétrie axiale pour que les rayons soient renvoyés vers l'avant. (Figure 4).

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
			

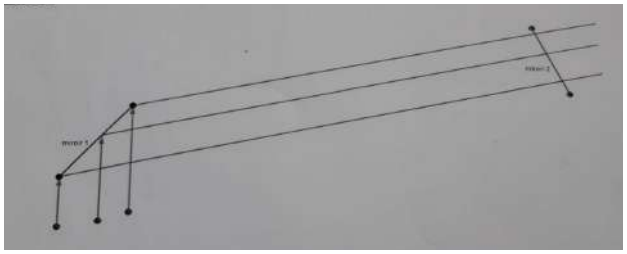
Dans la figure 4, les miroirs forment avec les parois des trapèzes et les intérieurs de ces trapèzes seront invisibles.

Cas 3 : $\beta > \alpha$

Nous n'avons pas étudié le cas 3. Nous pourrions, en appliquant les mêmes méthodes arriver à un rayon sortant aligné avec le rayon entrant mais nous verrons plus tard pourquoi il est impossible à réaliser.

3/ Comment placer précisément les miroirs ?

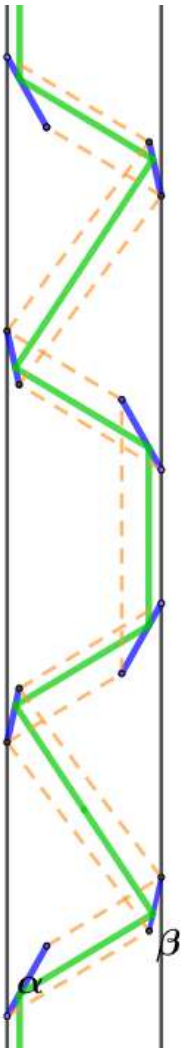
Premièrement, TOUS les rayons doivent être reflétés. C'est-à-dire, les rayons du milieu du miroir jusqu'à ceux au bord.



Après le premier miroir, on peut donc déterminer une "zone" déterminée par les rayons limites (rayons réfléchis sur les extrémités des miroirs) dans laquelle tous les rayons passeront.

Il faudra donc que le second miroir couvre toute cette zone pour renvoyer tous les rayons vers l'avant (en fonction de son inclinaison, sa longueur variera).

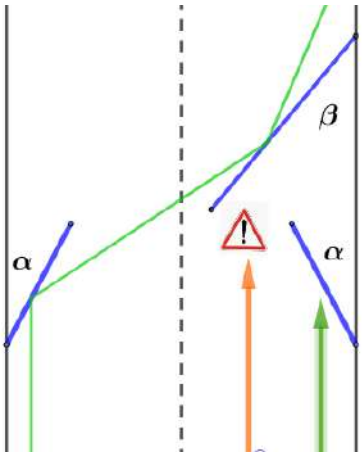
On réitère le même processus pour les miroirs suivants (Figure ci-contre).



4/ Pourquoi le cas 3 ne fonctionne-t-il pas ? ($\beta > \alpha$)

Pour refléter les rayons arrivant de la droite on a tracé les symétriques des miroirs par rapport à l'axe de symétrie des parois.

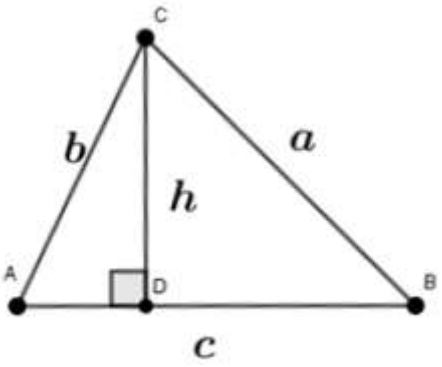
Lorsque $\beta > \alpha$, le rayon orange (en bas à droite de la figure) ne sera pas reflété. Certains rayons ne seront donc pas renvoyés vers l'avant, la figure ne sera pas invisible.
On peut donc éliminer ce cas.



En conclusion, pour que l'objet soit invisible,
α doit être supérieur ou égal à β

5/ Comment calculer la longueur du second miroir dans le cas 1 ?

Nous allons trouver une formule exprimant la longueur du second miroir (d_2) en fonction des deux angles α et β ainsi que la longueur du premier miroir (de droite : d).



> ***Propriété*** :
> Dans le triangle ABC
> $$\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$$

Démonstration :

Dans le triangle ADC rectangle en D

$$\sin\hat{A}=\frac{CD}{CA} \text{ donc } CD=CA\times\sin\hat{A}\,;h=b\times\sin\hat{A}$$

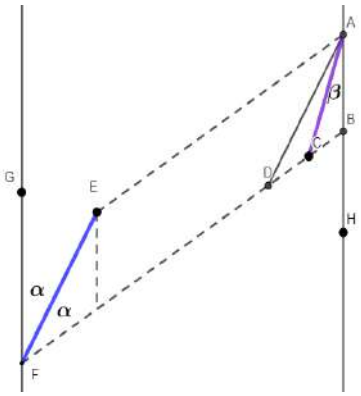
Dans le triangle BCD rectangle en D

$$\sin\hat{B}=\frac{CD}{CB} \text{ donc } h=a\times\sin\hat{B}$$

On en déduit donc l'égalité : $b\times\sin\hat{A}=a\times\sin\hat{B}$ donc si on revient au produit en croix : $\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}$.

On peut démontrer de même que $\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$.

Nous allons maintenant exprimer en fonction de α et β les mesures des angles du triangle DCA



On sait que $\widehat{DAB}=\alpha$

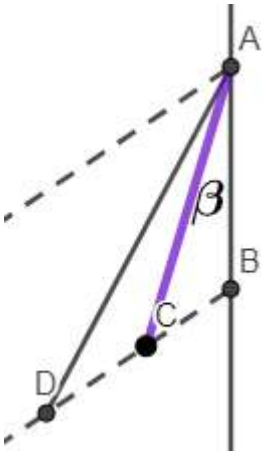
$$\widehat{GFD}=\widehat{GFE}+\widehat{EFD}=2\alpha$$

(GF) // (AH) coupées par (BF) forment deux angles alternes-internes de même mesure donc $\widehat{DBH}=2\alpha$

A, B, H alignés donc $\widehat{ABC}=180-2\alpha$

Dans le triangle ACB, la somme des mesures des angles est égale à 180° donc

$$\begin{aligned}\widehat{ACB}&=180-(180-2\alpha)-\beta\\&=180-180+2\alpha-\beta\\&=2\alpha-\beta\end{aligned}$$



On sait que $\widehat{DAB}=\alpha$ donc $\widehat{DAC}=\widehat{DAB}-\widehat{CAB}=\alpha-\beta$

De plus $\widehat{EFB}$ et $\widehat{ADB}$ sont des angles correspondants formés par des droites parallèles donc ils ont même mesure. $\widehat{ADB}=\alpha$.
De plus $\widehat{ACD}=180-(2\alpha-\beta)$

On peut donc maintenant appliquer le théorème démontré dans le triangle ACD :

$$\frac{\sin\hat{D}}{AC}=\frac{\sin\hat{C}}{AD}\ ;\ \frac{\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin(180-(2\alpha-\beta))}{d}$$

en posant $AD=d$,

$$d\times\sin\alpha=AC\times\sin(180-(2\alpha-\beta))$$

On en déduit que

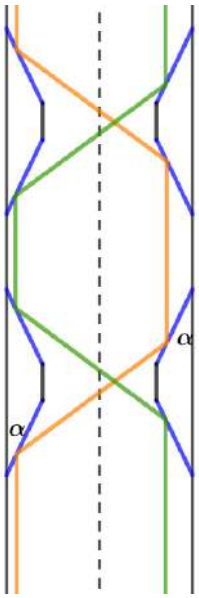
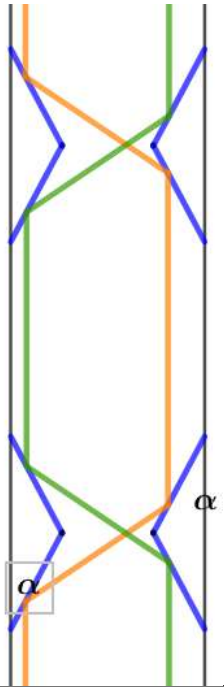
$$AC = d \times \frac{sin\alpha}{\sin(180-(2\alpha-\beta))} = d \times \frac{\sin\alpha}{\sin(2\alpha-\beta)}$$

$$\text{longueur du second miroir} = d \times \frac{\sin\alpha}{\sin(2\alpha-\beta)}$$

6/ Peut-on simplifier les configurations ?

Le cas $\alpha = \beta$

Quand $\alpha = \beta$, alors le rayon sortant est parallèle au rayon entrant donc on "économise" la symétrie centrale.
On obtient alors la configuration des trapèzes isocèles (fig 1).
En approchant les deux parois, les trapèzes se transforment en triangles isocèles (fig 2).

Figure 1	**Figure 2**
	

<u>Partie 2 : Les miroirs sont uniquement situés sur la paroi de gauche (miroirs collés sur la paroi de droite)</u>

On fixe ici la contrainte : les miroirs, avec un angle positif non nul, sont sur la paroi de gauche et ceux de la paroi de droite sont "plats", leur angle est nul.

Nous utilisons la même méthode d'étude que dans la partie 1.

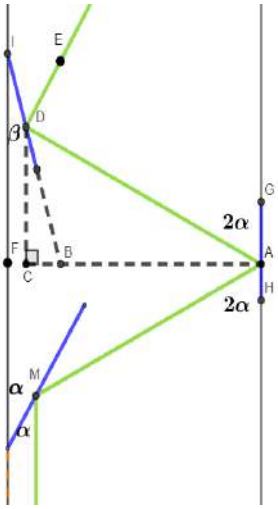
Propriété :
Si $\alpha = \beta$, alors le rayon sortant est parallèle au rayon entrant.

Démonstration :

On admettra que les angles $\widehat{GAD}=\widehat{MAH}=2\alpha$

Nous allons tout d'abord exprimer les mesures des angles du triangle CDA en fonction de α

$\widehat{DAF}=90-2\alpha$
$\widehat{CDA}=190-90-(90-2\alpha)$
$\widehat{CDA}=190-90-90+2\alpha$
$\widehat{CDA}=2\alpha$



Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$:
$\widehat{FIB}$ et $\widehat{CDB}$ sont des angles correspondants.
De plus, les droites (IF) et (CD) sont parallèles donc les angles correspondants ont même mesure.
Donc $\widehat{CDB}=\beta$.

On en déduit que $\widehat{BDA}=2\alpha-\beta$.
Le rayon [DA] se reflète en [DE] donc les angles ont même mesure :
$\widehat{IDE}=2\alpha-\beta$.

Pour que le rayon DE soit parallèle à la paroi de gauche il faudrait que les angles alternes-internes $\widehat{FIB}$ et $\widehat{IDE}$ soient de même mesure. On en déduit l'équation $2\alpha-\beta=\beta$; $2\alpha=2\beta$ donc $\alpha=\beta$.

En conclusion,

- Si les deux angles sont égaux alors le rayon sortant est parallèle
- S'ils sont différents alors le rayon sortant (DE) n'est pas parallèle à la paroi

Premier cas : $\alpha\neq\beta$
Dans ce cas, le rayon sortant n'est pas parallèle au rayon de départ. Il faudrait, comme dans la partie 1, utiliser une symétrie centrale afin d'obtenir un rayon parallèle au rayon entrant.

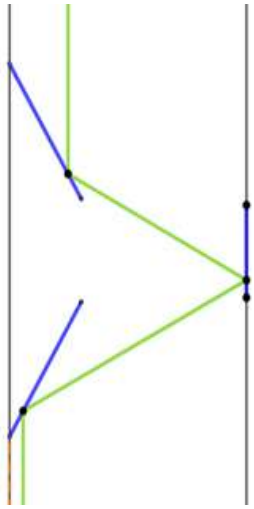
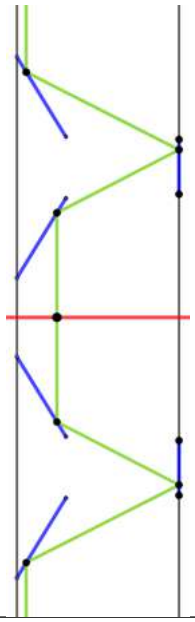
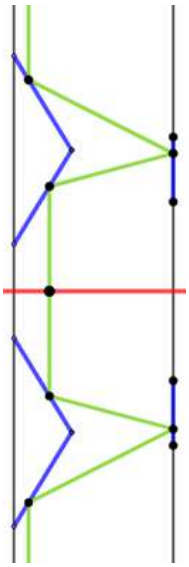
Le problème est le suivant : avec une symétrie centrale, on obtient des miroirs de l'autre côté, ce qui est interdit.

Second cas : $\alpha=\beta$
Dans ce cas, le rayon sortant est parallèle mais décalé (Figure 1).

Il nous reste un seul outil, la symétrie axiale. L'axe sera perpendiculaire aux parois.

On obtient la configuration finale (Figure 2).

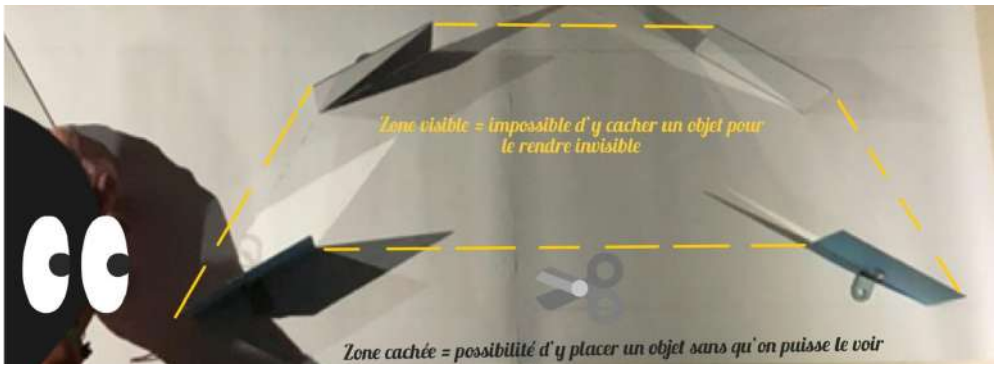
En modifiant la distance entre les deux parois, on peut passer d'une configuration en "trapèze isocèle" à une configuration en "triangle isocèle" (Figure 3).

Figure 1	Figure 2	Figure 3
		

Pour conclure, nous avons compris comment créer des configurations d'objets invisibles. Toutes ces configurations sont créées grâce à des symétries centrales et axiales. De plus, les parois sont à chaque fois parallèles et les surfaces sont planes.
Il existe sans doute d'autres configurations qui seront créées peut-être sans les symétries, sur des surfaces non planes, par exemple curvilignes.

Expérience :

En plaçant des miroirs selon notre méthode, on peut créer une zone invisible :
L'observateur est placé à gauche.



L'observateur ne « verra » pas les miroirs mais seulement l'image placée de l'autre côté.

seaux de 3L et 4L
1
2
3L
=9L
3L
Seau de 3L
Seau de 4L
3L

Le lapin et le camion

Année 2020 - 2021

Robinson Hostin, Joachim Kervarec, Léo Barnabé
et Mathilde Goarnisson (classe de terminale)

Établissement : Lycée Le Likès - La Salle, Quimper

Enseignant : Yann Cogan

1 Présentation du sujet

Un lapin veut traverser une route de 4m de large alors qu'un camion arrive à 60 km/h et occupe toute la largeur de la route.
Le lapin court à 30 km/h et le camion est à 7 mètres du lapin.
Le lapin peut-il traverser la route sans être percuté par le camion ?

2 Annonces des conjectures et résultats obtenus

Un calcul rapide (voire très rapide) nous convainc que si le lapin traverse au plus court, il se fera percuter. Afin de faciliter la compréhension du lecteur, nous appellerons ce lapin, le *lapin crétin*.
S'il prend une trajectoire rectiligne qui fuit un peu le camion, on a l'impression qu'il allongera légèrement la distance à parcourir pour traverser, mais allongera davantage la distance que devra parcourir le camion pour le percuter. C'est peut-être une voie de salut. En paramétrant le problème avec le temps t, et les coordonnées du lapin dans un plan repéré, on parvient à formuler les conditions de survie du lapin. Heureusement pour lui, il est possible de trouver des trajectoires qui remplissent ces conditions. Nous définissons ces trajectoires selon deux modalités : quels points viser sur l'accotement opposé de la route ; quels angles peut faire sa trajectoire avec celle du lapin crétin. Le lapin qui suit l'une de ces trajectoires sera appelé *lapin malin*.

Afin de mieux appréhender le problème nous avons l'idée de considérer toutes les directions possibles du lapin. Grâce à un logiciel de géométrie dynamique nous pouvons créer une animation où l'on voit le camion avancer en même temps que toutes les positions possibles du lapin à chaque instant. Ainsi on peut faire apparaître le lieu des impacts entre le camion et le lapin, qui ne semble pas être une figure géométrique connue.

Enfin, comme le problème est plan avec une évolution dans le temps, nous l'avons transformé en problème statique dans l'espace qui nous permet d'embrasser d'un seul regard toutes les trajectoires possibles du lapin, et tous les instants de sa course folle. Nous parvenons alors à déterminer la nature de la courbe des impacts entre le camion et le lapin.

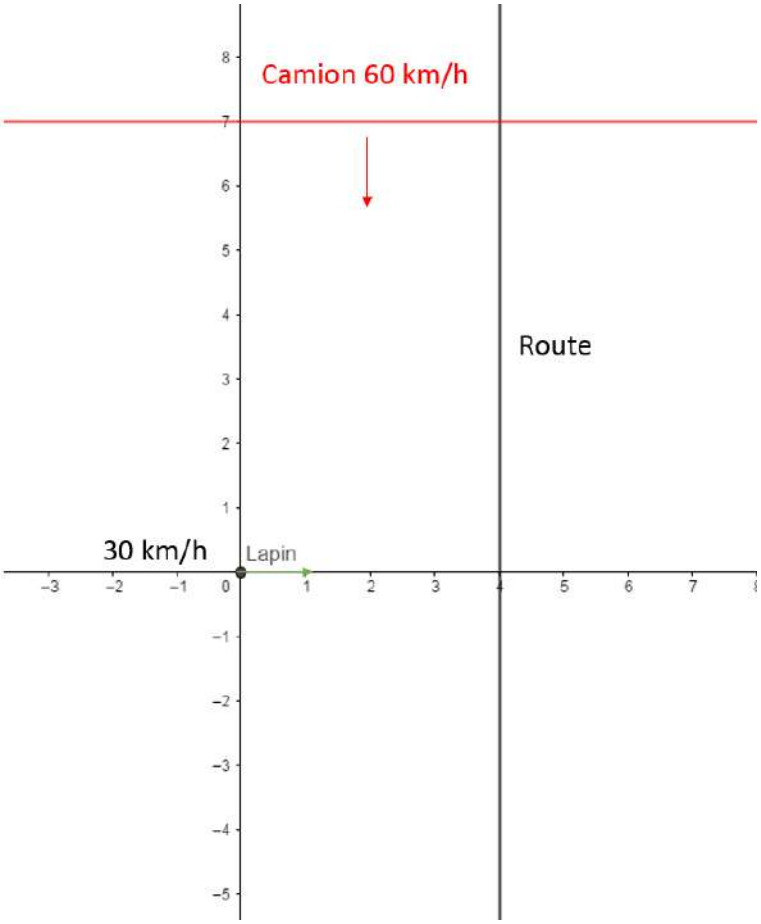
Connaître ce n'est point démontrer ni expliquer. C'est accéder à la vision.

Antoine de Saint Exupéry

3 Texte de l'article

3.1 Lapin crétin

Cas où le lapin décide de traverser au plus court.



Nous choisissons les unités : mètres pour les distances et secondes pour les temps.

La vitesse du lapin est :

$$v = 30\ km.h^{-1} = 30 \times \frac{1\,000}{3\,600}\ m.s^{-1} = 30 \times \frac{5}{18} m.s^{-1} = \frac{6\times5\times5}{6\times3} m.s^{-1} = \frac{25}{3} m.s^{-1}.$$

Son temps de traversée en secondes est donc :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{4}{\frac{25}{3}} = 4 \times \frac{3}{25} = \frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 0,48.$$

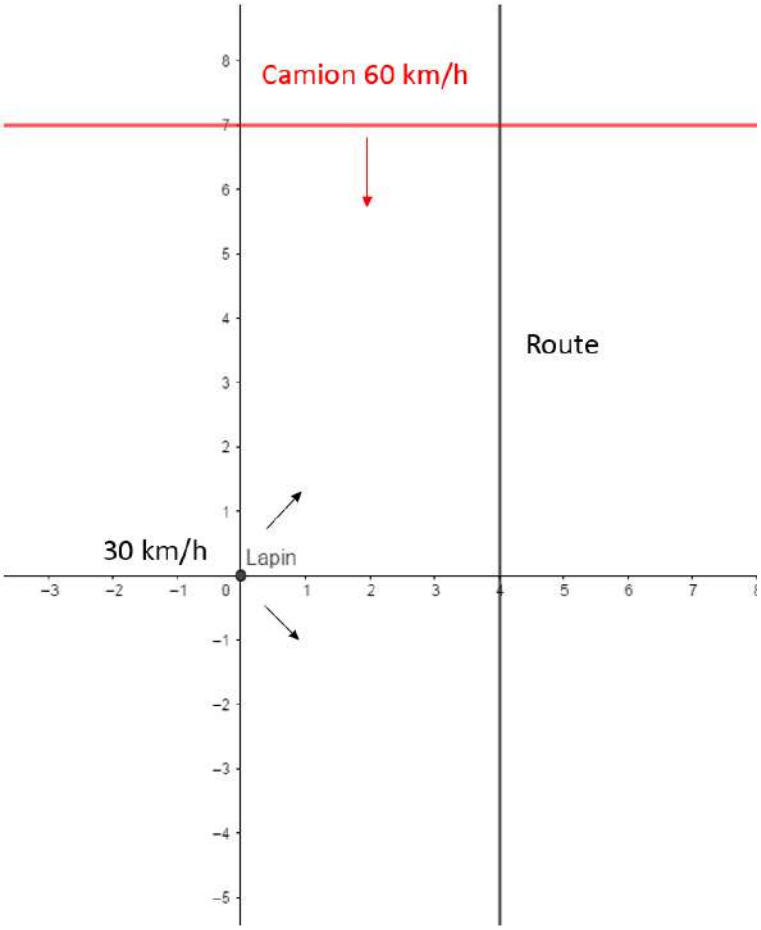
Or le camion arrive au niveau du lapin en un temps :

$$t = \frac{7}{\frac{50}{3}} = 7 \times \frac{3}{50} = \frac{21}{50} = \frac{42}{100} 0,42 < 0,48.$$

Le camion va donc percuter le lapin.

***Remarque** : On pouvait conclure plus rapidement en observant que le camion va deux fois plus vite que le lapin. Donc quand le lapin fait 4 mètres le camion fait 8 mètres. Comme il est à 7 mètres du lapin, il l'aura percuté avant que le lapin franchisse la route.*

3.2 Lapin malin



Définissons :

— O la position du lapin au départ de l'action ;
— $\vec{i}$ le vecteur normé indiquant la direction du lapin crétin ;
— $\vec{j}$ le vecteur normé perpendiculaire à $\vec{i}$ dirigé vers le camion qui arrive.

Cela nous fournit le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui nous permettra de repérer les positions au cours du temps et d'exprimer des distances à l'aide des coordonnées.

Au début du mouvement le camion est modélisé par la droite d'équation $y = 7$.

En appelant t le temps en secondes écoulé depuis le début de la scène on a les coordonnées du lapin :

$$L_t\big(x(t), y(t)\big)$$

Pour simplifier les écritures nous noterons simplement $L(x, y)$.

La vitesse du lapin nous donne une relation entre x, y et t (1) :

$$\begin{aligned} d &= v \times t \\ OL &= \frac{25}{3} \times t \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{25}{3} \times t \\ x^2 + y^2 &= \frac{625}{9} t^2 \end{aligned}$$

Position du camion en fonction du temps :

$$Y(t) = 7 - \frac{50}{3} t$$

Le lapin échappera au camion si, et seulement si, quand le camion arrive à la hauteur du lapin ($Y = y$), ce dernier a franchi la route ($x > 4$).

Substituons, dans la relation obtenue entre x, y et t, l'ordonnée y du lapin par l'expression en fonction du temps t de l'ordonnée Y du camion. Cela nous donnera une relation entre x et t, c'est à dire entre l'instant où le camion arrive à la hauteur du lapin et l'avancée du lapin dans sa traversée de la route.

$$\begin{aligned} x^2 + \left(7 - \frac{50}{3}t\right)^2 &= \frac{625}{9}t^2 \\ x^2 &= \left(\frac{25}{3}t\right)^2 - \left(7 - \frac{50}{3}t\right)^2 \\ x^2 &= \left(\frac{25}{3}t - \left(7 - \frac{50}{3}t\right)\right)\left(\frac{25}{3}t + \left(7 - \frac{50}{3}t\right)\right) \\ x^2 &= (25t - 7)\left(7 - \frac{25}{3}t\right) \end{aligned}$$

Considérons la deuxième condition : le lapin a franchi la route quand le camion arrive à sa hauteur :

$$\begin{aligned} x &> 4 \\ x^2 &> 16 \qquad \text{car } x \text{ est un nombre positif} \\ (25t - 7)\left(7 - \frac{25}{3}t\right) &> 16 \\ (25t - 7)(21 - 25t) &> 48 \\ -625t^2 + 700t - 195 &> 0 \\ -5 \times 125t^2 + (-5) \times (-140)t + (-5) \times 39 &> 0 \\ 125t^2 - 140t + 39 &< 0 \end{aligned}$$

Étude du signe du trinôme obtenu : $\Delta = (-140)^2 - 4 \times 125 \times 39 = 100 = 10^2 > 0$,

$$t_1 = \frac{-(-140) - 10}{2 \times 125} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = 0,52 \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{-(-140) + 10)}{2 \times 125} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Or on sait, d'après la règle du signe du trinôme, que celui-ci est du signe du coefficient du terme de degré deux *(ici positif)*, sauf entre les racines, quand il y en a *(c'est le cas ici)*.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $S =]\,0,52\,;\,0,6\,[$.

Le lapin malin sait donc que s'il survit, sa traversée de la route aura duré entre 0,52 et 0,6 secondes. Il lui serait plus utile de savoir quel point du côté opposé de la route viser, ou quel angle il doit donner à sa course par rapport à la direction du lapin crétin.

Convertissons la condition sur t en condition sur y à l'aide de la relation qui existe entre la position Y du camion et le temps t :

$$0,52 < t < 0,6$$

$$7 - \frac{50}{3} \times 0,52 > 7 - \frac{50}{3}t > 7 - \frac{50}{3} \times 0,6 \quad \text{(on applique une fonction affine décroissante)}$$

$$-3 < y < -\frac{5}{3} \approx -1,67$$

Pour que le lapin puisse traverser la route et échapper au camion il doit viser entre les points (2) :

$$A\left(4\,;-\frac{5}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad B(4\,;-3).$$

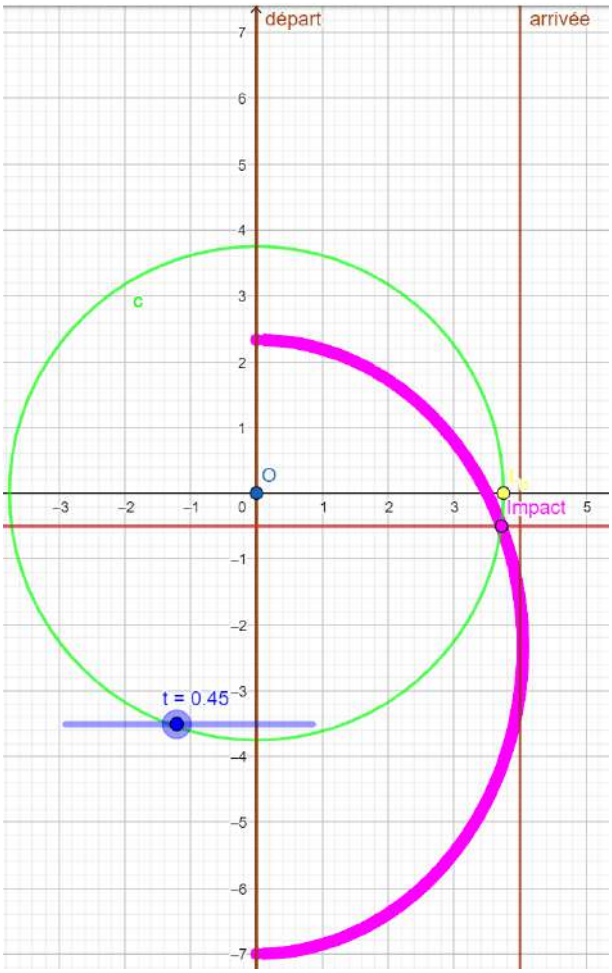
Déterminons des angles possibles pour le lapin malin par rapport à la direction du lapin crétin : Avec le point $H(0,4)$, dans les triangles rectangles OHA et OHB, la trigonométrie fournit

$$\tan\alpha_1 = \frac{\frac{5}{3}}{4} = \frac{5}{12} \quad \text{donc} \quad \alpha_1 \approx 22{,}6^\circ \qquad \text{et} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{3}{4} \quad \text{donc} \quad \alpha_2 \approx 36{,}9^\circ.$$

Pour que le lapin puisse traverser la route et échapper au camion il doit partir dans une direction fuyant un peu le camion selon un angle compris entre 23° et 36° par rapport à la direction du lapin crétin. Nous lui conseillons même un angle de 30° pour avoir une marge optimale, parce qu'on ne sait jamais.

3.3 Embrasser toutes les directions possibles du lapin

Une démarche consiste à considérer toutes les directions possibles que peut prendre le lapin. À un instant t, l'ensemble des positions possibles du lapin est le cercle de centre O et de rayon $(25/3)\,t$.



À l'aide du logiciel Géogébra on peut tracer ce cercle en fonction du temps placé en curseur.
On peut aussi positionner, en fonction du temps t, la droite modélisant l'avant du camion.
Pour chaque valeur de t, l'intersection entre la partie droite de ce cercle et cette droite donne, si elle est non vide, un point d'impact entre le camion et le lapin. L'ensemble des points d'impact est matérialisé par la courbe en rose.

L'illustration présente la situation au moment $t = 0{,}45$ secondes. On voit qu'à ce moment le lapin crétin (en jaune) aurait déjà été impacté par le camion (après 3,5 mètres de course), et qu'il existe une direction du lapin telle qu'il se fait impacter par le camion à cet instant.

On voit aussi la zone de survie du lapin, qui est la partie de la courbe rose à droite de la droite d'équation $x = 4$.

Le lieu des points d'impact nous donne une information utile sur la situation. Tentons d'en exhiber une équation. Il suffit pour cela d'extraire le paramètre t du système :

$$\begin{cases} y = 7 - \dfrac{50}{3}t \\ x^2 + y^2 = \dfrac{625}{9}t^2 \end{cases}$$

La première égalité fournit $t = \dfrac{3}{50}(7-y)$.
Dès lors la seconde donne :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{625}{9} \times \frac{9}{2500}(7-y)^2 \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{4}(7-y)^2 \\ 4x^2 + 4y^2 &= 49 - 14y + y^2 \\ 4x^2 + 3y^2 + 14y - 49 &= 0 \end{aligned}$$

On contrôle au passage que les couples $(3,5\ ;\ 0)$ et $(4\ ;\ -3)$ sont solution.
Cette équation nous permet de retrouver les résultats sur la survie du lapin, laissés à la sagacité du lecteur.
En posant $x = 0$, on appréhende aussi ce qui se passe dans le cas d'un *lapin suicidaire* (espérance de vie minimale) et d'un *lapin trouillard* (espérance de vie maximale en cas de non survie).

On se demande quelle est la nature de la courbe rose des impacts entre le lapin et le camion dont l'équation est :

$$4x^2 + 3y^2 + 14y - 49 = 0$$

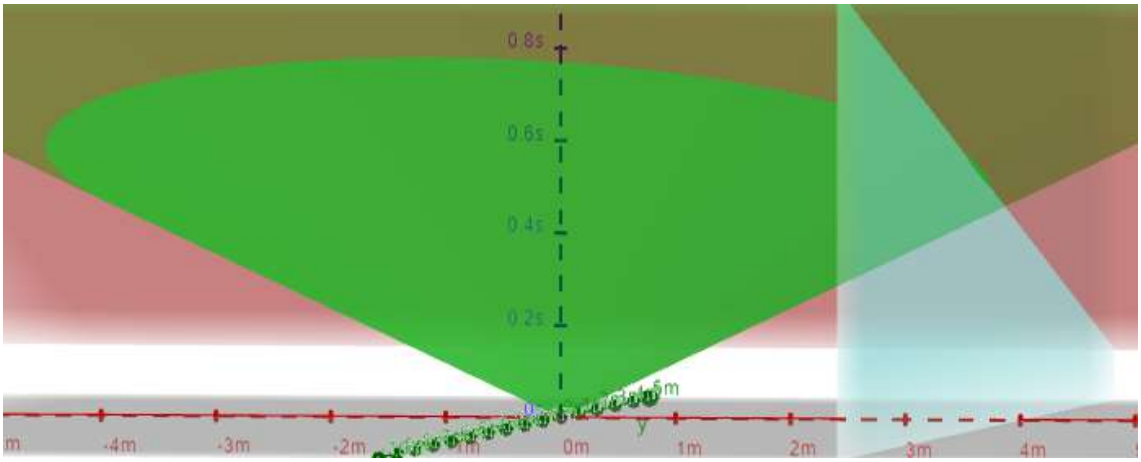
Cela ressemble à une équation de cercle, sauf que les coefficients des termes de degré deux ne sont pas égaux...
La courbe ressemble à un cercle mais comme écrasé, ce que l'on pourrait appeler un ovale...

3.4 Prise de hauteur

Nous sommes confrontés à une situation dans un plan avec :
— un cercle qui grandit dans le temps (positions possibles du lapin) ;
— une droite qui avance (front avant du camion).

L'animation Géogébra est sympathique, mais le présent article est statique. En outre, même l'animation ne permet pas d'embrasser tous les instants en même temps, pour cela il faudrait être Dieu... ou mathématicien.

Ajoutons à notre repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ le vecteur $\vec{k}$ pour repérer l'espace-temps à trois dimensions avec $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où l'axe du temps est dirigé vers le haut. On obtient la représentation suivante :



Le paramètre t est remplacé par la troisième dimension, verticale.

— Le plan rouge (d'équation $y = 7 - \frac{50}{3}t$) représente la position du front avant du camion,
— le plan vertical bleu-vert (d'équation $x = 4$), représente le côté de la route opposé au lapin,
— le cône vert (d'équation $x^2 + y^2 = \left(\frac{25}{3}t\right)^2$) quant à lui représente les positions du lapin selon toutes les directions possibles. On sait que c'est un cône car si on multiplie les trois nombres x, y et t par un même nombre, l'équation reste équivalente (à même valeur de vérité). On sait que c'est un cône de révolution d'axe $(O,\vec{k})$ car si on fixe la valeur de t, on obtient l'équation d'un cercle.

Pour que le lapin s'en sorte et ait traversé la route, il faut qu'il ait dépassé le plan bleu-vert mais qu'il se situe toujours en dessous du plan rouge. On peut voir cette petite zone de survie dans l'espace-temps sur le cône vert, sous le plan rouge et à droite du plan bleu-vert (3).

Ainsi on visualise simultanément les lieux et les moments de chaque situation, en particulier pour les impacts et les survies.

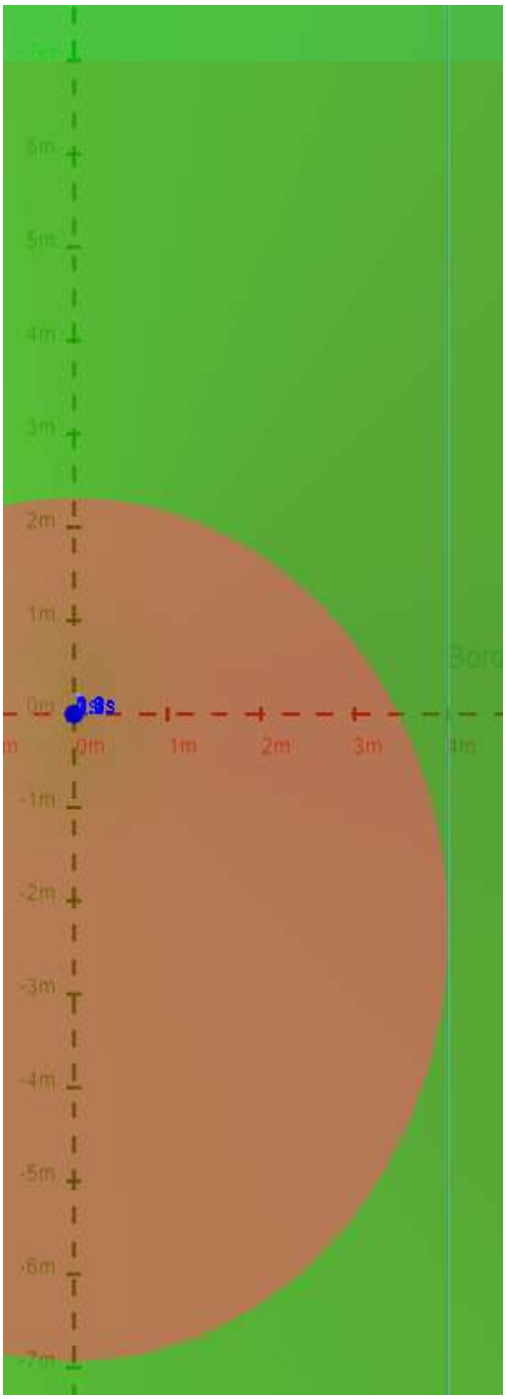
Tous les résultats observés graphiquement peuvent se retrouver algébriquement à l'aide des équations.

La vue de dessus ci-contre écrase le temps et est conforme à celle obtenue au paragraphe précédent.

On s'aperçoit que la courbe rose obtenue au paragraphe précédent matérialisant l'ensemble des points d'impact du lapin et du camion est une portion du projeté orthogonal sur le plan d'équation $t = 0$ de l'intersection du plan rouge avec le cône vert.
Or l'intersection d'un plan et d'un cône est ce que l'on appelle une conique. Quand l'angle formé entre l'axe du cône et le plan est supérieur à l'ouverture du cône, cette conique s'appelle une ellipse. C'est le cas ici car le camion va plus vite que le lapin.

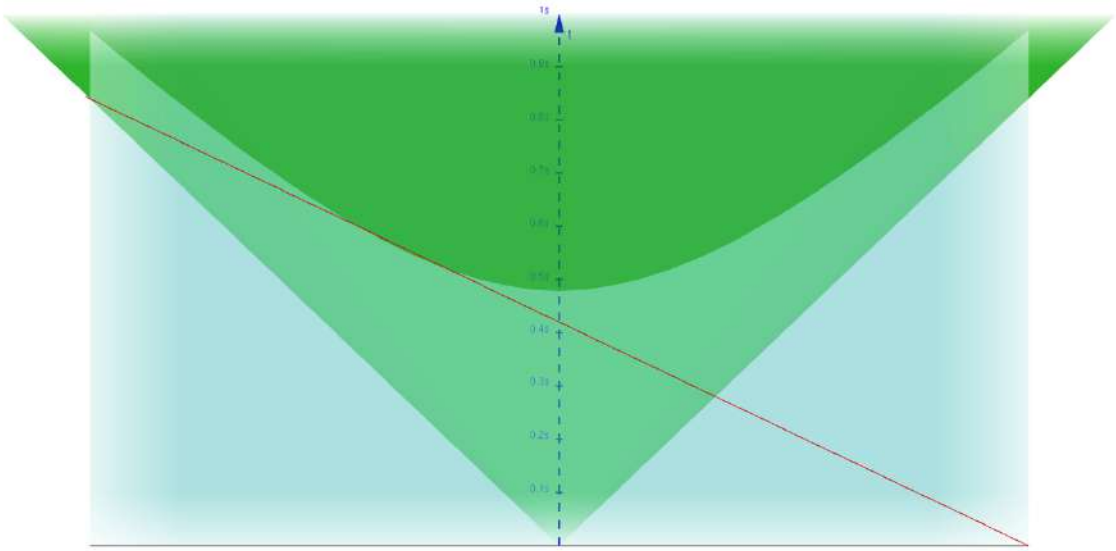
Si le lapin allait plus vite que le camion, la courbe des impacts serait une branche d'hyperbole, et s'il allait à la même vitesse que le camion, la courbe des impacts serait une branche de parabole.

On démontre que le projeté orthogonal d'une ellipse sur un plan est encore une ellipse (on peut le faire à l'aide des équations). On en déduit que la courbe rose, appelée en langage courant "ovale", s'appelle mathématiquement une ellipse.



La vue de côté ci-dessous est prise de derrière le bord de la route à atteindre (4). On peut y visualiser les scénarios du *lapin suicidaire* (à droite) et du *lapin trouillard* (à gauche), et même le moment où le *lapin crétin* se fera écraser par le camion (au milieu).
On peut ainsi, par des considérations purement géométriques, établir en particulier que

— le *lapin trouillard* se fera percuter après 7 mètres de course ;
— le *lapin suicidaire* se fera percuter après $\frac{7}{3} \approx 2,67$ mètres de course ;
— l'espérance de vie du *lapin trouillard* est trois fois plus grande que celle du *lapin suicidaire*



On observe aussi, à l'intersection du plan bleu-vert et du cône vert, le lieu dans l'espace-temps des arrivées théoriques du lapin de l'autre côté de la route. On pourrait démontrer qu'il s'agit d'une branche d'hyperbole. Presque tous ces lieux sont situés "au-dessus" du plan rouge, c'est à dire après le passage du camion, le lapin ne les atteindra pas. La zone de survie est délimitée par les points d'intersection de l'hyperbole et de la droite rouge (intersection du plan rouge et du plan bleu-vert).

4 Conclusion

Nous avons vu qu'un problème de lapin tentant d'échapper à un camion pouvait s'appréhender en paramétrant la situation à l'aide du temps et des coordonnées du lapin dans un repère judicieusement choisi. La manipulation des équations obtenues a permis de répondre à la question vitale qui se posait.
Un enrichissement de la vision du problème a consisté à envisager toutes les directions possibles du lapin. La manipulation des équations a fourni l'équation de la courbe des impacts possibles entre le camion et le lapin. Cette courbe et cette équation permettent d'obtenir des réponses à diverses questions. Cependant, cette équation et cette courbe ne figurent pas dans notre répertoire de connaissances.
Après avoir considéré simultanément toutes les directions possibles du lapin, nous avons considéré en plus tous les instants de toutes les courses possibles en utilisant le fait que le problème était plan, et que nous avons quelques repères mentaux et quelques connaissances dans l'espace. Nous avons ainsi pu déterminer que la courbe des impacts appartient à la famille des coniques, et à la sous-famille des ellipses.

En conclusion de la conclusion nous retenons ceci :

Le chemin le plus court n'est pas toujours la meilleure route vers le succès.

Notes d'édition

(1) On suppose dans tout l'article que le lapin se déplace en ligne droite (comme indiqué dans la présentation des résultats). Cela est naturel, puisque si le lapin arrive en un point L avant le camion ($Y > y$) il y arrivera a fortiori en prenant le chemin le plus court ; dans ce cas on a $Y(t) > y(t)$ tout le long du trajet, puisque la vitesse du lapin est inférieure à celle du camion, et le lapin ne peut pas non plus avoir été percuté sur son chemin.

(2) Formellement, on a calculé les ordonnées y non pas du point d'arrivée sur l'autre bord de la route ($x = 4$), mais celles du point où le lapin et le camion se trouvent à la même hauteur ($Y(t) = y(t)$). Mais ces deux ordonnées varient dans le même sens quand le lapin modifie sa direction et pour les valeurs limites -3 et $-5/3$ le lapin se trouve à la même hauteur que le camion pour $x = 4$, et elles coïncident. Les ordonnées y à viser par le lapin sur le bord $x = 4$ sont donc bien aussi celles comprises entre -3 et $-5/3$.

(3) Sur la figure, il n'est représenté que la partie du plan bleu située en-dessous du plan rouge, limitée par leur intersection $x = 4$, $y = 7 - 50\,t/3$. Le cône est représenté en vert brillant pour sa partie en-dessous du plan rouge et pour la partie au dessus, le plan rouge apparaît en couleur sombre.
La petite zone verte à droite de l'intersection des plans rouge et bleu correspond donc aux points où le lapin peut dépasser le bord opposé de la route sans être atteint par le camion.

(4) Dans cette figure, la direction de projection est parallèle à l'axe Ox et on a en abscisse la hauteur y ; le plan bleu est vu frontalement et le plan rouge apparaît comme une droite (la droite rouge).
Dans le rectangle où le plan bleu est représenté, la partie du cône derrière le plan bleu ($x < 4$) est représentée en plus clair. La limite des zones claire et foncée est l'intersection du cône avec le plan bleu ; comme ce plan est parallèle à l'axe du cône, il s'agit bien d'une branche d'hyperbole.
Enfin, les trajectoires possibles du lapin sont les génératrices du cône et sur chacune d'entre elles on peut voir le point d'arrivée au bord opposé de la route (intersection avec la branche d'hyperbole) et le point où le camion se trouve à la même hauteur que le camion (intersection avec la droite rouge).

La couverture du Serpent

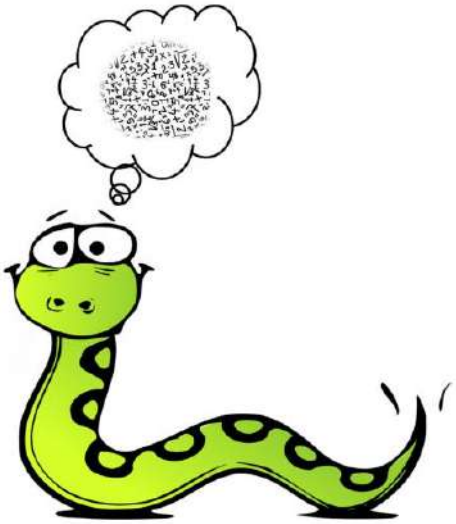
Année : 2019-2020

Safa A., Solène D,. Stella F., Virgile G., Perrine V. et James G.
(classes de de 4e et TS)

Établissement : Lycée van Gogh de La Haye (Pays-Bas)

Enseignants : Lise Boissonnet, Mathieu Buchwald et Florence Decool

Chercheur : Rogier Bos, Université d'Utrecht



Mise en situation :

Un petit serpent de 15 centimètres de long à froid lorsqu'il dort la nuit.
Son maître veut alors lui tricoter une couverture. Cependant il n'a pas beaucoup d'argent et il veut donc lui tricoter la plus petite couverture possible.
On note que le petit serpent peut se torde dans tous les sens et n'a pas de largeur et que la couverture peut être bougée à n'importe quel moment pour couvrir le serpent.

Problématique :

Il nous est demandé de trouver la forme de la couverture afin que son aire soit minimale.

I. Un état des lieux

A) Les données de l'énoncé

Après avoir pris connaissance du sujet et des demandes nous avons fait un état des lieux des données de l'énoncé.

On sait alors que :

- Le serpent fait 15 cm de long
- Le serpent n'a aucune largeur donc il est représenté par une ligne
- Le serpent peut prendre toute forme possible tant qu'il fait 15 cm de long et qu'il ne se divise pas en morceaux
- La couverture peut être bougée à tout instant

B) La demande et les contraintes

On note ensuite la demande et les contraintes à suivre.

La demande et les contraintes sont :

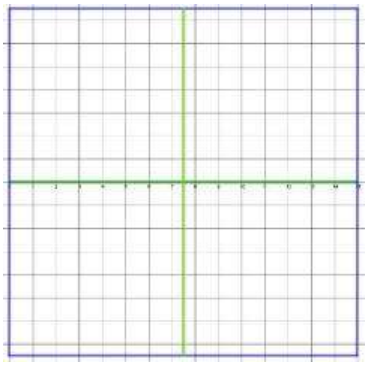
- Trouver une forme de la couverture du serpent
- L'aire de la couverture doit être minimale
- Le serpent doit être entièrement recouvert par la couverture

II. Premières réflexions

A) La couverture initiale : un carré

Notre toute première réflexion fut celle d'un carré de 15 cm sur 15 cm.

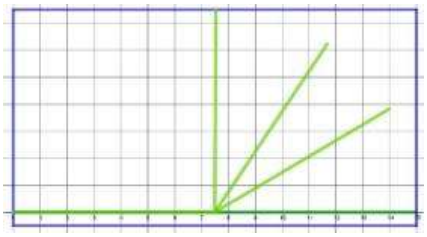
On s'est vite rendu compte que la couverture pouvait recouvrir le serpent dans toutes les positions mais elle était trop grande.



B) Seconde idée : un rectangle

Pour réduire la couverture, nous avons pensé à un rectangle de 15 cm sur 7,5 cm.

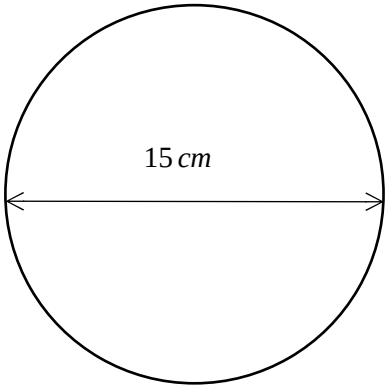
Mais de nouveau, la couverture pouvait recouvrir le serpent dans toutes les positions mais elle était toujours trop grande.



C) Troisième idée : le disque

Nous avons décidé de suivre une stratégie qui part de la plus grande surface possible en réduisant l'aire de la couverture au fur et à mesure de nos recherches.

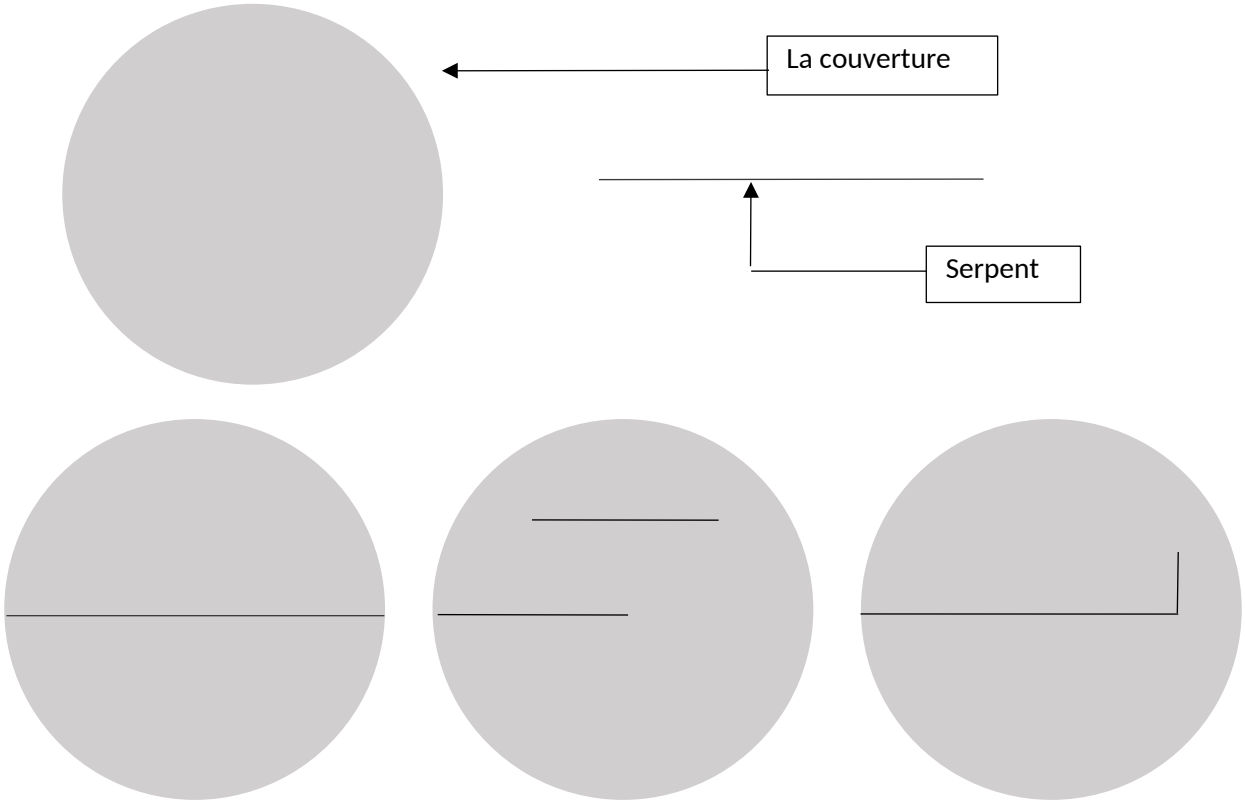
On a un serpent de longueur $l=15\,cm$; on prend donc pour forme initiale un disque de diamètre $d=15\,cm$.



Le serpent ayant une longueur fixe il ne peut donc pas être plus long que sa longueur initiale.

Si le serpent se plie sa longueur diminue donc il peut être recouvert par le disque initial.

Voici quelques exemples schématisés :



D) La première réduction : du disque au demi-disque

Après être parti d'une couverture représentée par un disque de diamètre correspondant à la longueur du serpent, on se rend compte que dès lors que le serpent se tord ou prend une forme autre que la ligne droite il peut rentrer dans un demi-disque.

Le serpent prend deux formes qui sont les plus importantes pour le début de ce raisonnement :

- Le serpent ne se plie pas : la couverture doit donc avoir une partie qui fait 15 cm de long
- Le serpent se plie en deux avec un angle de $\alpha = 90°$, il est donc composé de deux parties reliées de longueur $l = 7{,}5\,cm$: la couverture doit donc avoir une hauteur de $h = 7{,}5\,cm$ au milieu de sa longueur.

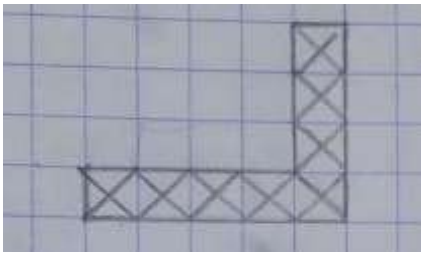
On passe donc de : à :

III. Le serpent en pixels

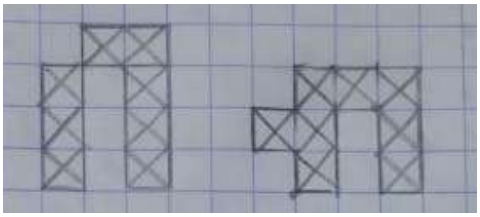
A) Explication de la méthode

Nous avons ensuite décidé de modéliser le serpent en pixel.

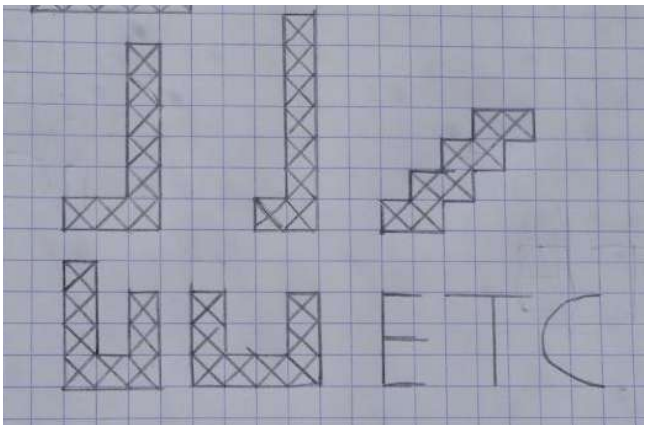
Exemple : Voici une rangée de 8 pixels (1 pixel = 1 carreau) qui représente un serpent.
Le serpent peut avoir des formes différentes tout en gardant le même nombre de cases.



Il faut donc que nos pixels se suivent, sans se détacher (comme sur l'image ci-dessous).



Pour nous rapprocher de la couverture de notre serpent nous devons en imaginer toutes les formes possibles.

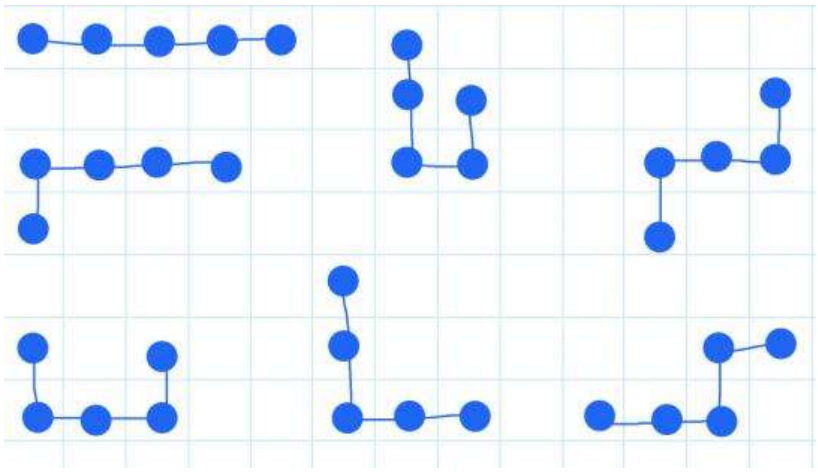


Après avoir trouvé toutes les possibilités, on va les regrouper et créer la forme la plus petite possible pouvant abriter tous les pixels.

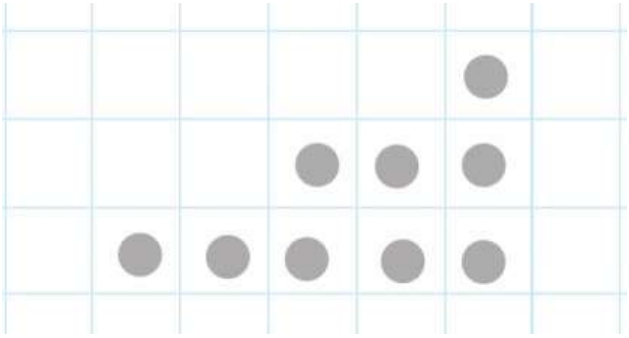
B) Succession de tests avec différentes tailles

On commence par la plus simple :

<u>Un serpent de 5 pixels</u>

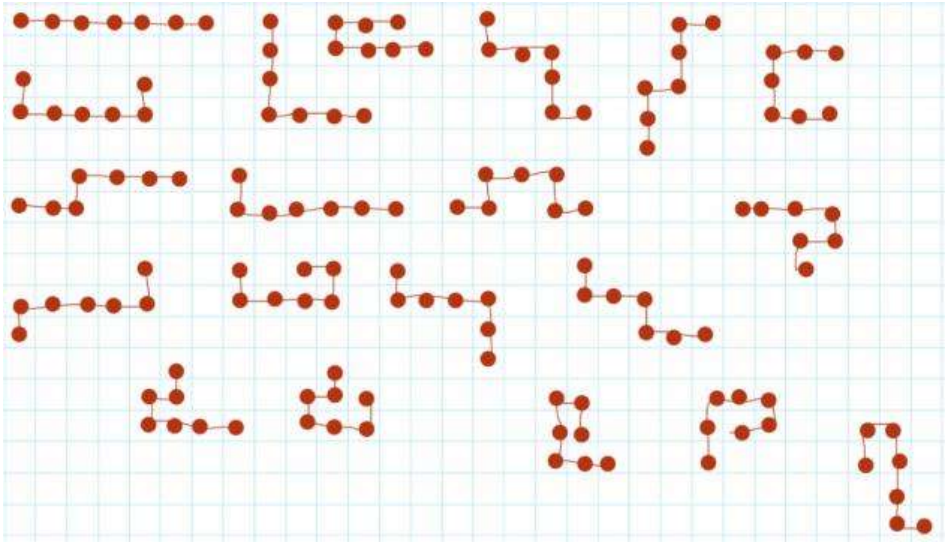


Après avoir trouvé toutes les positions que pouvait prendre un serpent de 5 pixels nous avons obtenu la couverture suivante :

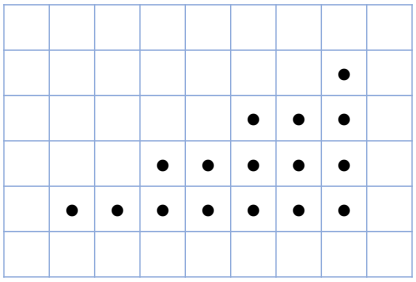


Un serpent de 7 pixels

Avec un serpent de 7 pixels on trouve les positions suivantes :

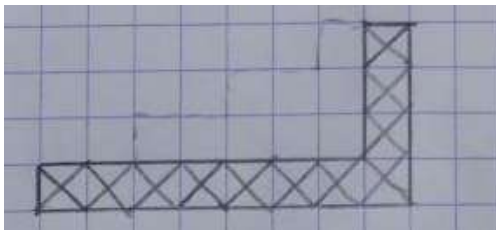


Ce qui nous permet d'obtenir la couverture suivante :

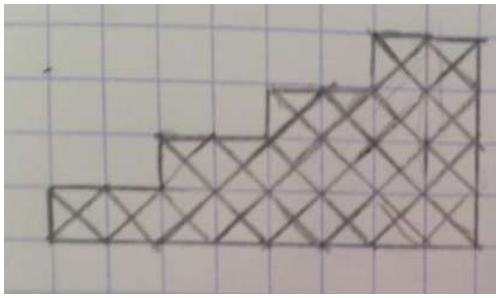


Un serpent de 8 pixels

Logiquement la forme ne dépassera pas les 8 pixels de longueur et les 4 pixels de hauteur.



Puis on ajoute les formes restantes. On obtient le résultat suivant :

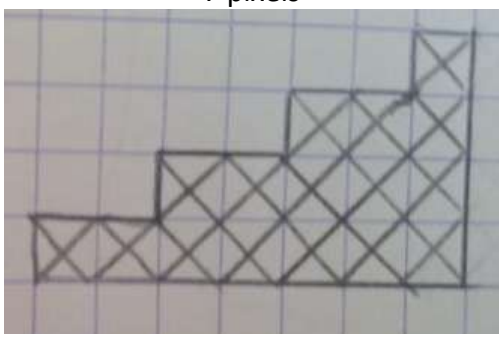


C) Observation : Une forme qui revient

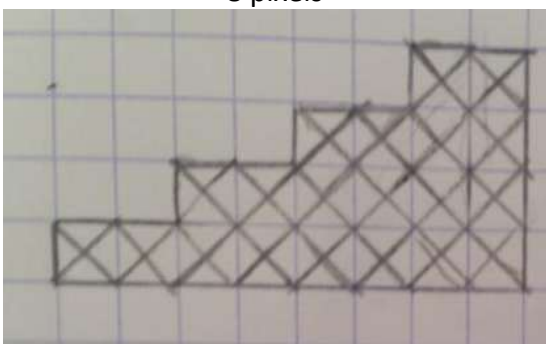
Nous avons constaté que :

- si la longueur du serpent est paire : 2n , on aura un escalier de longueur 2n, et dont la marche la plus haute sera constituée de n pixels (sur deux rangées)
- si la longueur du serpent est impaire : 2n+1 , on aura un escalier de longueur de 2n+1 et dont la marche la plus haute sera constituée de n+1 pixels (sur une rangée)

7 pixels

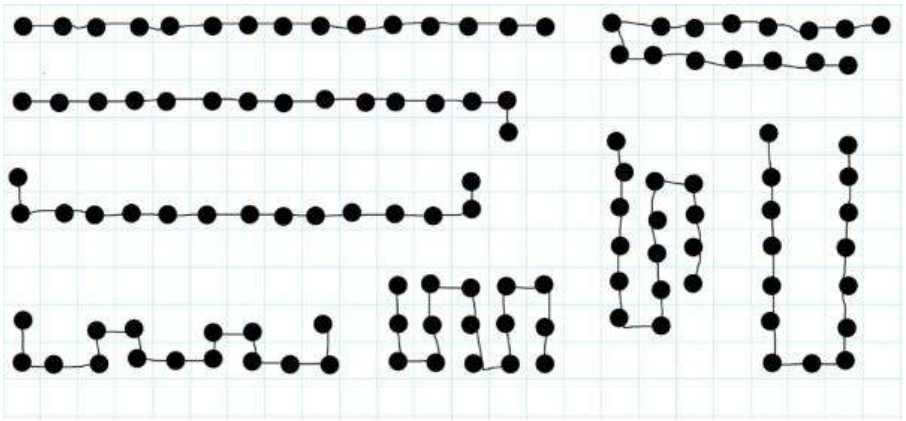


8 pixels

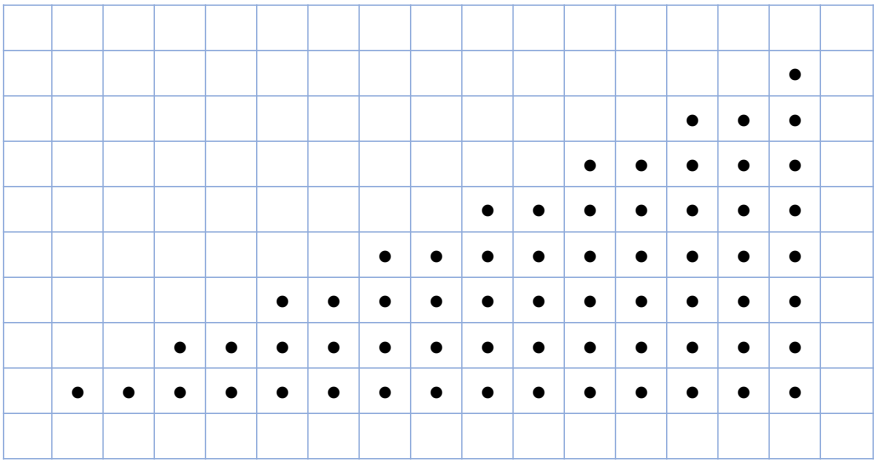


D) Avec un serpent de 15 pixels

Voici quelques positions que le serpent de 15 pixels peut prendre :



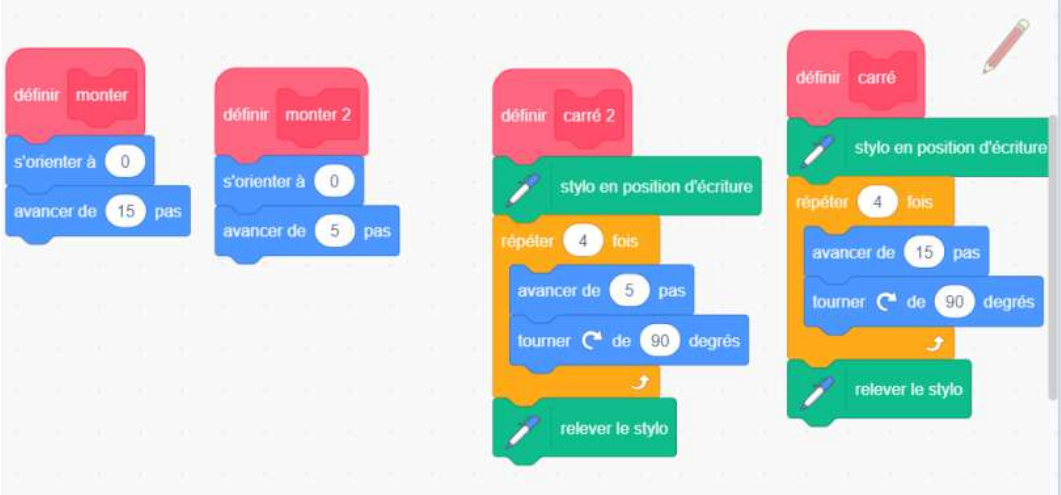
En suivant le même raisonnement précèdent on trouve alors la couverture :



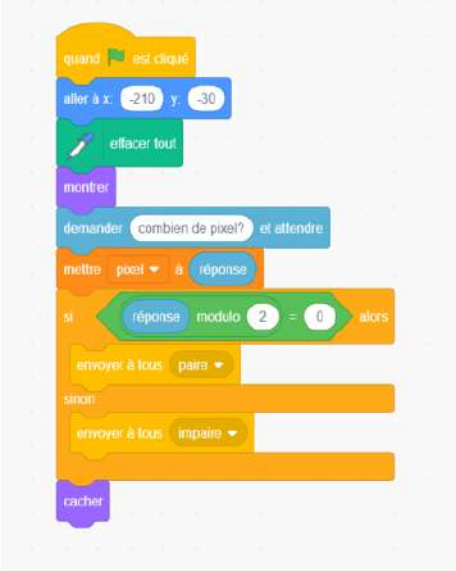
IV. Un programme avec « Scratch »

Le groupe des collégiens a continué ses recherches en modélisant la couverture du serpent à l'aide d'un programme effectué sur « scratch »
Voici ci-dessous les captures d'écran de l'évolution du programme :

➔ Blocs facilitant le programme

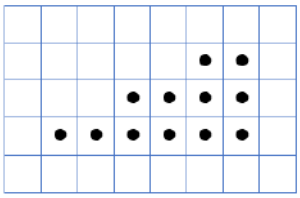


➔ Programme principal qui va envoyer des instructions différentes en fonction de la parité (pair ou impair) du nombre de pixels donné par l'utilisateur

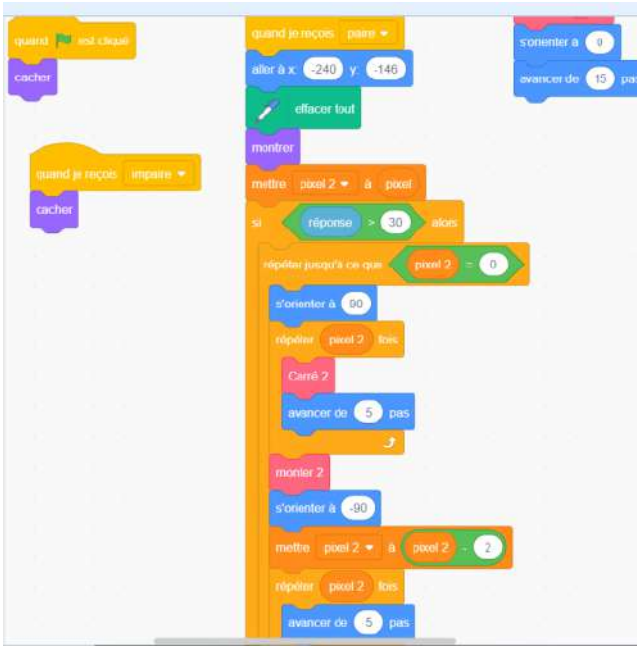


➔ Voici un extrait du programme final : Programme en cas de nombre pair

Rappel de la forme de la pyramide pour 6 pixels

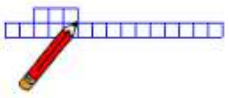


On crée une boucle qui va dessiner des carrés (représentant les pixels)
La première ligne correspond au nombre de pixels donné puis la ligne suivante a deux pixels en moins et ainsi de suite jusqu'à qu'il n'y a plus de pixels à dessiner.

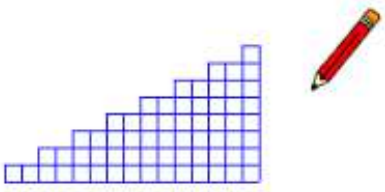


Pour un programme en cas de nombre impair, on s'arrête avec un pixel

➔ Finalement voici le programme permettant d'enclencher les deux autres programmes.



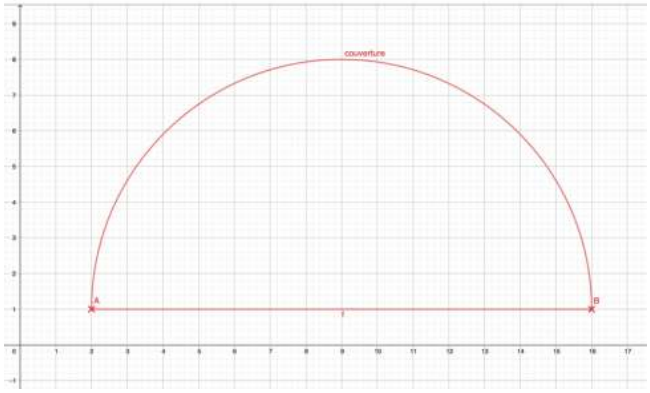
Le crayon trace les 15 pixels de la base, puis 13 pixels…



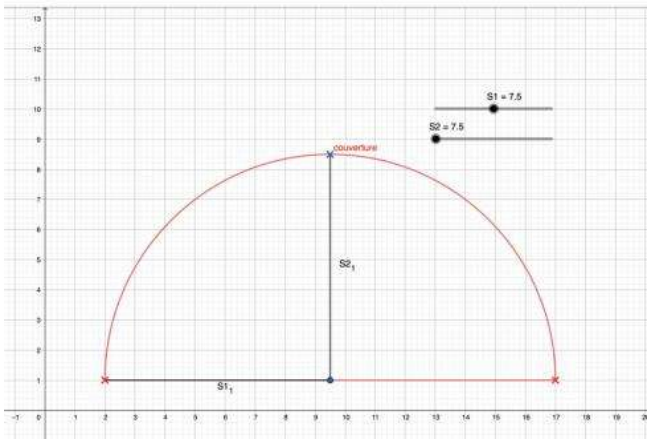
A la fin, le crayon a tracé la pyramide de base 15 (2x7+1) et de hauteur 8 (7+1)

V. Quelques pistes non concluantes

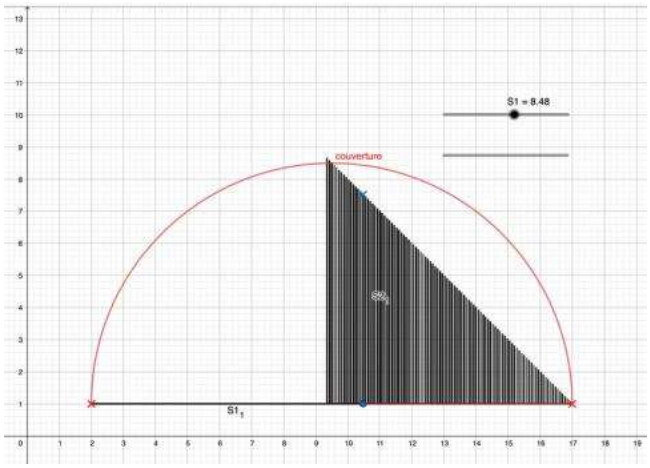
A) Recherche avec GeoGebra



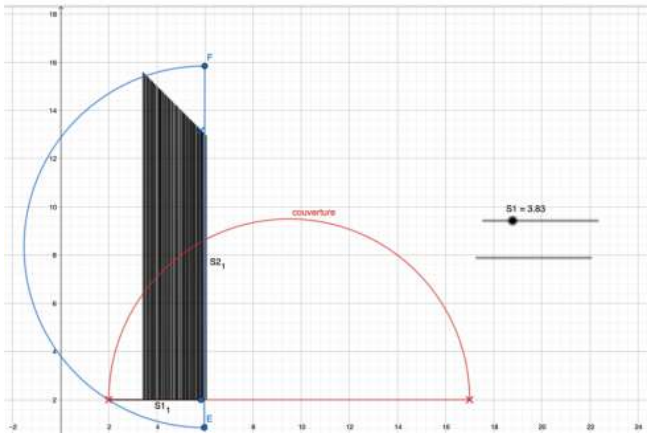
Après avoir suivi la première démarche et avoir eu un aspect approximatif de la forme du serpent nous voulions avoir une vision évolutive du mouvement du serpent dans la couverture étant un demi-disque.
En utilisant l'application « GeoGebra » on trace dans un premier temps la couverture de diamètre $d = 15cm$.



On a ensuite tracé le serpent en deux segments $S1_1$ et $S2_2$. Ces deux segments sont variables grâce à des curseurs S1 et S2.
Pour commencer on prend un exemple simple, le serpent se plie en deux parties avec un angle de $\alpha = 90°$.



On observe que lorsque les deux segments varient le serpent reste couvert par la couverture. Cependant on peut noter qu'il existe certaines parties de la couverture où le serpent ne passe pas (cas où il se plie avec un angle droit en deux parties).



Enfin on observe que les traces du serpent qui dépassent de la position de la première couverture (demi-disque rouge) peuvent être recouvertes lorsque l'on modifie la position de la couverture (demi-disque bleu).

Nous avons fait cette simulation avec plusieurs modélisations du serpent (lorsqu'il se plie en trois parties avec des angles et des longueurs variables, etc.). Cependant nous nous sommes rendu compte rapidement que les traces du serpent étaient incontrôlables et que nous n'arrivions pas à travailler avec cette méthode.

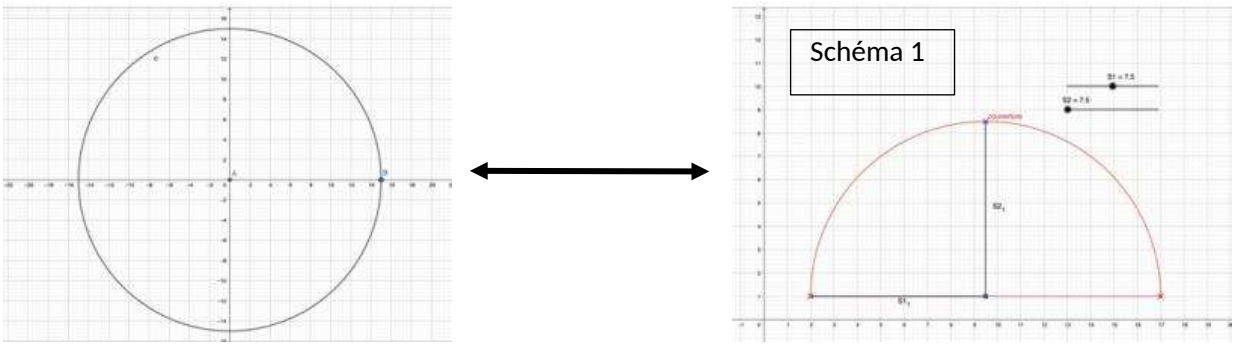
B) Le mouvement du serpent : une fonction ?

Nous avons ensuite eux l'idée de modéliser le mouvement aléatoire du serpent par une fonction. Nous aurions ensuite utilisé nos connaissances sur le chapitre des « Intégrales » afin de trouver l'aire sous la courbe représentative de la fonction. Cependant cette idée a pris fin assez rapidement car nous n'avons pas eu d'idées sur l'utilisation de cette donnée.

VI. Vers le concept de la demi-ellipse

Nous allons enfin vous présenter la réflexion du groupe des lycéens.

A) Introduction



Lors de nos recherches on a pu passer d'une couverture circulaire de diamètre $d=15cm$ à un demi-disque toujours du même diamètre.

Nous nous sommes focalisés sur l'idée que le serpent devait se trouver comme ci-dessus (schéma 1) lorsqu'il est plié avec un angle droit en deux parties de même longueur.
Cependant en faisant faire une rotation de la couverture sur le serpent comme ci-dessous (schéma 2) on peut voir que l'on peut rogner des parties du demi-disque représentant la couverture obtenue lors de la deuxième étape. En effet il suffit que le serpent rentre sous la couette non pas en « L » mais en « V ». Par symétrie il suffit que les deux segments équidistants du serpent soient à $45°$; on peut donc éliminer certaines parties de la hauteur du demi-disque.
Les deux extrémités du serpent sont séparées au maximum de 15 centimètres et au minimum ils se touchent.

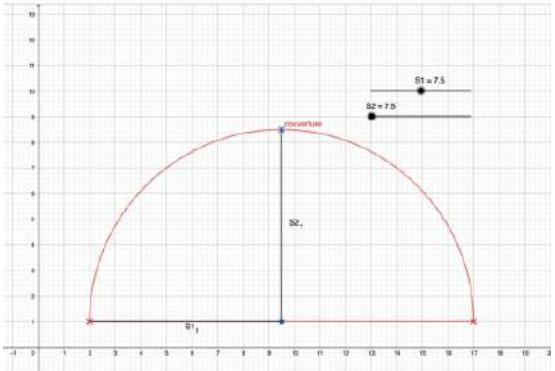
On peut donc se rattacher à une propriété des ellipses qui indique que la somme des distances de n'importe quel point de l'ellipse aux deux foyers vaut une constante.

/!\ <u>Problème :</u> Les deux foyers qui représentent les deux extrémités du serpent sont mobiles, en effet les deux foyers peuvent se situer n'importe où à une distance de 15 à 0 centimètre.

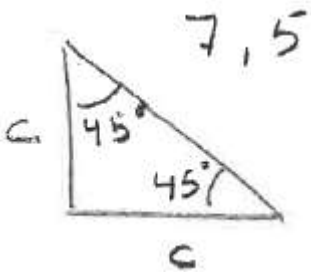
Pour trouver la plus petite surface et donc la plus petite aire qui fonctionne pour la couverture il faut si possible trouver une « union » de toutes les ellipses qui ont des foyers distants entre 0 et 15 cm et une somme des distances aux foyers de 15 centimètres.

B) Première idée

Nous avons décidé de vérifier si dans plusieurs cas le serpent pouvait rentrer dans la couverture ayant une forme de demi-ellipse.



Cependant en faisant faire une rotation de la couverture sur le serpent comme ci-dessous (schéma 2) on peut voir que l'on peut rogner des parties du demi-disque représentant la couverture obtenue lors de la deuxième étape.



$$7{,}5=\sqrt{2}\,c$$

$$c=\frac{7{,}5}{\sqrt{2}}\approx 5{,}3033$$

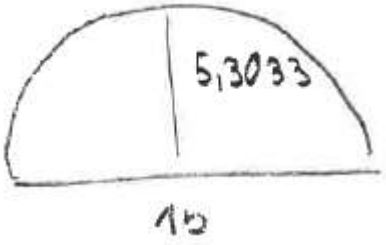
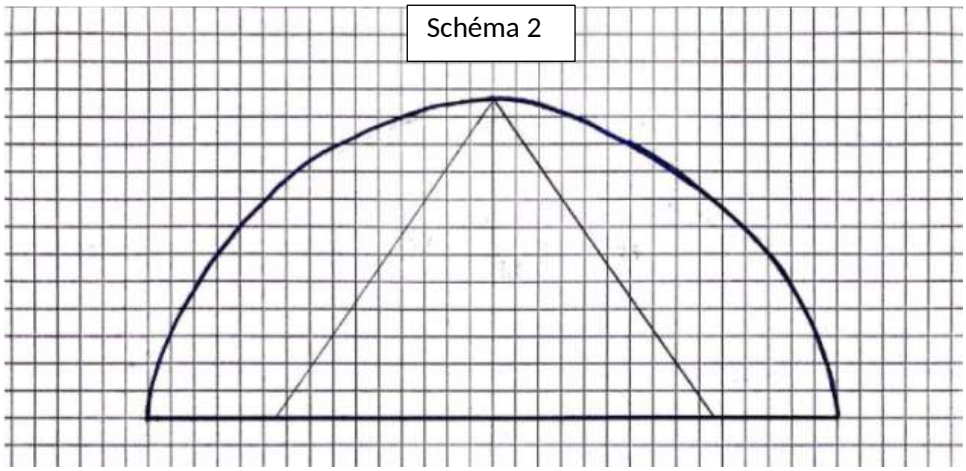


Schéma 2



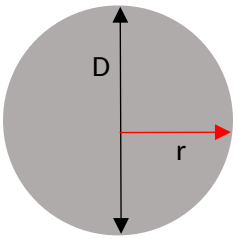
C) Deuxième idée : le serpent « en cercle »

Lors de notre raisonnement nous avons ensuite voulu vérifier si dans le cas où le serpent se mettait sous la forme d'un cercle « parfait » il passait encore sous la couette vue dans « première idée ». On sait que le serpent fait 15 centimètres de long donc le périmètre du cercle sera de $p=15\,cm$.

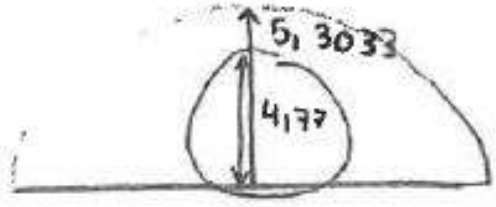
De plus on sait que pour un cercle $p=2\pi r$, ce qui équivaut à $p=\pi D$.

On résout donc l'équation $15=\pi D \Leftrightarrow \frac{15}{\pi}=D \Leftrightarrow D\approx 4{,}77$

On sait donc que lorsque le serpent se met en cercle le diamètre du cercle est d'environ $D\approx 4{,}77\,cm$.



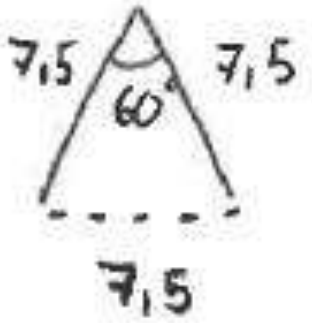
Or la hauteur de la couverture est de $h=5{,}3033$



On peut donc en conclure que lorsque le serpent se met en cercle il peut être couvert par la couverture on ne doit donc pas modifier pour le moment la forme de la couverture trouvée lors de la première idée.

D) Troisième idée : Le serpent se plie avec un angle de 60°

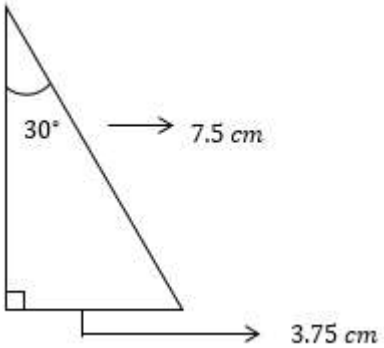
Dans une continuité du raisonnement, on prend le cas où le serpent est plié en deux parties de même longueur avec un angle de 60°.



D'après le schéma ci-dessous (schéma 3) on peut voir que l'on va trouver la hauteur du triangle formé par les deux côtés du serpent et le bas de la couverture en utilisant le théorème de Pythagore.

On cherche c la hauteur du triangle. On va donc résoudre :

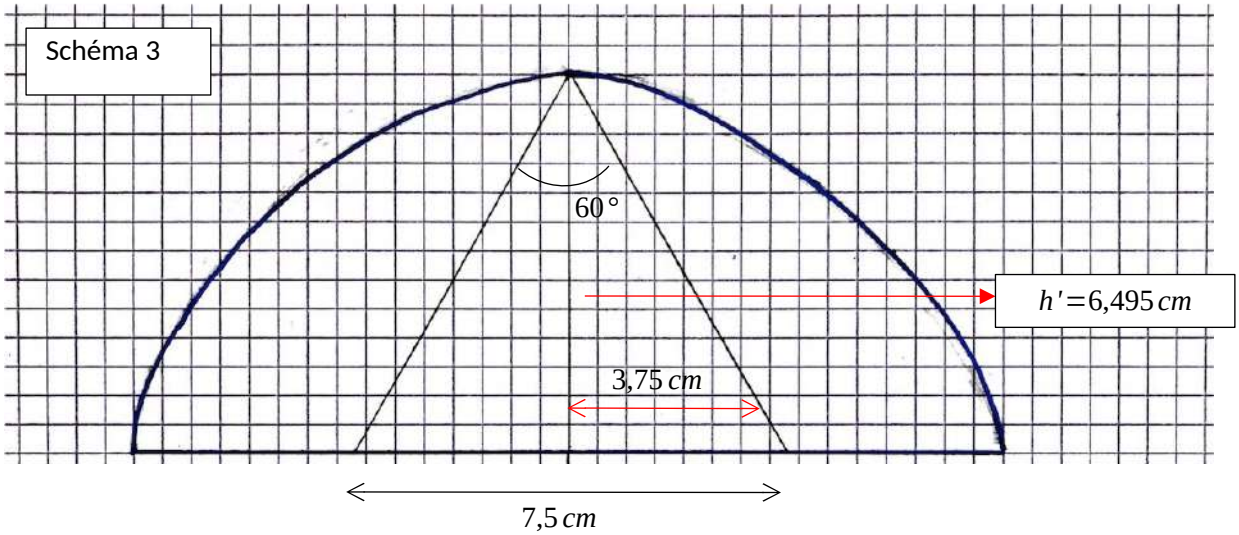
$$3{,}75^2+c^2=7{,}5^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2=7{,}5^2-3{,}75^2$$
$$\Leftrightarrow \quad c=\sqrt{7{,}5^2-3{,}75^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad c\approx 6{,}495$$



Or la hauteur de la couverture pour le moment est de

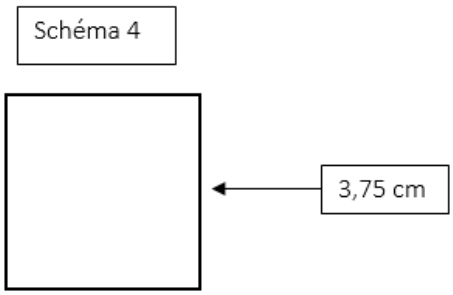
$$h\approx 5{,}03033 < c\approx 6{,}495.$$

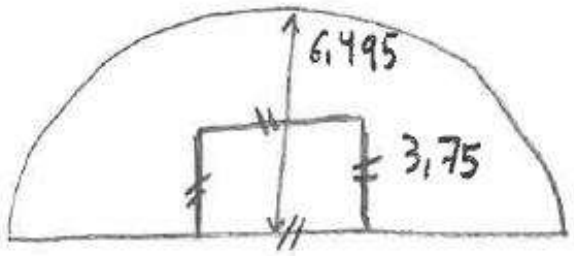
On doit donc modifier la hauteur de la couverture, et on obtient une demi-ellipse avec une base de longueur $l=15\,cm$ et de hauteur $h'=6{,}495\,cm$.



E) Quatrième idée

Dans cette partie on va vérifier si lorsque le serpent se met en forme de carré comme sur le schéma ci-dessous (schéma 4) il peut rentrer sous la forme de la couette obtenue lors de la troisième idée.





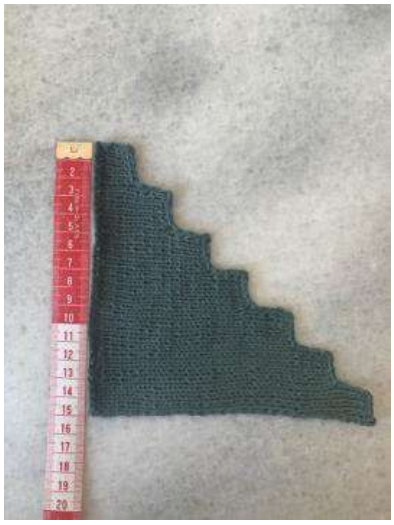
Le serpent rentre donc bien dans la couverture étant une demi-ellipse de base $l=15\,cm$ et de hauteur $h'=6{,}495\,cm$ car $h'=6{,}495>3{,}75$.

VII. Conclusion

En conclusion on obtient deux couvertures différentes pour le serpent qui résultent de nos recherches respectives du groupe des collégiens et du groupe de lycéens.

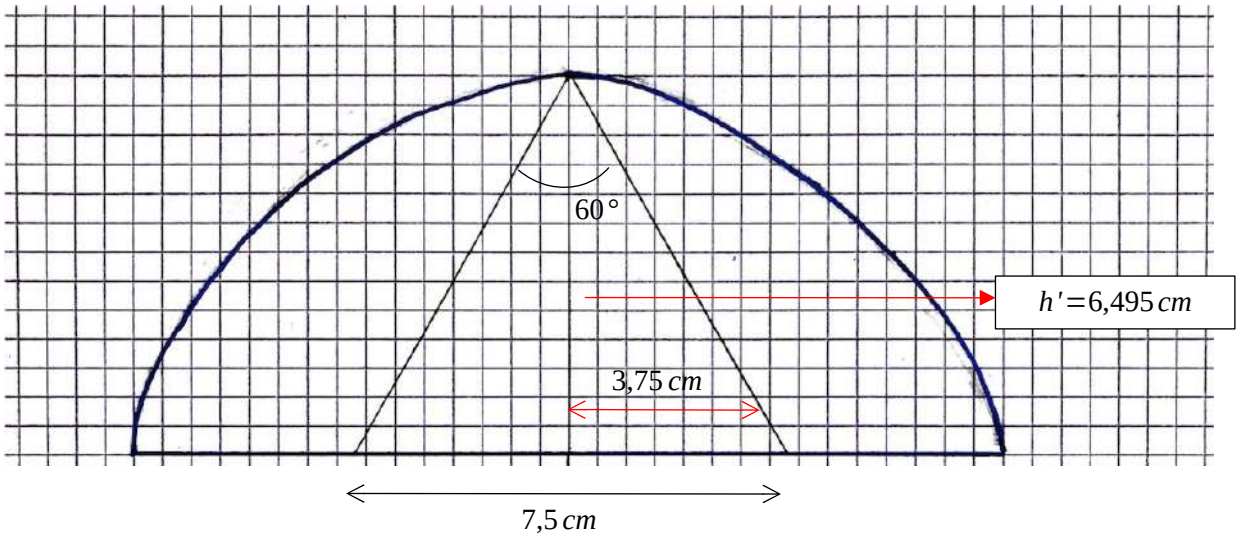
Le groupe des collégiens a obtenu à l'issue des recherches la couverture suivante pour le serpent :

Cette couverture a une base de 15 centimètres comme on peut le voir sur les photos ci-dessous :



Le groupe des lycéens a, quant à lui, obtenu à la suite de ses recherches de sa « théorie de la demi-ellipse » la couverture ayant une aire minimale pour le serpent étant la suivante :

La demi-ellipse a une hauteur $h'=6{,}495\,cm$ et une base de longueur $l=15\,cm$.



Merci à l'atelier

MATh.en.JEANS

de nous avoir permis de faire

des maths

autrement !

La valse des polygones

Année 2020 – 2021

Jules Guérin et Diduan Le Blay (classe de 3e)

Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

Enseignante : Florence Ferry

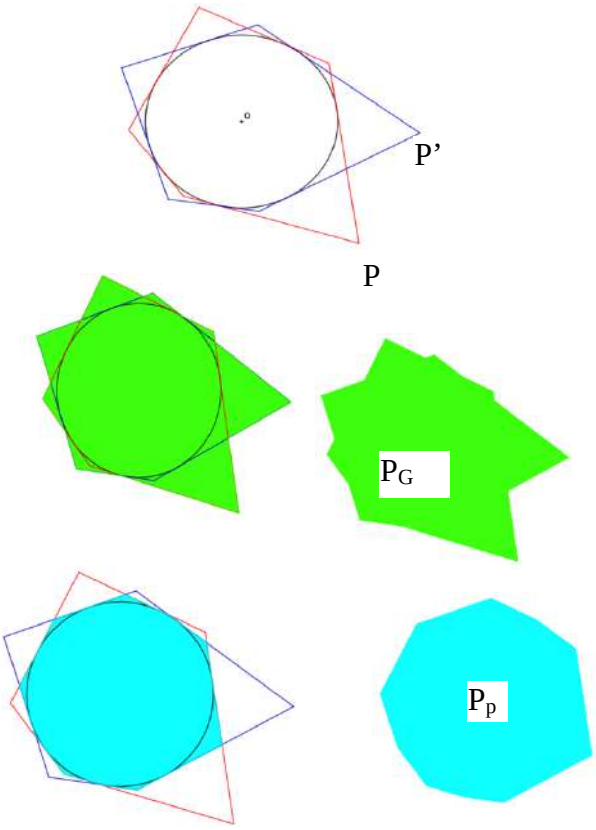
Chercheur : Olympio Hacquard, Université Paris-Saclay

<u>Le sujet</u> :
On construit un polygone P dont tous les côtés sont tangents à un cercle de centre O. On construit ensuite un polygone P' en faisant tourner P autour de O.

À partir de P et P' on obtient deux nouvelles figures :

- le « grand » polygone appelé P_G qui est l'union des deux polygones.

- le « petit » polygone P_P qui est l'intersection des deux.

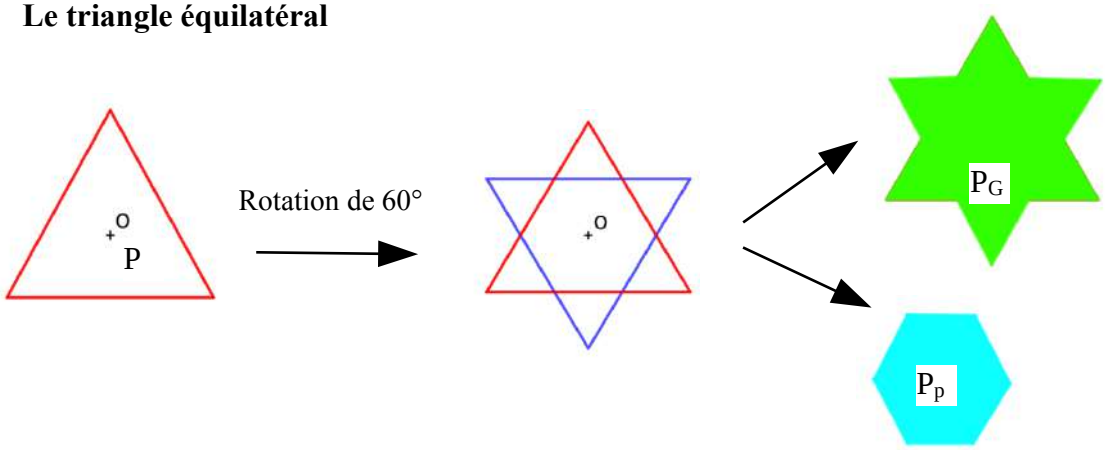


Etudier les différentes propriétés (formes possibles, périmètres, aires) des « grand » et « petit » polygones obtenus.

I – Etude des formes (1)

Pour commencer notre recherche, nous allons nous intéresser à la nature des « grand » et « petit » polygones obtenus. Nous allons étudier des figures simples avec une rotation particulière.

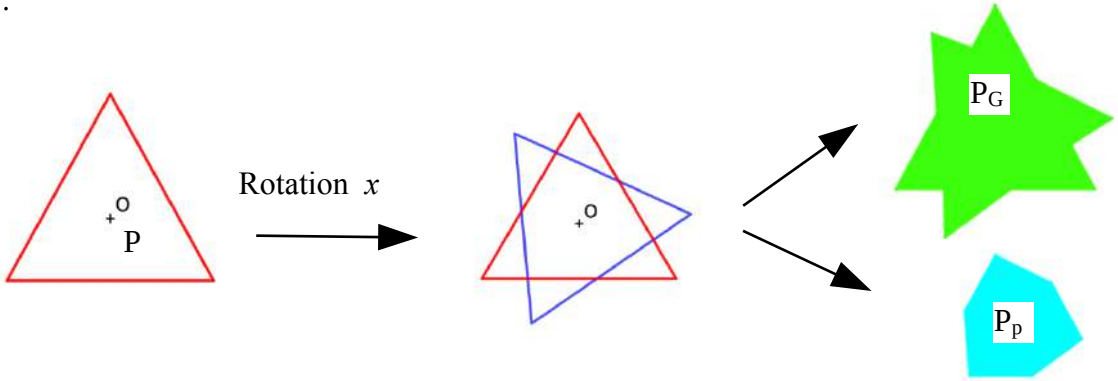
1) Le triangle équilatéral



Conclusion : P_G a 12 côtés et P_P en a 6 ; les deux polygones obtenus sont réguliers.

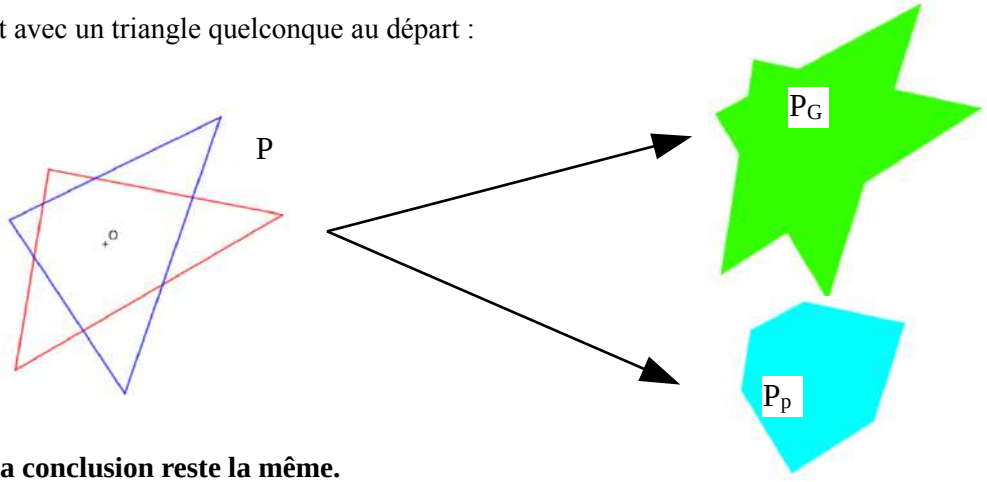
Remarque : lorsqu'on effectue une rotation de 120°, qui correspond à l'angle au centre du polygone régulier de départ, la figure reste inchangée ; P, P', P_G et P_P sont confondus.

Observons maintenant ce qu'il se passe si on fait une rotation d'angle *x* quelconque, autre qu'un multiple de 60°.



Conclusion : Les polygones obtenus ne sont pas réguliers mais nous avons encore 12 côtés pour P_G et 6 pour P_P.

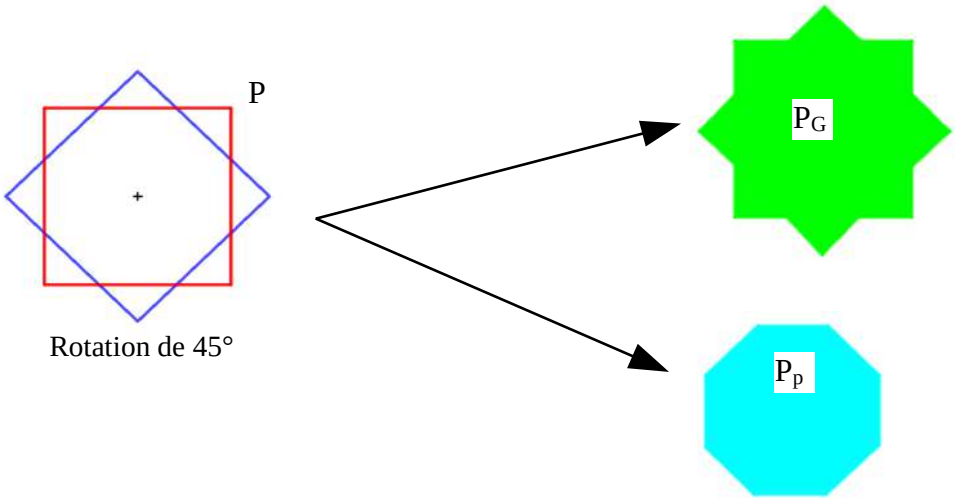
Et avec un triangle quelconque au départ :



La conclusion reste la même.

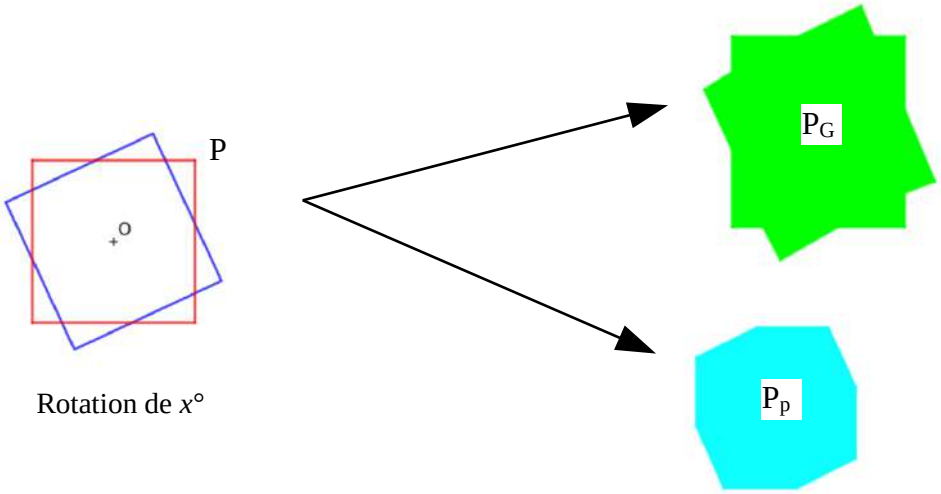
2) **Le carré**

Avec une rotation de 90°, qui correspond à l'angle au centre, il ne se passe rien.



Conclusion : Les polygones obtenus sont réguliers ; nous comptons 16 côtés pour P_G et 8 pour P_P.

Si la rotation est d'angle *x* quelconque, autre qu'un multiple de 45° :

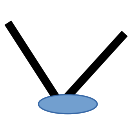


Conclusion : Les polygones obtenus ne sont pas réguliers mais nous avons encore 16 côtés pour P_G et 8 pour P_P.

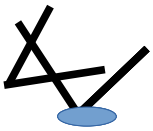
Après ces exemples, nous avons émis 2 conjectures :

Conjecture 1 : Lorsque P est un polygone régulier d'angle au centre *x* et que l'angle de rotation est *x*/2 (ou un multiple de x/2) alors P_G et P_p sont aussi des polygones réguliers ; en particulier si l'angle de rotation est *x*, alors la figure reste identique : P, P_G et P_p sont confondus.
Conjecture 2 : Si P a *n* côtés alors P_G a 4*n* côtés et P_p en a 2*n* (sauf pour les cas où la figure de départ et celle d'arrivée sont confondues).

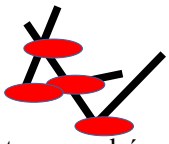
Regardons de plus près et tentons d'expliquer cette dernière conjecture. On va se concentrer sur un sommet du polygone de départ ; après la rotation, ce sommet en a « produit » 4 pour le grand polygone :



Au départ

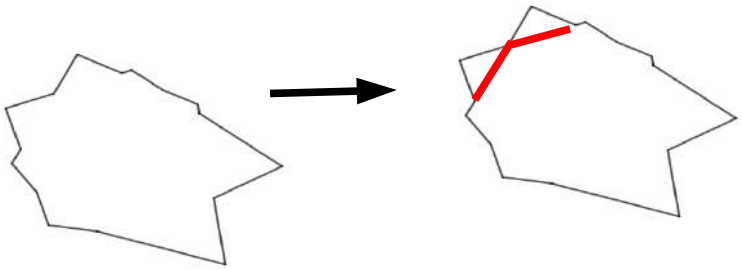


Après la rotation



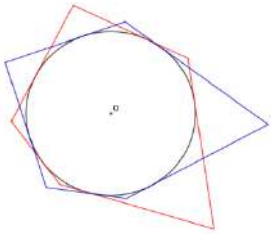
Sommets engendrés sur P_G

Maintenant, en joignant un sommet sur deux, on divise par 2 le nombre de côtés de P_G pour avoir le nombre de sommets de P_p.

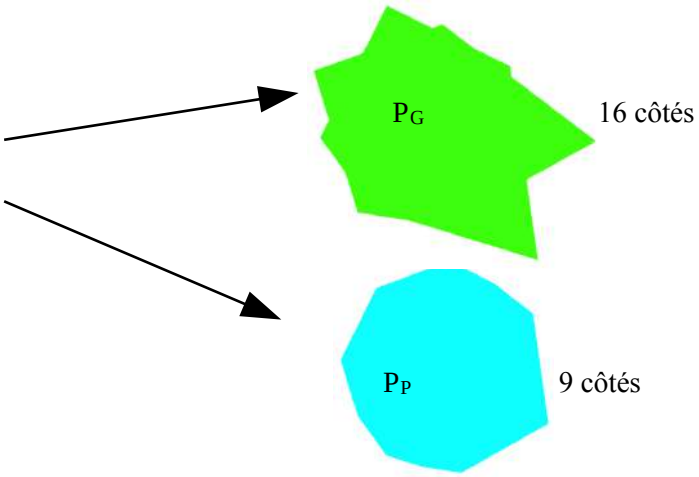


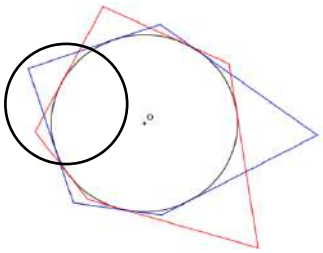
Malheureusement, à force de chercher, nous avons trouvé un contre-exemple qui rend notre conjecture 2 fausse. (2)

Nous avons pris un pentagone quelconque.



Pentagone (5 côtés) et sa rotation.





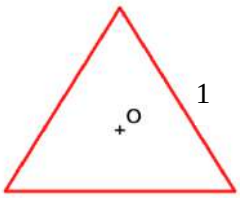
Ici par exemple, nous pouvons constater que le sommet du polygone de départ (en rouge) se retrouve à « l'intérieur », il ne va donc pas donner les 4 sommets attendus.

II – Etude des périmètres et des aires

Reprenons notre étude avec des figures particulières. Nous cherchons une relation entre le périmètre de P et ceux de P_G et P_p ; de même pour l'aire des trois figures.

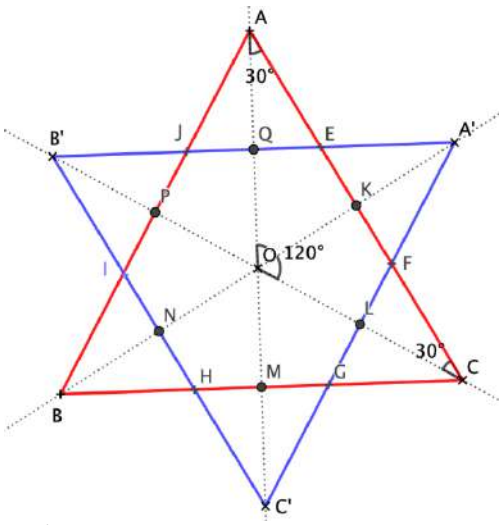
1) **Triangle équilatéral de côté 1**

Commençons par observer les périmètres. (3)



Périmètre de P : 3

On effectue une rotation de 60° dans le sens horaire.



$\widehat{KOC}=60°$ angle de rotation

$\widehat{OAC}=\widehat{OCA}=(180-120):2=30°$

Avec les noms donnés aux points sur la figure ci-contre :

[AO] et [OC] sont les rayons du cercle circonscrit à ABC donc : AO = OC.

AOC est donc isocèle en O et donc les angles de la base sont de même mesure ; de plus la somme des angles d'un triangle fait 180° donc :

$\widehat{AOC}=120°$ (4)

C'est l'angle au centre de P.

$\widehat{OKC}=180°-60°-30°=90°$

et $\widehat{OKA}=90°$

Donc : $\widehat{QEK}=360°-90°-90°-60°=120°$

Avec un raisonnement identique pour chacun des sommets, on démontre que tous les angles de P_p, qui est un hexagone, sont tous égaux à 120°.

Par la rotation :
Les images de [IJ], [JE], [EF], [FG], [GH] et [HI] sont respectivement :[JE], [EF], [FG], [GH], [HI] et [IJ]. La rotation conserve les longueurs donc : IJ = EF = FG = GH = HI.
Finalement, P_p a tous ses angles de même mesure et tous ses côtés de même longueur donc c'est un hexagone régulier.

$\widehat{A'EF}=\widehat{EFA'}=180°-120°=60°$, $\widehat{EA'F}=60°$

(A'B'C' est équilatéral comme ABC)

A'EF est donc un triangle équilatéral de même que FCG, GC'H, HBI, IB'J et JAE. Comme P_p a tous ses côtés de même longueur, P_G a également tous ses côtés de même longueur et son périmètre est bien deux fois plus grand que P_p.

Calcul des périmètres : AE = EF = FC donc EF = $\frac{1}{3}$.

Donc le périmètre de P_p est : $\frac{1}{3}\times 6 = 2$ et celui de P_G est : $2\times P_p = 4$.

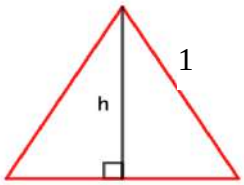
Conclusion :

$$\text{Périmètre de } P_G = 2\times \text{périmètre de } P_p$$

$$\text{Périmètre de } P_p = \frac{2}{3}\times \text{périmètre de P}$$

$$\text{Périmètre de } P_G = \frac{4}{3}\times \text{périmètre de P}$$

Nous nous intéressons maintenant aux aires

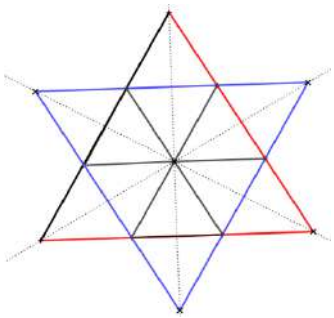


On trace une hauteur du triangle, on appelle *h* sa longueur.
D 'après le théorème de Pythagore :

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

On peut donc calculer l'aire :



On découpe le triangle de départ en 9 triangles égaux.
On peut donc calculer l'aire :

$$\text{Aire de } P_G = 12\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{Aire de } P_p = 6\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

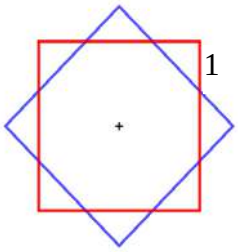
Conclusion :

$$\text{Aire de } P_G = 2\times\text{aire de } P_p \ ; \ \text{Aire de } P_p = \frac{2}{3}\times\text{aire de P} \ \text{ et } \ \text{Aire de } P_G = \frac{4}{3}\times\text{aire de P}$$

On remarque que ce sont les mêmes résultats que pour le périmètre ; pour une rotation quelconque, nous n'avons pas retrouvé ces résultats : nous sommes encore en train de chercher une formule dans ce cas.

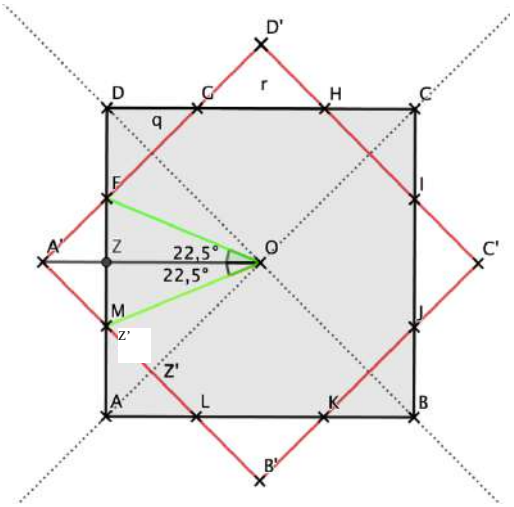
2) **Le carré de côté 1**

On effectue une rotation de 45° dans le sens horaire.



Périmètre de P : 4

Aire de P : 1



Avec données portées sur la figure ci-contre :

$\widehat{OA'B'} = 45°$

On a aussi $\widehat{A'ZM} = 90°$

La somme des angles d'un triangle fait 180° donc, dans le triangle A'ZM on a :

$$\widehat{A'MZ} = 180° - 45° - 90° = 45°$$

On a de même $\widehat{AML} = 45°$

A'ZM et AZ'M ont chacun deux angles de 45°, ce sont des triangles isocèles et on a :

A'Z = ZM et AZ'= Z'M.

De plus, par rotation, [A'Z] est l'image de [AZ'] donc : A'Z = AZ'.

Finalement : ZM = Z'M. M est donc un point de la bissectrice de $\widehat{ZOZ'}$, donc [OM) est cette bissectrice et $\widehat{ZOM}$ = 22,5° .

Dans FOZ rectangle en Z : tan 22,5° = FZ/OZ d'où : tan 22,5° = FZ/(1:2) et donc :
FZ = tan 22,5°/ 2
On en déduit le périmètre de P_p :16FZ = 8 tan 22,5° ce qui fait environ 3,3.

A'FZ est rectangle en Z, d'après le théorème de Pythagore : $A'F = \sqrt{2 \times \left(\frac{\tan 22,5°}{2}\right)^2}$.

On en déduit le périmètre de P_G : $16\,A'F = 16 \times \frac{\tan 22,5°}{2}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\tan 22,5°$

Conclusion : Périmètre de P : 4 ; périmètre de P_p : 8 tan 22,5° et

périmètre de P_G : $8\sqrt{2}\tan 22,5°$

Calcul des aires. Aire de OFZ : $\frac{OZ \times FZ}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\tan 22,5°}{2}}{2} = \frac{\tan 22,5°}{8}$

On en déduit l'aire de P_p : $\frac{\tan 22{,}5°}{8} \times 16 = 2 \times \tan 22{,}5°$

En faisant la différence entre l'aire de P et celle de P_p, on obtient l'aire des quatre triangles rectangles A'FM, GD'H, IC'J et KB'L ; cette aire est de : $1 - 2 \times \tan 22{,}5°$

En ajoutant à cette aire, l'aire de P, on obtient l'aire de P_G qui est donc :

$$1 + 1 - 2 \times \tan 22{,}5° = 2 - 2 \times \tan 22{,}5°$$

Conclusion : Aire de P : 1 ; aire de P_p : $2 \tan 22{,}5°$ et aire de P_G : $2 - 2 \tan 22{,}5°$

Nous n'avons pas trouvé de conjecture reliant ces périmètres et ces aires ; de plus, en changeant d'angle, on ne retrouve pas ces résultats. (5)

Nous remercions notre chercheur de nous avoir accompagné lors de nos recherches tout au long de l'année.

Notes d'édition

(1) Les conclusions énoncées dans cette partie sont basées sur des observation de dessins et ne sont pas démontrées.

(2) La communauté scientifique se réjouit au contraire que vous ayez trouvé un contre-exemple plutôt que de présenter une conjecture fausse au lecteur.

(3) Le paragraphe qui suit a pour but de démontrer que P_G et P_p sont des polygones réguliers.
L'édition regrette le manque de clarté de certains passages.

(4) Déduction confuse, $\widehat{AOC}$ est l'angle au centre donc mesure $\frac{360°}{3} = 120°$.
Le triangle étant isocèle, les deux autres angles mesurent $\frac{180° - 120°}{2} = 30°$

(5) Questions pour prolonger la recherche :

1) Démontrer que Aire(Pg) = 2 Aire(P) – Aire(Pp)

2) On a toujours Aire(Pg) < 2 x Aire(P) .
Peut-on trouver une figure et un angle tels que Aire(Pg) > 1,9 Aire(P) ? tels que Aire(Pg) > 1,99 Aire(P) ?
Même question avec les périmètres.

Modéliser une épidémie

Année 2018 - 2019

Claire Ackermann, Élise Rohmer et Henri Stéphan (classe de Terminale S)

Enseignante : Nadine Meyer

Etablissement : Lycée Dr. Eugène Koeberlé, Sélestat (67)

Chercheuse : Myriam Maumy-Bertrand, Université de Strasbourg IRMA

I. Présentation du sujet

Dans la vie quotidienne, les vaccins proposent certes une protection individuelle : chaque individu, en se vaccinant contre une maladie, est presque assuré de ne pas contracter cette maladie. Mais les vaccins forment aussi une protection collective. En effet, les vaccins empêchent la multiplication de l'agent pathogène chez les personnes vaccinées : elles ne peuvent ainsi pas le transmettre. Plus il y a de personnes vaccinées, moins les agents pathogènes peuvent se développer en eux et donc contaminer les non vaccinés, et donc moins la maladie prendra de l'envergure. Ainsi, plus la proportion de vaccinés sera grande au sein d'une population, moins il y aura de contaminés au sein des non vaccinés. On souhaite, par le biais d'une modélisation, répondre à la question suivante :

La proportion de vaccinés dans une population a-t-elle une influence sur la durée de propagation d'une épidémie et sur le nombre d'individus qu'elle touche ?

Objectif :

Nous cherchons à modéliser simplement la propagation d'une épidémie au sein d'une population finie. Nous souhaitons voir l'influence de certains paramètres tels que la taille de la population de base, le nombre d'infectés à l'instant 0 et surtout le nombre de vaccinés à l'instant 0 sur le temps total de propagation de l'épidémie et sur le nombre final de personnes touchées par l'épidémie.

II. Point de départ

Le point de départ de notre travail est un jeu qui a pour but de montrer simplement comment une épidémie peut se propager au sein d'une population. Le principe de ce jeu peut être résumé comme ci-dessous :

A. La partie théorique :

Nous disposons d'une population d'un effectif connu. Cette population est divisée en quatre catégories : les individus **infectés**, les individus **convalescents mais toujours contagieux**, les individus **immunisés** et les individus **normaux** (c'est-à-dire le reste).

La maladie se propagera au sein de la population par unité de temps (T-0, T-1, ..., T-K, T-K+1, ..., T-F).

Au temps T-0, nous définissons donc la taille de notre population, le nombre d'individus infectés ainsi qu'éventuellement le nombre d'individus vaccinés (pour simplifier, les individus vaccinés seront des individus immunisés de base, à T-0 et donc tout le long de notre jeu).

Au début de chaque unité de temps :
- chaque individu **convalescent** devient **immunisé** et contamine *aléatoirement* un autre individu
- chaque individu **infecté** devient un individu **convalescent mais toujours contagieux** et contamine *aléatoirement* un autre individu de la population

Ces deux actions se font simultanément, c'est-à-dire qu'au début de chaque unité de temps, on fait la somme S des **infectés** et des **convalescents** et ce nombre définira le nombre d'individus à contaminer aléatoirement.
Pour contaminer *aléatoirement* des individus de la population, nous attribuons à chaque individu au début du jeu un numéro (allant de 1 à n individus), et, après avoir effectué la somme S, on répète S fois l'expérience « tirer un numéro au hasard entre 1 et n ». Nous aurons alors S numéros, qui correspondront donc aux numéros donnés à chaque individu de notre population, et qui seront donc les individus qui deviendront infectés.

Mise en garde :

- si le numéro tiré correspond à un individu **infecté**, ce dernier n'est pas réinfecté, il devient naturellement **convalescent** (autrement dit, la contamination n'a pas d'effets sur les individus déjà infectés)
- si le numéro tiré correspond à un individu **convalescent**, idem, cela n'a pas d'influence, il passe naturellement dans la catégorie des **immunisés**
- si le numéro tiré correspond à un individu **immunisé** (qu'il soit vacciné de base ou qu'il soit devenu immunisé suite à une contamination préalable), il ne sera pas infecté, la contamination n'a plus d'impact sur les immunisés

→ en bref, la contamination fait passer un individu dans la catégorie **infecté** uniquement si cet individu faisait partie de la catégorie des individus **normaux**. Elle n'a pas d'impact sur les individus des catégories des infectés, des convalescents et des immunisés. Ainsi, au cours du jeu, les seuls processus possibles pour les individus sont :

T- 0	T- 1	T- 2	T- K	T- Final
infecté	convalescent	immunisé	immunisé	immunisé
immunisé (vacciné)	immunisé	immunisé	immunisé	immunisé
normal	infecté	convalescent	immunisé	immunisé
normal	normal	normal	normal	normal

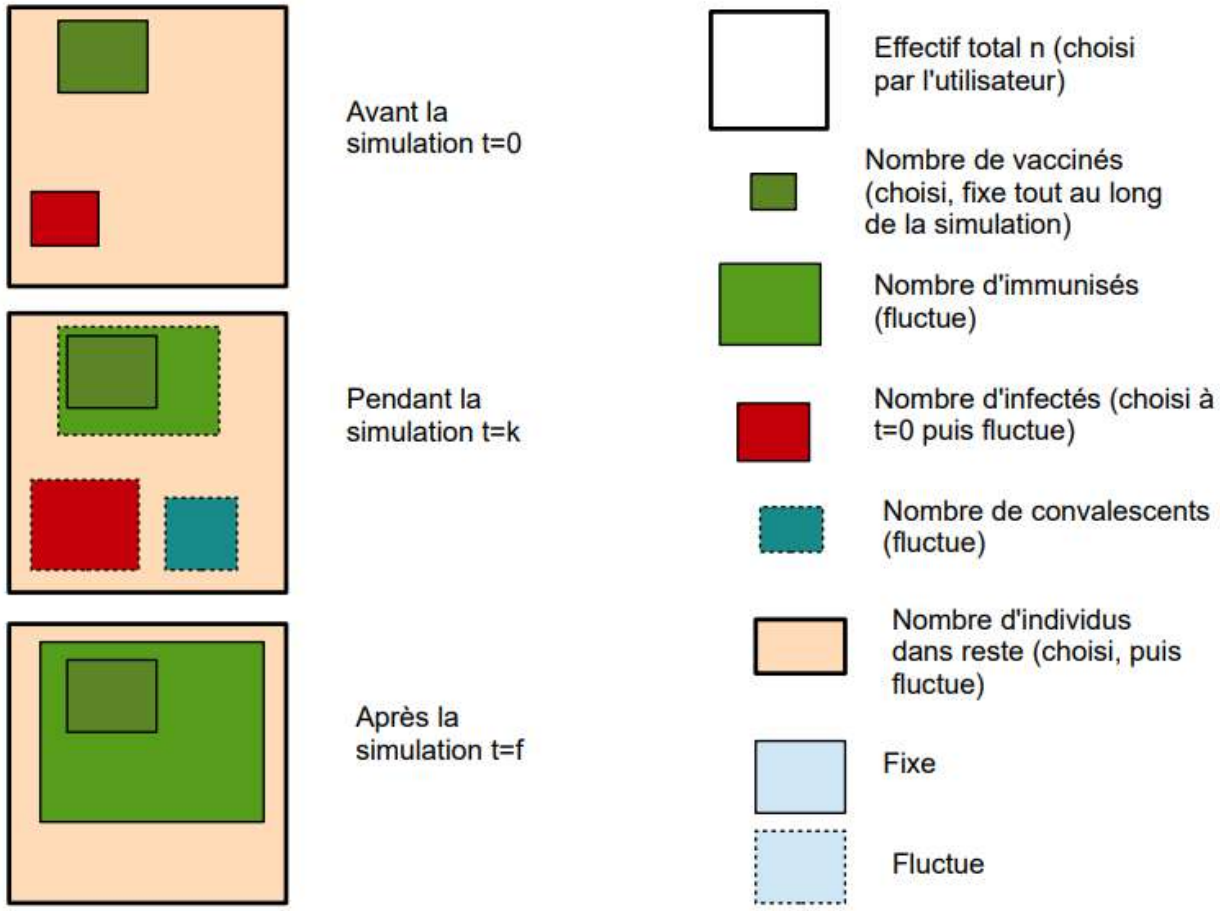
Tableau représentant les uniques chemins possibles pour un individu donné au cours des unités de temps (avec T- K désignant une étape quelconque comprise entre T- 0 et T- F-1 exclus pour le cas où l'individu est infecté/immunisé dès T- 0, et T- K entre T-0 et T- F-2 exclus pour le cas où l'individu est dans le groupe normal en T- 0).

Notons que dans le cas où il n'y a plus d'infectés, pour le(s) dernier(s) individu(s) convalescent(s)

$$T\text{-}K+2 = T\text{-}F.$$

Le jeu s'arrête lorsque qu'il n'y a plus d'infectés et de convalescents (plus personne ne peut donc contaminer le reste de la population). (1) A la fin du jeu, il ne reste que donc deux populations : les **immunisés**, qui regroupent les vaccinés du départ et tous les individus ayant été infectés au cours du jeu, et les **normaux**, c'est-à-dire la population qui a échappé à la contamination (notons que cette population peut être nulle dans le cas où l'entièreté de la population des normaux s'est fait contaminer au cours du jeu).

Nous pouvons schématiser cette expérience sous formes de boîtes pour mieux comprendre les mouvements d'individus au sein des catégories :



B. La partie pratique :

Nous avons tout d'abord réalisé ce jeu deux fois nous-mêmes, sur un effectif de 18, avec des cartes représentant le groupe auquel appartenait chacun de nos 18 individus et avec un programme nous servant à tirer des nombres aléatoires entre 1 et 18 afin d'avoir une première approche avec ce jeu et relever les éventuels problèmes. Nous nous intéressons particulièrement à la durée de la propagation de l'épidémie (au bout de combien d'étapes le jeu est fini, c'est-à-dire au bout de combien d'étapes il n'y a plus d'infectés et plus de convalescents) et au nombre de personnes dans la catégorie des individus normaux à la fin du jeu (c'est-à-dire combien de personnes, par rapport à notre effectif de base, n'ont pas été touchées par l'épidémie). Nous avons obtenu les résultats suivants :

	sans vaccin	nombre d'infecté(s) au départ : 1		effectif : **18**
	Infecté(s)	Convalescent(s) mais toujours contagieux	Immunisé(s)	Reste
T-0	1	0	0	17
T-1	1	1	0	16
T-2	2	1	1	14
T-3	2	2	2	12
T-4	1	2	4	11
T-5	1	2	6	9
T-6	2	1	8	7
T-7	1	2	9	6
T-8	1	1	11	5
T-9	1	1	12	4
T-10	0	1	13	4
T-11	0	0	**14**	4

	sans vaccin	nombre d'infecté(s) au départ : 1		effectif : **18**
	Infecté(s)	Convalescent(s) mais toujours contagieux	Immunisé(s)	Reste
T-0	1	0	0	17
T-1	1	1	0	16
T-2	2	1	1	14
T-3	2	2	2	12
T-4	2	2	4	10
T-5	1	2	6	9
T-6	0	1	8	9
T-7	1	0	9	8
T-8	0	1	9	8
T-9	0	0	**10**	8

Nous observons qu'avec le même effectif de départ et le même nombre d'infectés de base, le jeu ne se finit pas au bout du même nombre d'unités de temps et le nombre d'individus dans la catégorie des normaux à la fin du jeu est différent. Il serait donc intéressant de reproduire ce jeu sur Python afin de pouvoir le faire un grand nombre de fois en modifiant certains paramètres (taille de la population, nombre d'infectés de départ, nombre de vaccinés) et observer leur influence.

III. Notre travail sur Python :

Nous souhaitons réaliser un programme afin de répéter de manière aléatoire la propagation d'une épidémie un grand nombre de fois sur une population donnée en faisant éventuellement varier uniquement les paramètres suivants : taille de la population de base, nombre d'infectés à T-0 et nombre de vaccinés à T-0.
Nous nous intéressons particulièrement à deux données : le nombre d'unités de temps passées pendant la propagation de l'épidémie et le nombre de non immunisés à la fin de la propagation (c'est-à-dire ceux qui n'ont été ni infectés ni immunisés dès le début).

Nous allons maintenant détailler en plusieurs étapes le programme que nous avons réalisé.

Étape 0 – Mise en place des différentes listes et diagrammes :

Tout d'abord, on demande au début du programme à l'utilisateur de rentrer plusieurs paramètres comme la taille de la population totale, l'effectif d'individus dans la catégorie des **normaux** (non infectés, non vaccinés), la part d'**infectés** et celle de **vaccinés**, ainsi que le pourcentage de chance pour un individu infecté ou convalescent mais toujours contagieux de contaminer quelqu'un (un infecté/convalescent ne contamine pas forcément quelqu'un selon le pourcentage rentré).

```
from random import*
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy  as np

#définir taille population, dont vaccinés et individus dans reste, pourcentage de chance de contamination
n = int(input("Nombre de personnes au total (effectif total) : "))
nbReste = int(input("Nombre de personnes dans reste (nombre de non infectés) (strictement inférieur à l'effectif total): ")) #nbreste= n (eff tot) - (vaccinés/immunisés + infectés)
v=int(input("Nombre de vaccinés (immunisés d'office) (inférieur à l'effectif total moins le nb d'invidus dans reste):"))
prob=int(input("Pourcentage de chance qu'un infecté/convalescent puisse transmettre la maladie à une autre personne (un nombre entier compris entre 1 et 100 est attendu):"))

```

Ensuite, on crée des listes pour classer les différents cas observables. Chaque catégorie est représentée par une liste de nombres dans laquelle les individus sont eux-mêmes représentés par des nombres. Un nombre correspond à un individu. De ce fait, on pourra facilement modéliser le passage des individus d'une catégorie à l'autre, par exemple quand ils se font contaminer, en changeant de liste le nombre qui représente l'individu en question.

```

#création des listes reste (= non touchés par la maladie), immunisés, infectés, convalescents
reste = []
for i in range(nbReste):
    reste.append(i+1)

infecté=[]
m=n-nbReste-v  #nb d'infectés = (effectif tot n - nb reste - nb vaccinés)
for j in range(m):
    infecté.append(nbReste+v+j+1) #remplissage infectés


immunisé=[]
for h in range(v):
    immunisé.append(nbReste+h+1) #remplissage immunisés avec vaccinés

convalescent=[]

```

Enfin, on demande au programme de nous afficher les résultats sous la forme d'un diagramme (qui sera défini en 2 parties : une partie pour l'étape T-1, l'autre pour toutes les autres étapes).

```
#AFFICHAGE DIAGRAMME POUR ETAPE 0
plt.bar(0,len(immunisé),1.0,color='limegreen')
plt.bar(0,len(convalescent),1.0,color='steelblue',bottom=len(immunisé))
plt.bar(0,len(infecté),1.0,color='firebrick',bottom=len(immunisé)+len(convalescent))
plt.bar(0,len(reste),1.0,color='tan',bottom=len(immunisé)+len(convalescent)+len(infecté))
plt.bar(0,v,1.0,color='forestgreen')


```

Etape 1 – Initialisation de la première étape du programme :

Tout d'abord, on met en place l'étape T-1 et on effectue les changements de catégories d'infecté à convalescent et de convalescent à immunisé.

```
#ETAPE 1

immunisé=immunisé+convalescent #convalescents->immunisés
convalescent=infecté #infectés->convalescents
infecté=[]
for o in range (m): #nb infect
    p=randint(1,100) #proba de contaminer
    if p<=prob:
        k=randint(1,n)
        if k in reste:
            infecté.append(k)   #si individu dans reste, ->infecté
            reste.remove(k)

```

Ensuite, on affiche le diagramme pour l'étape 1.

```
#AFFICHAGE DIAGRAMME POUR ETAPE 1
plt.bar(1,len(immunisé),1.0,color='limegreen')
plt.bar(1,len(convalescent),1.0,color='steelblue',bottom=len(immunisé))
plt.bar(1,len(infecté),1.0,color='firebrick',bottom=len(immunisé)+len(convalescent))
plt.bar(1,len(reste),1.0,color='tan',bottom=len(immunisé)+len(convalescent)+len(infecté))
plt.bar(1,v,1.0,color='forestgreen')

```

(2)

Etape 2 – Programmation de T-2 à T-F :

On met en place la suite du programme qui définit les mouvements des individus au sein des catégories (au sein des listes). On met en place un compteur pour les unités de temps.

```
#ETAPE 2 A F
t=1
N=len(infecté)+len(convalescent)    #N : nb de personnes qui contaminent à chaque étape
while N>0:
    immunisé=immunisé+convalescent
    convalescent=infecté
    infecté=[]
    for i in range(N):
        q=randint(1,100) #proba contaminer
        if q<=prob:
            l=randint(1,n)
            if l in reste:
                infecté.append(l)
                reste.remove(l)
    N=len(infecté)+len(convalescent) #pour que le nb d'individus qui contaminent soit à jour

    t=t+1

```

Ensuite, on affiche la partie du diagramme de T-2 à T-F.

```
#AFFICHAGE DIAGRAMME POUR ETAPE 2 A F
    p1=plt.bar(t,len(immunisé),1.0,color='limegreen') #nb immunisé
    p2=plt.bar(t,len(convalescent),1.0,color='steelblue',bottom=len(immunisé))
    p3=plt.bar(t,len(infecté),1.0,color='firebrick',bottom=len(immunisé)+len(convalescent))
    p4=plt.bar(t,len(reste),1.0,color='tan',bottom=len(immunisé)+len(convalescent)+len(infecté))
    p5=plt.bar(t,v,1.0,color='forestgreen') #nb vaccinés à la fin pour superposition avec immunisés

```

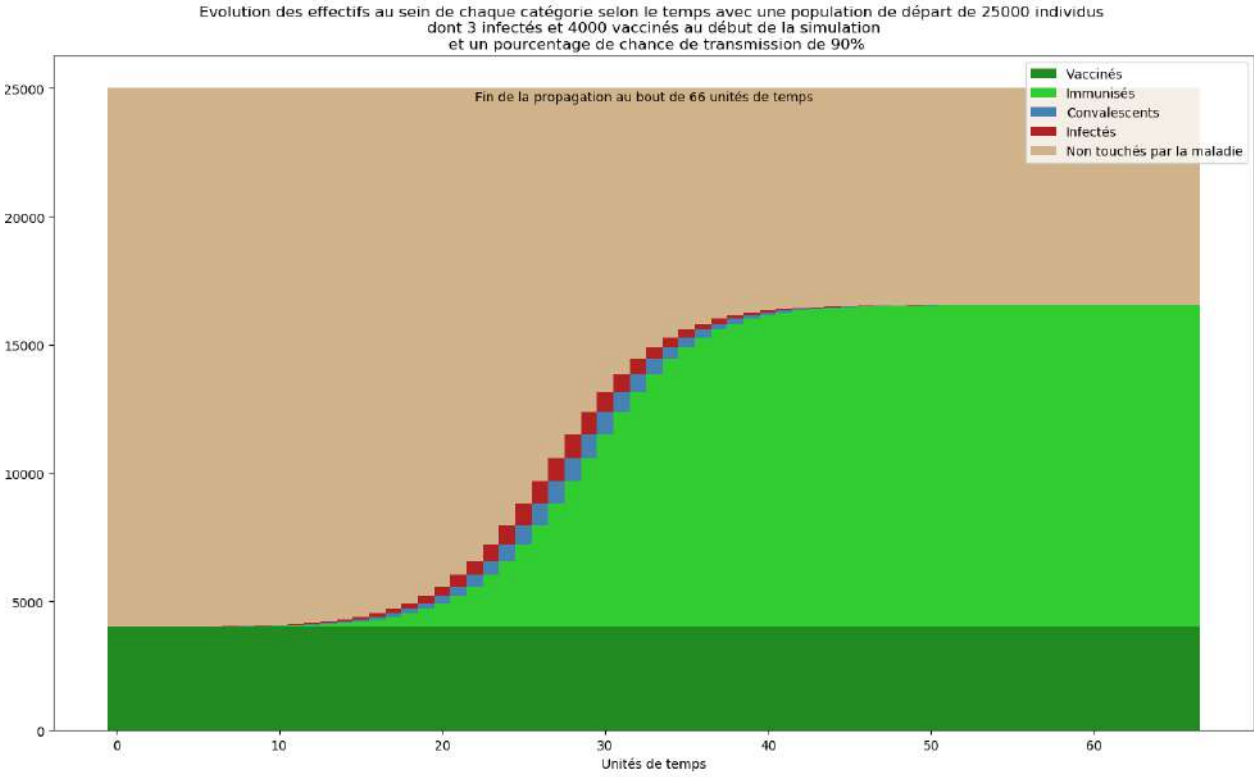
Etape 3 – Affichage des résultats :

On demande au programme de nous afficher les différents résultats obtenus.

```
print("RECAPITULATIF :")
print("Effectif total :")
print(n)
print("nombre d'infecté(s) à t0 :")
print (m)
print("nombre de vacciné(s) à t0 : ")
print(v)
print("nombre d'individu(s) dans reste à t0 :")
print(nbReste)
print("pourcentage de chance qu'un infecté ou convalescent puisse contaminer")
print(prob)
print("durée de l'épidémie en unité de temps :")
print(t)
print("nombre de personnes touchées par l'épidémie (infectées, puis devenues immunisées (hors immunisés d'office)) :")
print(len(immunisé)-v)
print("nombre de personnes touchées par l'épidémie (hors infectés à t0 et immunisés d'office)")
print(len(immunisé)-v-m)
print("nombre de personnes ayant évité l'épidémie (hors immunisés d'office) :")
print(len(reste))

plt.title("Evolution des effectifs au sein de chaque catégorie selon le temps avec une population de départ de " + str(n) + " individus \n dont "
plt.ylabel('Effectif')
plt.xlabel('Unités de temps')
plt.legend((p5[0], p1[0], p2[0], p3[0], p4[0],), ('Vaccinés', 'Immunisés','Convalescents', 'Infectés', 'Non touchés par la maladie'))
plt.text(t/3,n-(1/50*n),"Fin de la propagation au bout de " + str(t) + " unités de temps")
plt.show()
```

Un exemple de graphique obtenu de l'évolution au cours du temps des effectifs au sein de chaque catégorie, avec une population de départ de 25 000 individus dont 3 infectés et 4000 vaccinés au début de la simulation, ainsi qu'un pourcentage de chance de transmission de 90 %.



L'épidémie se propage durant 66 unités de temps, avant qu'il n'y ait plus d'infectés et de convalescents.

Avec un graphique de ce type, nous obtenons une bonne représentation globale de la propagation de l'épidémie au sein de notre population, ainsi que les variations des effectifs de chaque catégorie au cours du temps. Néanmoins, ce type de présentation des résultats est peu utile pour émettre des conjectures quant à l'influence de certains paramètres sur la durée de la propagation, le nombre d'individus touchés... C'est pourquoi nous allons donc analyser des données chiffrées obtenues à partir de notre programme.

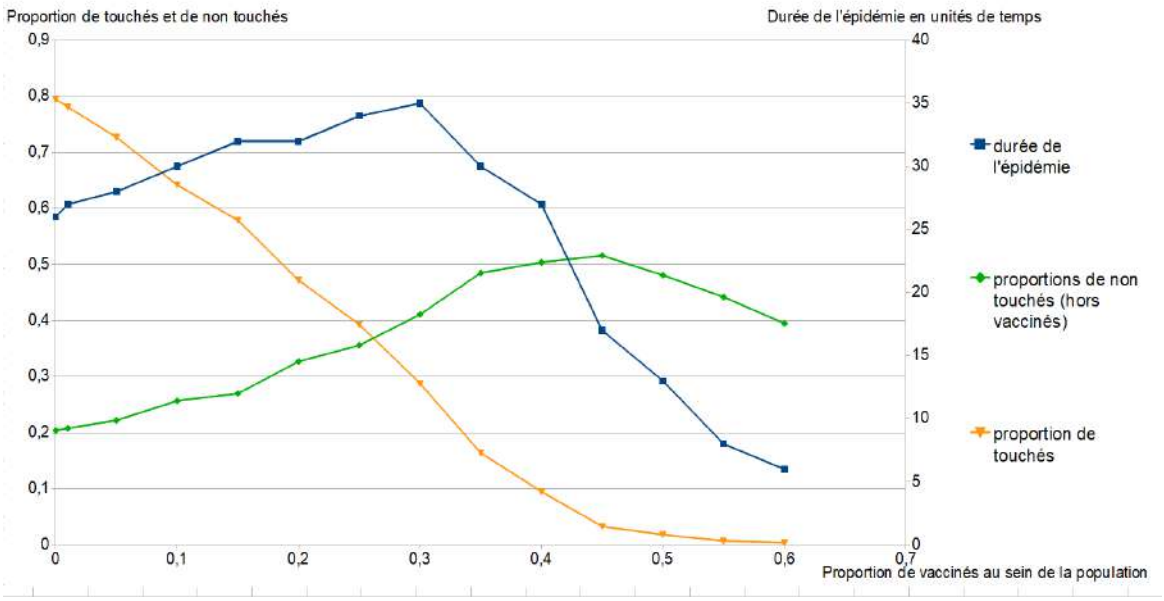
IV. Obtention de données grâce au programme

A l'aide de notre programme, nous effectuons à chaque fois 100 répétitions de notre simulation en gardant les mêmes paramètres (effectif total de 1000 individus, 1 infecté au début de la simulation, un pourcentage de chance de transmission de 100%). Nous faisons néanmoins varier d'une expérience à l'autre la proportion de vaccinés dans la population totale (proportion de 0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6).

Nous nous intéressons alors aux paramètres suivants à la fin de la simulation : durée de l'épidémie, nombre d'individus épargnés par l'épidémie, nombre d'individus touchés par l'épidémie.

Éléments choisis par l'utilisateur														
Nombre d'individus dans la population	1000													
Nombre d'infectés au début de la simulation	1													
Nombre d'individus vaccinés au début de la simulation	0	10	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
Proportion de vaccinés	0	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
Moyenne des résultats des simulations														
Unités de temps	26	27	28	30	32	32	34	35	30	27	17	13	8	6
Nombre d'individus non touchés par l'épidémie (hors vaccinés)	204	208	222	257	270	327	356	411	485	504	516	481	442	395
Nombre d'individus touchés par l'épidémie	795	781	727	642	579	472	393	288	164	95	33	18	7	4

Tableau représentant la moyenne des résultats obtenus pour 100 répétitions pour chaque variation de la proportion de vaccinés sur une population de 1000 individus



Graphique représentant la durée de l'épidémie, la proportion d'individus touchés et non touchés par l'épidémie en fonction de la proportion d'individus vaccinés (résultats obtenus par une moyenne de 100 répétitions sur une population de 1000 individus) (3)

V. Analyse des résultats : l'influence de la vaccination sur une population

La proportion de vaccinés dans une population a-t-elle une influence sur la durée de propagation d'une épidémie et sur le nombre d'individus qu'elle touche ?

Nous allons vérifier si notre programme suit le principe selon lequel les vaccins représentent non seulement une protection individuelle, c'est-à-dire qu'elle réduit fortement les chances qu'un individu vacciné soit contaminé, mais aussi une protection collective, c'est-à-dire que les vaccins freinent la propagation d'une maladie, et ce même chez les individus non vaccinés. En bref, nous allons étudier l'influence de la proportion de vaccinés d'une population donnée sur la durée de l'épidémie, ainsi que sur la proportion d'individus touchés par l'épidémie.

Ainsi, comme nous pouvons aisément le constater, plus la proportion de vaccinés au sein de la population est élevée, plus la proportion d'individus touchés par l'épidémie sera faible. Cela provient du fait que tout d'abord, les vaccinés ne peuvent être contaminés dans notre simulation, donc plus leur proportion est grande au sein de la population, moins il existe d'individus susceptibles d'être contaminés : c'est la protection individuelle.
Mais cette observation découle aussi du fait que les individus vaccinés permettent une protection collective. En analysant la proportion d'individus non touchés par l'épidémie (en ne comptant pas dedans les vaccinés), nous pouvons observer que plus la proportion de vaccinés est élevée, plus la proportion d'individus non touchés est haute. Or cette proportion, dans l'élaboration de nos données, ne prend pas en compte les vaccinés (elle comptabilise uniquement les individus de la catégorie « normaux » qui n'ont pas été touchés). Quand le nombre de vaccinés augmente, notre proportion n'est donc par directement gonflée par cet ajout de vaccinés, mais par leur impact sur l'ampleur prise par

l'épidémie.

En conséquent, si de moins en moins d'individus sont contaminés dès lors que la proportion de vaccinés augmente, on comprend aisément la baisse de la durée de propagation de l'épidémie, celle-ci devenant alors plus locale et de plus faible envergure.

Cependant, dans notre cas, on peut remarquer que le vaccin est efficace à 100%. Or, en réalité, cette perfection est difficilement atteignable. Il faudrait alors modifier notre programme pour qu'il prenne en compte les personnes vaccinées comme personnes contaminables. L'impact que les vaccinés ont sur l'épidémie reste cependant indéniable.

En définitive, nous pouvons donc admettre un réel impact de protection individuelle et de protection collective de la proportion de vaccinés sur le reste de la population : plus la proportion d'individus vaccinés est grande, moins il y aura d'individus touchés par l'épidémie. L'épidémie prendra alors moins d'ampleur, en découlera alors une faible durée de propagation de l'épidémie, si la proportion de vaccinés est suffisante. (4)

Notes d'édition

(1) On admettra (ce n'est pas si évident!) que le jeu s'arrête effectivement avec probabilité 1.

(2) Lignes de code 44 et 45, puis 66 et 67 :
Une probabilité de contamination est ajoutée au modèle ; plus précisément, c'est la probabilité qu'une contamination soit « tentée » : que l'on tire un individu au hasard, et qu'il soit contaminé s'il était jusqu'alors normal.

(3) On a l'impression que vacciner plus de 45 % de la population conduit à une plus faible proportion de non touchés, autrement dit qu'on puisse vacciner « trop » de gens : il n'en est rien, le choix des données affichées est ici un peu maladroit. Les auteurs affichent la proportion de non-vaccinés épargnés par l'épidémie dans toute la population, qui finit forcément par baisser quand on augmente la proportion de vaccinés (si 100 % des individus sont vaccinés, 0 % sont non-vaccinés épargnés…).
Il serait plus pertinent d'afficher la proportion d'épargnés parmi les non-vaccinés, qui augmente, comme on peut s'y attendre, avec le taux de vaccinés.

(4) Ce phénomène d'immunité de groupe n'a ici été mis en évidence que pour un modèle très particulier, mais s'observe avec bien d'autres modèles ainsi que dans la pratique. Certaines personnes à la santé fragile ne peuvent pas être vaccinées, et vacciner une grande proportion de la population permet de les protéger.

La calculatrice aux touches magiques

Année 2019 - 2020

Amroune Akim, Achouri Meyril, Habib Elias (classe de 4e) et Rolengo Sarah (classe de 3e)

Etablissement : Collège l'Estaque, Marseille

Enseignants : Sébastien Simao et Soraya Chachoua

Chercheur : Lionel Nguyen Van Thé, I2M Marseille

Sujet

Une calculatrice possède trois touches supplémentaires :

- La première calcule la somme des chiffres d'un nombre.
- La seconde calcule le produit des chiffres d'un nombre.
- La troisième calcule la somme des carrés des chiffres d'un nombre.

Que se passe-t-il si on prend un nombre et qu'on appuie plusieurs fois sur une de ces touches ?

1- La somme des chiffres

Premiers essais

- 1532 → 1 + 5 + 3 + 2 = 11 → 1 + 1 = 2
- 1546910241 → 1 + 5 + 4 + 6 + 9 + 1 + 0 + 2 + 4 + 1 = 42 → 4 + 2 → 6

Propriété 1 : *Quel que soit le nombre de départ choisi, après plusieurs appuis sur la touche somme, on finit toujours par tomber sur un chiffre entre 0 et 9.*

Voici nos premières remarques pour prouver cette propriété :
Pour un nombre N à deux chiffres, sa somme sera inférieure à 18, à l'étape suivante la somme inférieure à 9 et on tombe sur un nombre à un chiffre.
Pour un nombre à trois chiffres sa somme sera inférieure à 9 × 3 soit 27. On tombe donc sur un nombre à deux chiffres qui à l'étape suivante va nous donner un nombre à un chiffre.

Démonstration

Première partie : Dès qu'un nombre a plus de deux chiffres, la somme de ses chiffres sera strictement inférieure au nombre de départ. Si on note s(N) la somme des chiffres du nombre N, on veut démontrer que : s(N) < N. (1)
Un nombre N à trois chiffres, va s'écrire :

$N = 100 \times c + 10 \times d + u$ où c, d et u sont les chiffres des centaines, dizaines et unités.

$$s(N) = c + d + u$$

Or $c \neq 0$, donc : $c < 100\,c$
De plus, on a : $d + u \leq 10d + u$ (égalité si $d = 0$) donc $c + d + u < 100c + 10d + u$.
On a bien s(N) < N.

Pour un nombre *N* à *k* chiffres, le raisonnement est identique sur le chiffre qui correspond au *k*-ième rang.

Deuxième partie : A chaque étape, le nombre devient strictement plus petit. Après plusieurs étapes, il va donc devenir un nombre à un chiffre. Or, quand un nombre a un chiffre sa somme est identique à lui-même. Donc, le résultat ne bouge plus après appuis successifs sur la touche.

Vers quels résultats arrive-t-on ?

On s'est d'abord intéressé aux nombres formés uniquement avec des 9.

Essais

- 99 → 18 → 9
- 9999 → 36 → 9
- 9999999 → 63 → 9
- On a pris aussi d'autres nombres par exemple : 1052 × 9 = 9468 → 27 → 9

Propriété 2 : *Quand on part d'un nombre multiple de neuf, on finit par tomber sur 9.*

Démonstration

Cela nous a rappelé le critère de divisibilité par 9 qu'on a vu en cours : un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9. Autrement dit, quand on part d'un multiple de 9 à chaque appui sur la touche magique "somme", on obtient toujours un multiple de 9. Mais d'après la première propriété, on finit par tomber sur un nombre à un chiffre qui doit être multiple de 9 donc cela ne peut être que 9.

Pour les autres cas, on a regardé des nombres consécutifs (1, 2, 3, 4,..., 35), et on s'est aperçu que les résultats finaux revenaient cycliquement tous les neuf nombres.

Propriété 3 : *Pour tout nombre non divisible par 9, le résultat final est le reste de la division euclidienne du nombre de départ par 9.*

Démonstration

Pour cela, on a remarqué que les puissances de 10 peuvent toujours s'écrire comme somme d'un multiple de 9 et de 1. En effet :

$10^2 = 99 + 1$

$10^3 = 999 + 1$

$10^4 = 9999 + 1$

$10^k = 99999...9 + 1$

Dans l'écriture de N en base 10 : $N = a_k \times 10^k + ... + a_0$

On peut remplacer chaque puissance de 10 par un multiple de 9 et en utilisant la formule de la simple distributivité pour chaque puissance de dix, on a donc :

N = multiple de 9 + $(a_k + ... + a_0)$

Autrement dit : N = multiple de 9 + s(N).

Ainsi N et s(N) ont le même reste dans la division euclidienne par 9.

On peut comme tout à l'heure, conclure que le résultat final va avoir le même reste que N dans la division euclidienne par 9. De plus, le quotient va être nul car sinon le résultat serait supérieur à 10.

2- Produit des chiffres

Premiers essais

- 23 → 2 × 3 = 6
- 623 → 6 × 2 × 3 = 36 → 3 × 6 = 18 → 8
- 302 → 3 × 0 × 2 = 0
- 11111111111 → 1
- 10^n → 0

Propriété 4 : *Quel que soit le nombre de départ choisi, après plusieurs appuis sur la touche "produit", on finit toujours par tomber sur un chiffre entre 0 et 9.*

Démonstration

On va procéder comme pour la somme des chiffres et d'abord démontrer que : dès qu'un nombre a plus de deux chiffres, le produit de ses chiffres sera strictement inférieur au nombre de départ. (2)
Notons p(N) le produit des chiffres de N. Essayons d'abord de le démontrer pour un nombre à trois chiffres.

$N = c \times 100 + d \times 10 + u$ et $P(N) = c \times d \times u$

Or d et u sont inférieurs ou égaux à 9 donc : $p(N) \leq 81c$
Donc $p(N) < 100\ c$ soit $p(N) < N$.
Pour un nombre N à k chiffres, le raisonnement est identique. Tous les chiffres étant inférieurs ou égaux à 9, on peut démontrer que $p(N) \leq a_k \times 10^k$ et conclure de la même façon. (3)

Par contre, il est très difficile de prévoir le résultat que l'on va obtenir. D'ailleurs, dès qu'il y a un zéro ou un cinq et un deux dans l'écriture en base dix de N alors $p(N) = 0$. On ne sait pas en combien d'étapes la suite se stabilise.

3- Somme des carrés des chiffres

Premiers essais

- 25 → 2 × 2 + 5 × 5 = 29 → 4 + 81 = 85 → 64 + 25 = **89** → 64 + 81 = 145 → 1 + 16 + 25 = 42 → 16 + 4 = 20 → 4 → 16 → 1+36 =37 → 9+49 =58 → 25+64 → **89**

On obtient ici un cycle : dans un premier temps les résultats augmentent puis diminuent mais surtout ou bout d'un certain nombre d'étapes, les mêmes nombres réapparaissent.

- 1 → 1
- 10^n → 1 Ici, pour n'importe quelle puissance de 10, on obtient toujours 1.

Comme les calculs ici étaient bien plus longs, on a réalisé un programme sur Scratch (cliquez sur le lien). On l'a testé sur les 100 premiers nombres. Ce qui nous permet d'établir la conjecture suivante :

Conjecture : *Après plusieurs appuis sur cette touche, on peut tomber :*

- Soit sur un cycle : 4 → 16 → 37 → 58 → 89 → 145 → 42 → 20 → 4
- Soit sur 1.

En effet, on s'est aperçu que dès qu'on prend un nombre à plus de deux chiffres, la somme des carrés est plus petite que le nombre de départ. (4) On finit par retomber sur un nombre entre 1 et 100. Nous n'avons toutefois pas eu le temps de le démontrer.

Notes d'édition

(1) Le résultat est vrai dès qu'un nombre a au moins 2 chiffres.

(2) Comme précédemment, ce résultat est vrai dès qu'un nombre a au moins 2 chiffres.

(3) Attention la plus grande puissance de 10 pour un nombre ayant k chiffres est 10^{k-1}.
Plus précisément, on démontre alors de la même manière que p(*N*) ≤ $9^{k-1} \times a_k$ qui est strictement inférieur à $10^{k-1} \times a_k$, lui-même inférieur ou égal à *N*.

(4) Ici, ce résultat n'est valable que pour un nombre avec strictement plus de 2 chiffres, puisqu'on a vu avec les exemples fournis que ce n'était pas le cas pour 25, par exemple.

Don’t cross the streams

Year 2018 - 2019

Ilieş Radu, Leonte Mihnea, Man Andrei (10th grade) and Arion Dan-Vasile (11th grade)

School: Colegiul Naţional “Emil Racoviţă" Cluj-Napoca

Teacher: Ariana Văcăreţu

Researcher: Lorand Parajdi, “Babeş-Bolyai" University

1 Research topic

The problem we were presented with is the following:
“Theres something very important I forgot to tell you ! Dontt cross the streams... It would be bad... Try to imagine all your life as you know it stopping instantaneously and every molecule in your body exploding at the speed of light."

Dr. Egon Spengler

Ghostbusters use streams to remove ghosts. As indicated above, it is vital that streams never cross. Lets say that the ten Ghostbusters are chasing ten ghosts.
Is it possible to assign one ghost to every Ghostbusters in such a way that their stream will never cross?
Is it possible to design a computer solution to this problem?
Is it possible to link every Ghostbuster to his ghost without any stream crossing another stream?

2 Results

We proved a much stronger statement than the initial one (the case with ten Ghostbusters and ten ghosts), this being:
Given any natural number n of ghosts and Ghostbusters it is possible to find a correspondence between Ghostbusters and ghosts such that the streams connecting each Ghostbusters to his ghost do not cross, whenever any three of the given points are not collinear.
In the case in which there are three or more collinear points, the correspondence can be made in only some cases, while in others it cannot.
We approached the problem from two very different angles and so, we came up with two distinct solutions, as shown below.

3 The first proof - proving the existence

This solution belongs to Radu Ilieş and Andrei Man.

3.1 Notations

We denote by AB the distance from point A to point B. The symbol $\sum$ stands for summation of the given arguments.

3.2 The initial approach

We started by considering a simpler case: 2 ghosts and 2 Ghostbusters (hunters).
Let G_1 and G_2 be the positions of the ghosts and H_1 and H_2 be the positions of the ghostbusters. If any 3 points arent on the same line we will have 2 possibilities of connecting the points:

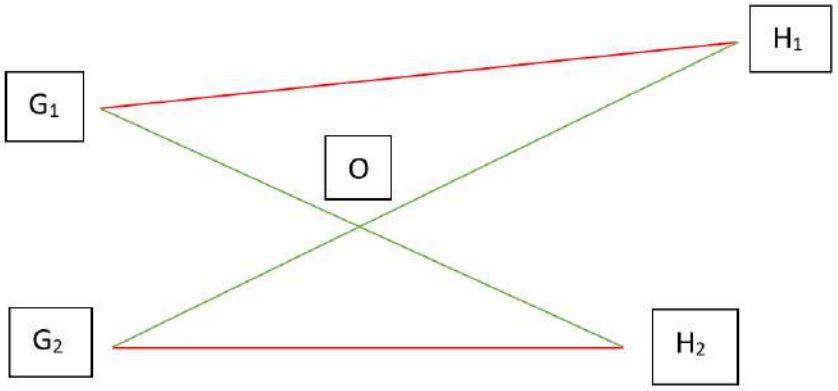


Figure 1: *The particular case* $n = 2$

We can easily find a solution in this case. We have also observed that:

$$H_1G_1 + H_2G_2 < H_1G_2 + H_2G_1$$

and this has led us to the solution for the general case.

3.3 The general case

We will start by considering two sets:
$A = \{H_1, H_2, \dots H_n\}$ and $B = \{G_1, G_2, \dots G_n\}$, which are the positions of the ghostbusters (set A) and the positions of the ghosts (set B) [1].
Now, we consider one-to-one functions (permutations):

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}.$$

For each ghostbuster $H_i \in A$, there is a unique ghost $G_{\sigma(i)} \in B$ and vice-versa.
Let the distance between these two points be $d_i = H_iG_{\sigma(i)}$. For every choice of the function σ, let $S(\sigma)$ be the sum of all those distances,

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} H_iG_{\sigma(i)}.$$

There is a finite number of choices for the function σ (that number is $n!$, and we will prove this later), so it is possible to choose a function reaching the minimum value of $S(\sigma)$.

Let σ_0 be that function (if there are several such functions, we might consider any of them) for which the sum is minimal and the value of the sum for this function is

$$S(\sigma_0) = \sum_{i=1}^{n} H_i G_{\sigma_0(i)}.$$

Now lets assume that for this situation (in which the function σ_0 matches the points between the two sets A and B) there are two segments $(H_i G_{\sigma_0(i)})$ and $(H_j G_{\sigma_0(j)})$ which intersect, where $i, j \in \mathbb{N}$ and $1 \leq i < j \leq n$.
Let $H_i G_{\sigma_0(i)} \cap H_j G_{\sigma_0(j)} = \{O\}$.

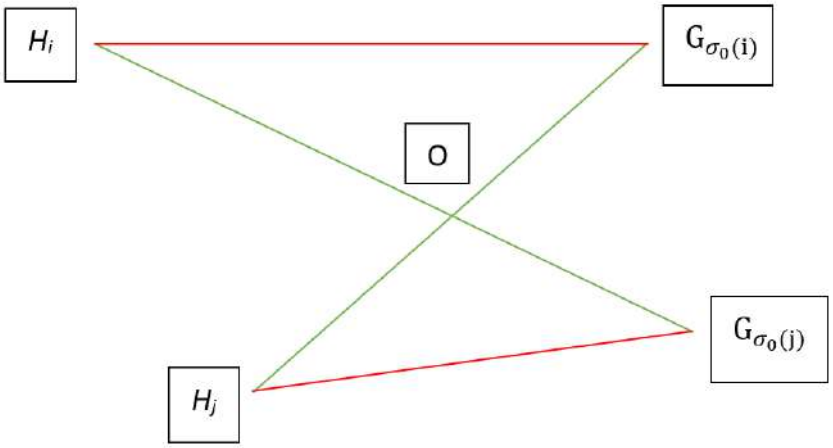


Figure 2: *The application of the triangle inequality in the general case*

Now we will apply the triangle inequality in the triangles $\triangle H_i O G_{\sigma_0(j)}$ and $\triangle H_j O G_{\sigma_0(i)}$:

$$OH_i + OG_{\sigma_0(j)} > H_i G_{\sigma_0(j)} \tag{1}$$
$$OH_j + OG_{\sigma_0(i)} > H_j G_{\sigma_0(i)}. \tag{2}$$

By adding these two inequalities we get:

$$OH_i + OG_{\sigma_0(i)} + OH_j + OG_{\sigma_0(j)} > H_i G_{\sigma_0(j)} + H_j G_{\sigma_0(i)} \tag{3}$$
$$H_i G_{\sigma_0(i)} + H_j G_{\sigma_0(j)} > H_i G_{\sigma_0(j)} + H_j G_{\sigma_0(i)} \tag{4}$$

Therefore there exists a sum whose value is less than $S(\sigma_0)$ [2], contradiction with the minimality of $S(\sigma_0)$.
Thus, none of the segments will have a common point in the situation given by σ_0.
Moreover, setting the coordinates of the points we can compute all these sums and find not only the value of σ_0, but also the way we should match the points as the segments do not intersect.

Now we will show that we have $n!$ choices for a one-to-one function:
$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ where n is a natural number greater than 1.
$f(1)$ can be chosen in n ways.
$f(2)$ can be chosen in $n-1$ ways (because it is a one-to-one function and the value of $f(1)$ is already taken).
...
$f(n)$ can be chosen in 1 way.
By the principle of multiplication, there will be $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ such functions.

4 The second proof - finding the correspondence

This solution was given by Mihnea Leonte.

4.1 Notations

We denote by

(AB)	the open line segment determined by A and B
$[AB]$	the closed line segment determined by A and B
$(AB$	the open half-line with initial point A containing B
$\text{Int}(\widehat{AOB})$	the set of the interior points of the angle $\widehat{AOB}$ [3]
$\text{Ext}(\widehat{AOB})$	the set of the exterior points of the angle $\widehat{AOB}$
$\text{Int}(\triangle ABC)$	the set of the interior points of the triangle ABC

Remarks :
$M \in \text{Int}(\widehat{AOB}) \Leftrightarrow m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{BOM}) = m(\widehat{AOB})$ and $m(\widehat{AOM}) \neq 0 \neq m(\widehat{BOM})$
$\text{Int}(\triangle ABC) = \text{Int}(\widehat{ABC}) \cap \text{Int}(\widehat{ACB}) \cap \text{Int}(\widehat{BAC})$

4.2 Explaining the idea

We started with a few cases with small numbers of characters(5-6 points of each type) and we tried to find a convenient correspondence between ghosts and ghostbusters. After determining such a correspondence in each case we searched for a common property and found out that in every configuration there was a ghost-hunter line which splits the plane into two half-planes such that each half-plane contains the same number of ghosts and ghostbusters.

We tried to determine this line by choosing the point (O) with the minimum x-coordinate and then numbering the other points in a way that indicates how many characters are contained in a specific angle formed with this point.

This method is very similar to some methods used to determine the convex hull of a set of points and so we did some research on this topic.

In mathematics, the convex hull of a set X of points in the Euclidean plane is the smallest convex set that contains X.
For instance, when X is a bounded subset of the plane, the convex hull may be visualized as the shape enclosed by a rubber band stretched around X.
(`https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_hull` - Monday June 3rd 2019, 15:29)

Our solution has some common ides with two of the algorithms used to determine the convex hull of a finite set of points (*Graham scan algorithm* and *Divide and conquer algorithm*).
The solution we found is the following:

4.3 The proof

We work in the case when there are no three characters (ghosts or Ghostbusters) disposed in a straight line.
Let us consider a Cartesian coordinate system in the plane and let

$$\mathcal{V}_n = \{V_i(x_i, y_i) \mid i = 1, \ldots, n\},\ \mathcal{F}_n = \{F_i(z_i, t_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$$

be the set of hunters (Ghostbusters) and the set of ghosts, respectively. Obviously, any three points from $\mathcal{V}_n \cup \mathcal{F}_n$ are not collinear.

Let us consider a bijective function $g : \mathcal{V}_n \to \mathcal{F}_n$ with

$$g(V_i) = F_{j_i}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

It means that $\{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.
To solve the problem we will prove that one can construct a function g having the property

$$\mathscr{P} : \textit{Any two of the line segments } (V_1F_{j_1}), \ldots, (V_nF_{j_n}) \textit{ do not intersect.}$$

We prove by way of induction on n the following statement

$$P(n)\text{: } \textit{Given } n \in \mathbb{N}^*\textit{, one can construct a bijection } g \textit{ having the property } \mathscr{P}.$$

For $n = 1$ the statement is obviously true since the only bijection – defined by $g(V_1) = F_1$ – has the property $\mathscr{P}$.
Let us show that $P(2)$ holds. In this case, $\mathcal{V}_2 = \{V_1, V_2\}$, $\mathcal{F}_2 = \{F_1, F_2\}$ and one can define $g : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{F}_2$ in two ways

$$\begin{cases} g_1(V_1) = F_1 \\ g_1(V_2) = F_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} g_2(V_1) = F_2 \\ g_2(V_2) = F_1 \end{cases}$$

Let us assume by way of contradiction that none of these functions has the property $\mathscr{P}$. Then

$$(V_1F_1) \cap (V_2F_2) \neq \varnothing \text{ and } (V_2F_1) \cap (V_1F_2) \neq \varnothing.$$

The segments (V_1F_1) and (V_2F_2) intersect if and only if

$$F_1 \in \operatorname{Int}(\widehat{V_2V_1F_2}) \setminus \operatorname{Int}(\triangle V_2V_1F_2).$$

We work with open segments since there are no three collinear points in $\mathcal{V}_2 \cup \mathcal{F}_2$. E.g., if F_1 were on $[V_2F_2]$, on $(V_1F_2 \setminus (V_1F_2]$, or on $(V_1V_2 \setminus (V_1V_2]$, then this non-collinearity condition would not hold.

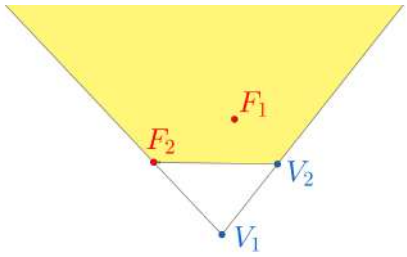


Figure 3: *The part of the plane containing F_1 provided that $(V_1F_1) \cap (V_2F_2) \neq \varnothing$*

Analogously, for the segments (V_2F_1) and (V_1F_2) to intersect one must have

$$F_1 \in \operatorname{Int}(\widehat{V_1V_2F_2}) \setminus \operatorname{Int}(\triangle V_2V_1F_2).$$

Therefore

$$\begin{cases} (V_1F_1) \cap (V_2F_2) \neq \varnothing \\ (V_2F_1) \cap (V_1F_2) \neq \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 \in \operatorname{Int}(\widehat{V_2V_1F_2}) \setminus \operatorname{Int}(\triangle V_2V_1F_2) \\ F_1 \in \operatorname{Int}(\widehat{V_1V_2F_2}) \setminus \operatorname{Int}(\triangle V_2V_1F_2) \end{cases}$$

Since $\operatorname{Int}(\widehat{V_2V_1F_2}) \cap \operatorname{Int}(\widehat{V_1V_2F_2}) = \operatorname{Int}(\triangle V_2V_1F_2)$ [4], the above condition becomes

$$F_1 \in \left(\operatorname{Int}(\widehat{V_2V_1F_2}) \setminus \operatorname{Int}(\triangle V_2V_1F_2)\right) \cap \left(\operatorname{Int}(\widehat{V_1V_2F_2}) \setminus \operatorname{Int}(\triangle V_2V_1F_2)\right) = \varnothing,$$

which is impossible.
This contradiction shows that our assumption must be wrong, thus either g_1, or g_2 has the property $\mathscr{P}$, and $P(2)$ is true.

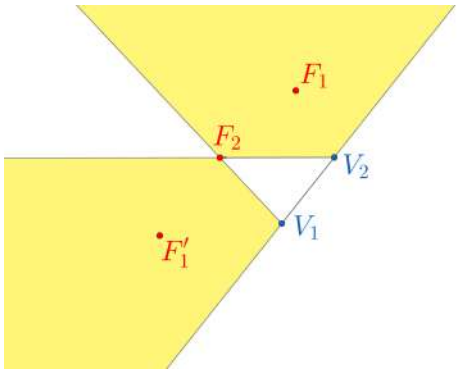


Figure 4: *The parts of the plane where F_1 must lie (in the same time) in order to have $(V_1F_1) \cap (V_2F_2) \neq \emptyset$ and $(V_1F_2) \cap (V_2F_1) \neq \emptyset$. One can easily notice that these parts have no common points (since we are working with open segments, F_2 is not a common element for the two colored plane sections).*

Assume that the statements $P(1)$, $P(2)$, ...,$P(n)$ are proved and let us show that $P(n+1)$ holds. For this, we prove that for any points $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}, F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ such that any three of them are not collinear, *there exist some $i, j \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ such that the line V_iF_j determines two open half-planes S_1 and S_2 such that for some $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, S_2 contains exactly $n-k$ hunters and exactly $n-k$ ghosts.*
Of course, this means that all the other k ghosts and k hunters are in S_1.
The case $k = 0$ corresponds to the situation when all the ghosts and hunters, except for V_i and F_j are in S_2, hence we are in the situation of $P(n)$, which is true, and the case $k = n$ is similar. If $1 \leq k < n$, all the (open) line segments connecting points from S_i are in S_i $(i = 1,2)$, hence the statement $P(n+1)$ is true since $P(n-k)$ and $P(k)$ are true. Indeed, the hypothesis of the induction step provides us with the bijections

$$g' : \mathcal{V}_{n+1} \cap S_2 \to \mathcal{F}_{n+1} \cap S_2 \text{ and } g'' : \mathcal{V}_{n+1} \cap S_1 \to \mathcal{F}_{n+1} \cap S_1$$

which satisfy $\mathcal{P}$ and, consequently, taking $j_i = j$, the function

$$g : \mathcal{V}_{n+1} \to \mathcal{F}_{n+1},\ g(V_m) = \begin{cases} F_{j_i} = F_j, & \text{if } V_m = V_i \\ g'(V_m), & \text{if } V_m \in \mathcal{V}_{n+1} \cap S_2 \\ g''(V_m), & \text{if } V_m \in \mathcal{V}_{n+1} \cap S_1 \end{cases}$$

is a bijection which satisfies $\mathcal{P}$.
Thus, finding a line V_iF_j which determines the half-planes S_1 and S_2 satisfying the above conditions completes the induction step and ends the solution.
Next, we will explain how to construct the above-mentioned line V_iF_j. The algorithm we implemented is based on this construction.
First, let us translate the initial Cartesian coordinates system such that the point from $\mathcal{V}_{n+1} \cup \mathcal{F}_{n+1}$ with the minimum x-coordinate $(\min(\min\limits_{i=1,\ldots,n} x_i; \min\limits_{i=1,\ldots,n} z_i))$ becomes the new origin O. If there are two such points in $\mathcal{V}_{n+1} \cup \mathcal{F}_{n+1}$, one can rotate the initial system with an appropriate angle α in order two obtain only one point fulfilling this condition. With no loss of generality, one can consider that this point is a hunter. If it is a ghost, one can get the right construction by simply permuting the letters V and F.
Let this hunter be V_o and let us consider the half-lines $(V_oF_1, (V_oF_2, \ldots, (V_oF_{n+1}$. We rearrange the points $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ by the measure of the angle these half-lines form with $(OY = (V_oY$ as follows

$$0 < m(\widehat{F_{a_0}OY}) < m(\widehat{F_{a_1}OY}) < \ldots < m(\widehat{F_{a_n}OY}) < 180^\circ$$

where $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = \{1,2,\ldots,n+1\}$.
For any $k = 0,\ldots,n$, we consider the pairs of nonnegative integers (v_k, f_k), where v_k denotes the number of all the hunters in $\text{Int}(\widehat{F_{a_k}OY})$ and f_k denotes the number of all the ghosts in $\text{Int}(\widehat{F_{a_k}OY})$.
From the way we arranged the points $F_{a_0}, F_{a_1}, \ldots, F_{a_n}$ it follows that

$$f_k = k,\ \forall k = 1,\ldots,n$$

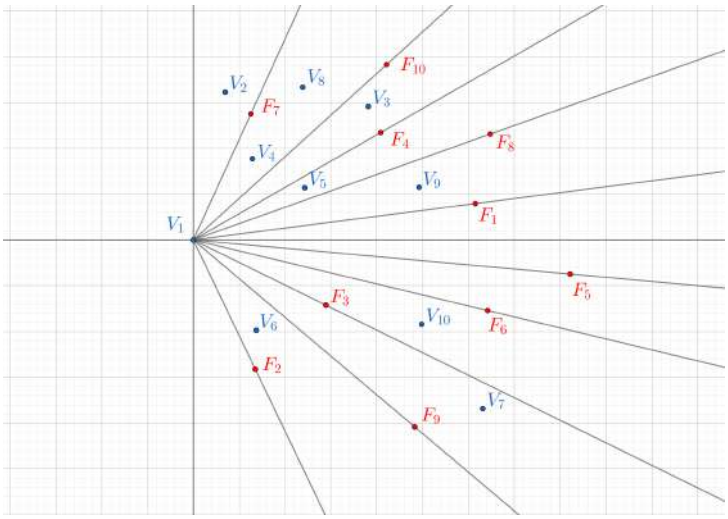


Figure 5: *An example of convenient choice of the coordinates system. Here,* $V_o = V_1 = O$ *and* $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 1$, $a_6 = 5$, $a_7 = 6$, $a_8 = 3$, $a_9 = 9$ *and* $a_{10} = 2$

since all the ghosts which determine interior points of $\widehat{F_{a_k}OY}$ are $F_{a_0}, \ldots, F_{a_{k-1}}$ and $f_0 = 0$ since $\text{Int}(\widehat{F_{a_0}OY})$ contains no ghost. Hence

$$(v_k, f_k) = (v_k, k), \quad \forall k = 0, \ldots, n.$$

We prove by way of contradiction that for some $j \in \{a_0, \ldots, a_n\}$ the line V_oF_j determines two open half-planes such that in each of them we have the same number of ghosts and hunters. Assume that such a j does not exist. This means that there doesn't exist $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ such that $v_k = f_k$ or, equivalently,

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad v_k \neq f_k \Leftrightarrow \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad v_k \neq k.$$

Since $\text{Int}(\widehat{F_{a_k}OY}) \subset \text{Int}(\widehat{F_{a_{k+1}}OY})$, the number of hunters in $\text{Int}(\widehat{F_{a_{k+1}}OY})$ is at least the number of hunters in $\text{Int}(\widehat{F_{a_k}OY})$, hence $v_{k+1} \geq v_k$. Also, $v_k \geq 0$ for any $k = 1, \ldots, n$. Thus

$$v_n \geq \ldots \geq v_1 \geq v_0 \geq 0.$$

But

$$\begin{cases} v_0 \neq 0 \\ v_0 \geq 0 \end{cases} \overset{v_0 \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} v_0 \geq 1 \Rightarrow v_1 \geq 1.$$

Then

$$\begin{cases} v_1 \neq 1 \\ v_1 \geq 1 \end{cases} \overset{v_1 \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} v_1 \geq 2 \Rightarrow v_2 \geq 2,$$

and so on. Finally, we have

$$\begin{cases} v_{n-1} \neq n-1 \\ v_{n-1} \geq n-1 \end{cases} \overset{v_{n-1} \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} v_{n-1} \geq n \Rightarrow v_n \geq n$$

and

$$\begin{cases} v_n \neq n \\ v_n \geq n \end{cases} \overset{v_n \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} v_n \geq n+1,$$

which is impossible, because the maximum possible value for v_n is n (the plane was supposed to contain $n+1$ hunters and none of the counts $v_0, v_1, \ldots, v_n$ includes V_o).
This contradiction shows that our assumption must be wrong, so there exists some k such that $v_k = k = f_k$. The line $V_oF_{a_k}$ is the line V_iF_j we wanted to construct.

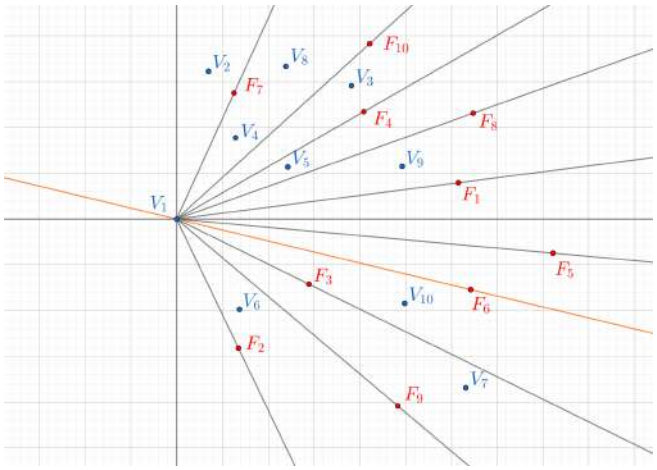


Figure 6: *In this example, V_1F_6 is the line we are searching for. After drawing this line, the corresponding statement $P(10)$ split into $P(3)$ (the lower half-plane determined by V_1F_6) and $P(6)$ (the upper half-plane determined by V_1F_6)*

Remarks: 1. For defining the bijection g, we have $g(V_o) = F_{a_k}$. As we saw, $v_k = f_k = k$, and all the other values of g can be determined by successively applying the above algorithm to the remaining k hunter-ghost pairs above $V_oF_{a_k}$ and to the remaining $n-k$ hunter-ghost pairs below $V_oF_{a_k}$.
2. Another convenient way of choosing a Cartesian coordinates system would have been to translate the initial one so that the point from $\mathcal{V}_{n+1} \cup \mathcal{F}_{n+1}$ with the minimum y-coordinate $\min(\min\limits_{i=1,\dots,n} y_i; \min\limits_{i=1,\dots,n} t_i)$ becomes the new origin O. In this case we would rearrange the points by the measure of the angle that the half-lines $(V_oF_1, (V_oF_2, \dots, (V_oF_{n+1}$ make with $(OX = (V_oX$ (which is equivalent to rearranging the points by the value of the slope of these half-lines).

5 Conclusions and further research

The initial problem asks the readers if a non-crossing ghost-hunter correspondence can be found in any case. As stated in the beginning of this article, the case when 3 or more characters are collinear can only sometimes be solved. It would seem that in this case, even the position of the $2n$ points matters, and since our proofs are based on the assumption that no 3 characters are collinear, they do not include this case. We will continue to study the problem in order to find a solution for this particular case.

A possible generalization of this topic is to turn it into a problem of solid geometry. Having $2n$ points in space can one find a correspondence which satisfies the conditions of the initial problem ? A starting idea would be trying to project all of the points into a plane such that no three characters are collinear. If such a plane could be found, then this would solve the problem, since the 2D version is already solved. The hardest part is determining a way to find this plane, if one even exists.

This generalization is still being researched and thus we cannot give a conclusive answer yet.

Editing Notes

[1] It is assumed that any three of the points are not collinear.

[2] Namely the sum $S(\sigma)$ corresponding to the function σ where the values $\sigma_0(i)$ and $\sigma_0(j)$ are exchanged ($\sigma(i) = \sigma_0(j)$, $\sigma(j) = \sigma_0(i)$ and $\sigma(k) = \sigma_0(k)$ if $k \neq i$ and $k \neq j$).

[3] The "angle $\widehat{AOB}$" denotes also the whole region of the plane lying between the half lines $(OA$ and $(OB$; the side is chosen such that its measure $m(\widehat{AOB})$ lies between $0°$ and $180°$.

[4] See the Remark section 4.1. In fact any intersection of two regions among $\text{Int}(\widehat{ABC})$, $\text{Int}(\widehat{ACB})$ and $\text{Int}(\widehat{BAC})$ is equal to $\text{Int}(\triangle ABC)$.

Savoir compter jusqu'à 1

Année 2018 – 2019

Thibaut Castex, Louis Manresa, Gaëtan Claret,
Margot Mariotte et Kévin Dezcazeaux (classe de 4e)

Enseignants : Yann Lefrancois, Simon Jubert, Julie Poupin, Carole Pons et Fanny Decamps

Établissements : Collège Nelson Mandela (Noé), Collège André Abbal (Carbonne)

Chercheur : Yohann Genzmer, Institut de Mathématiques de Toulouse

1. Présentation du sujet

On écrit les nombres de 1 à N.
Quel est le plus petit entier N supérieur ou égal à 2 tel que le nombre de fois que l'on écrit 1 (***un***) pour ce faire est exactement N ?

Exemple :

N=10 donc on compte combien il y a de ***un*** entre 1 et 10.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **1**0

On remarque que il y a 2 fois le chiffre **1**. Donc 10 ne répond pas au problème.

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

- Nombres de **un** de 0 à 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 et 1000
- On a conjecturé que le nombre de un entre 0 et 10^n est $nx10^{n-1}+1$.
- Résolution du problème grâce à des logiciels informatiques scratch et python

3. Texte de l'article

a) première recherche

On a commencé par écrire les nombres de 1 à 100 sur le cahier on a compté 21 ***un*** (cela ne résoud pas le problème).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 **1**0 **11** **1**2 **1**3 **1**4 **1**5 **1**6 **1**7 **1**8 **1**9 20 2**1** 22 23 24 25 26 27 28 29 30 3**1** 32 33 34 35 36 37 38 39 40 4**1** 42 43 44 45 46 47 48 49 50 5**1** 52 53 54 55 56 57 58 59 60 6**1** 62 63 64 65 66 67 68 69 70 7**1** 72 73 74 75 76 77 78 79 80 8**1** 82 83 84 85 86 87 88 89 90 9**1** 92 93 94 95 96 97 98 99 **1**00

De la même manière on a écrit les nombres de 0 à 200 on a compté 140 ***un*** (cela ne résoud toujours pas le problème).
Après avoir compté les nombres de ***un*** de 0 à 200, on a essayé de trouver combien il y avait de ***un*** dans les nombres compris entre 0 et 300 mais on ne les a pas écrits on a commencé à additionner les résultats précédents.
De 0 à 99 il y a 20 ***un*** donc de 200 à 299 il y en a 20 ***un*** (comme de 0 à 99)
On additionne 140 + 20 = 160
donc on a compté 160 ***un***

b) Nombre de ***un*** de 0 à 10^n

Le nombre de ***un*** de 0 à 10^n est donné par la formule $n\times10^{(n-1)}+1$.

Exemple :
Entre 0 et $1000=10^3$ il y a 301 ***un*** car $3x10^{3-1}+1=301$.

Explication de la formule :
On a trouvé la formule en comptant les ***un*** jusqu'aux premières puissances de 10.

Pour $1000=10^3$:
21 est le nombre de ***un*** de 0 à 100,
20x9 est le nombre de ***un*** des unités et des dizaines entre 101 et 999. (car il y a 20 ***un*** de 0 à 99 et 9 centaines)
99 est le nombre de ***un*** des chiffres des centaines de 100 à 199 .
1 est le nouveau ***un*** de 1000.
on additionne est on trouve : $21+20x9+99+1=301=3x10^{3-1}+1$.

Pour $10\,000=10^4$:
301 est le nombre de ***un*** de 0 à $1000=10^3$,
300x9 est le nombre de ***un*** des unités et des dizaines entre 1001 et 9999.
999 est le nombre de ***un*** du chiffre des milliers de 1000 à 1999 .
1 est le nouveau ***un*** de 1000.
On additionne et on trouve : $301+300x9+999+1=4\,001=4x10^{4-1}+1$.

Pour $100\,000=10^6$:
4 001 est le nombre de ***un*** de 0 à $10\,000=10^4$,
4000x9 est le nombre de ***un*** des unités et des dizaines entre 10 001 et 99 999.
999 c'est le nombre de ***un*** de 10 000 à 19 999 .
1 est le nouveau ***un*** de 10 000.
On additionne et on trouve : $4001+4000x9+9999+1=50\,001=5x10^{5-1}+1$.

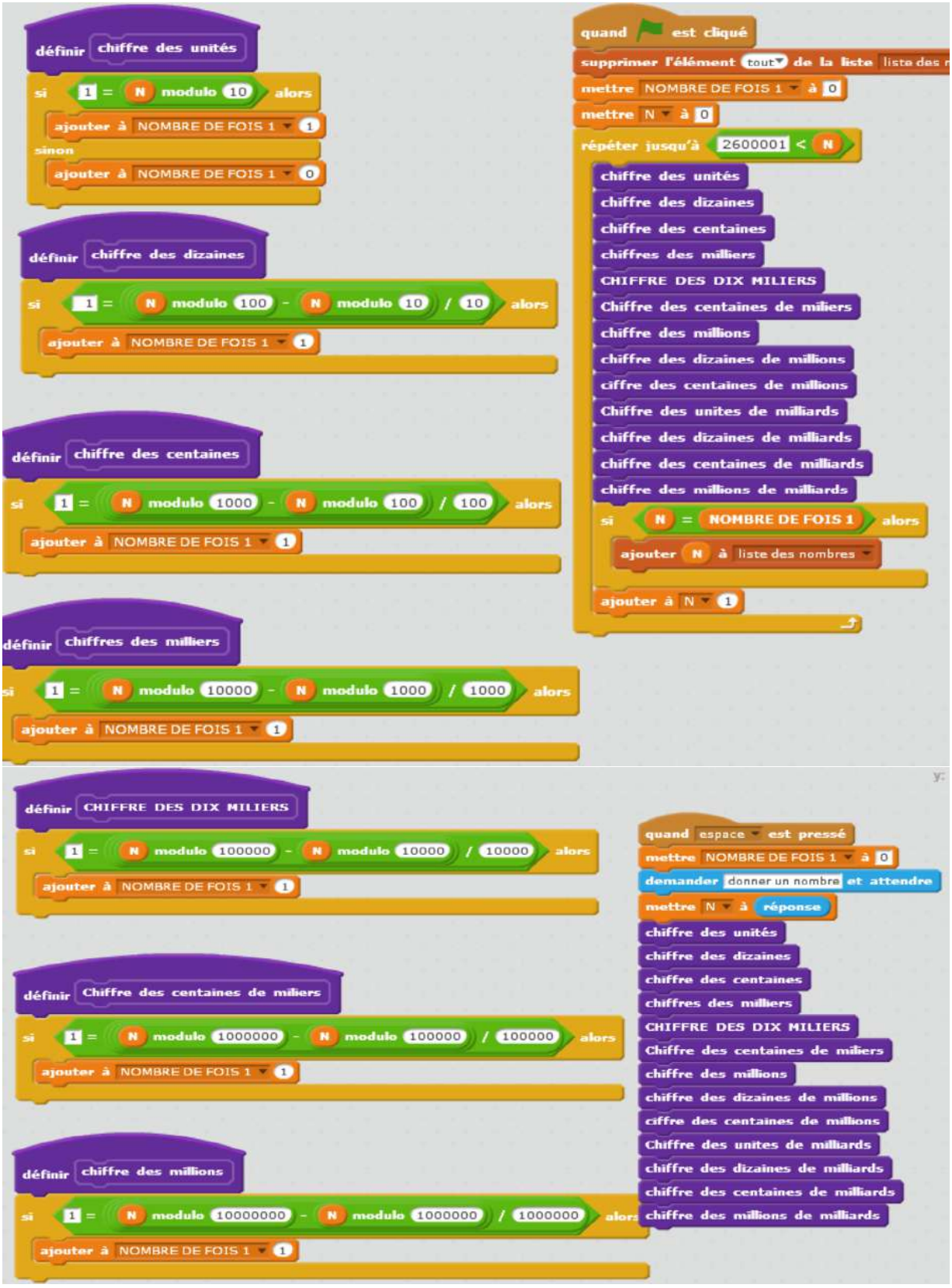
Au vu des résultats on a conjecturé que le nombre de ***un*** de 0 à 10^n est $n\times10^{(n-1)}+1$.

De 0 jusqu'à 10^{10} on trouve 10 000 000 001 donc cela se rapproche fortement d'une solution du problème. Nous avons donc essayé de reprendre nos calculs pour savoir s'il existait un nombre qui répondrait au problème et qui est inférieur à 10 000 000 001.

c) Avec des programmes informatiques

Avec Scratch :

Voici le programme que nous avons écrit, il compte le nombre de ***un*** en utilisant des variables et le reste de différentes divisions par 10.



Avec Python :

```
nn = 0
max = 100
for n in range(0, max + 1):
    nn += str(n).count("1")
    if n == nn:
        print(nn)
        break
```

Traduction du programme :

CRÉATION de la variable *NN* et ASSIGNATION de la valeur 0
POUR CHAQUE valeur de la liste de 0 à 101
ALORS
ASSIGNATION de *NN* à la valeur de l'ancienne valeur de *NN* + le nombre de fois que le symbole 1 apparaît au rang n
SI *N* est égal à *NN* ALORS
On affiche la valeur de *NN*
On stoppe la boucle

Cela a permis de trouver beaucoup de résultats.

```
1  nn = 0
2  max = 10000000
3  for n in range(0, max + 1):
4      nn += str(n).count("1")
5      if(n == nn):
6          print(nn)
7
```

```
0
1
199981
199982
199983
199984
199985
199986
199987
199988
199989
```

4. Conclusion

Nous avons finalement trouvé la réponse que l'on cherchait grâce aux logiciels :
lorsque l'on écrit tous les nombres de 0 à 199 981 on écrit 199 981 fois le nombre ***un***.
Nous pensons qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions, mais nous ne l'avons pas démontré.
Voici les 24 premières solutions :

199 981	1 599 981	2 600 000
199 982	1 599 982	2 600 001
199 983	1 599 983	
199 984	1 599 984	
199 985	1 599 985	
199 986	1 599 986	
199 987	1 599 987	
199 988	1 599 988	
199 989	1 599 989	
199 990	1 599 990	
200 000		
200 001		

ENI Game and Probability

Year 2019-2020

Klaudia Komuda, Marta Krzywdzińska, Marianna Nini Gozi, Magda Mikiel, Kinga Słomińska, Bartosz Trzosiński, Paweł Furmański, Anna Piskorz, Marta Skorupa

School: "Żmichowska",15th High School with Bilingual Department, Warsaw

Teacher: Agata Górniak, Jolanta Otrębska

Researcher: Marcin Moszyński

Linguistic consultations: Ewa Drobek

INTRODUCTION

Throughout the school year 2019/2020 we were taking part in a project Erasmus+ called "Maths &Languages". Our group worked on the subject called „ENI game".

RULES OF THE GAME:

- There are two players: H and S.
- The board consists of n tiles. The player H chooses a tile under which he hides his treasure. He also has 1 black stone.
- Then player S tries to find the treasure. He indicates his first guess with a white stone.
- The player H puts the black stone on the board on a tile that is **E**mpty (without treasure) and **N**on-**I**ndicated (by the white stone). Now the player S can either change his first guess or not. If he decides to change it, he moves his white stone into the place of his "second choice''- it cannot be the tile with the black stone.
- If the white stone is located on the tile with the treasure, the player S wins. Otherwise the player H will be the winner.

H – the person that hides the treasure

S – the person that searches for the treasure

n ($3 \leq n \leq 10$) – number of tiles

PROBLEM:

Which choice is better for H: keeping the first decision or not?

OUR GAMES:

Our team played the game many times to see which option would be more effective - changing the position of the white stones or not changing it. We checked the results with or without changing in a different number of tiles. We ended up with a conclusion that changing the position increases the winning rate and the absence of changing increases a losing rate.

EXCEL SIMULATION:

This is the simulation of ENI game, that we made in Excel. Program itself plays next games and shows us results like amount of wins with/without changing first choice and amount of losses with/without changing first choice. Moreover Excel shows us these results as percentage winning ratio in both cases (with/without change).

F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Treasure	First choice	p2	p3	p4	p5			First covered tile	p1	p2	p3	p4	p5	Final choice	change?	win?
1	1	2	3	4	5	0	1	5	1	2	3	4	0	1	FAŁSZ	PRAWDA
1	5	2	3	4	0	1	3	2	1	0	3	4	5	3	PRAWDA	FAŁSZ
1	4	2	3	0	5	1	1	5	1	2	3	4	0	1	PRAWDA	PRAWDA
1	2	0	3	4	5	1	1	5	1	2	3	4	0	1	PRAWDA	PRAWDA
1	1	2	3	4	5	0	2	4	1	2	3	0	5	3	PRAWDA	FAŁSZ
1	2	0	3	4	5	1	2	4	1	2	3	0	5	1	PRAWDA	PRAWDA

I'm going to try to explain how it works, basing on example of situation when N=5.

- Column F picks tile with treasure, in our simulation it's always tile no. 1.
- Column G takes random number from 1 to 5, to pick first choice.
- Columns H-K check which tiles aren't first choice (those are marked as 0) and which tiles can be covered (those are numbers from 2 to 5). We don't check the first tile because it's always tile with treasure, so it can't be covered.
- Column L checks how many of columns H-K equal "0" and depending on that if it's zero or one column with "0" the column M randomly picks number from 1-3 (in case of one "0") or from 1-4 (in case of no "0").
- Then column N basing on two previous ones, picks the covered tile.
- Columns O-S do the same thing as columns H-K so once again they check which tiles are available for optional change of choice.
- Column T picks maximum value in turns of random number from 1 to 4. That's final choice.

Comparing values from columns G and T Excel knows if in this case there was change of choice and checking if final choice equals 1, it knows if the game was won.

Here are final results of simulation for N=3, 4, 5.

N=3			
with change		without change	
win	loss	win	loss
70,04%	29,96%	36,85%	63,15%

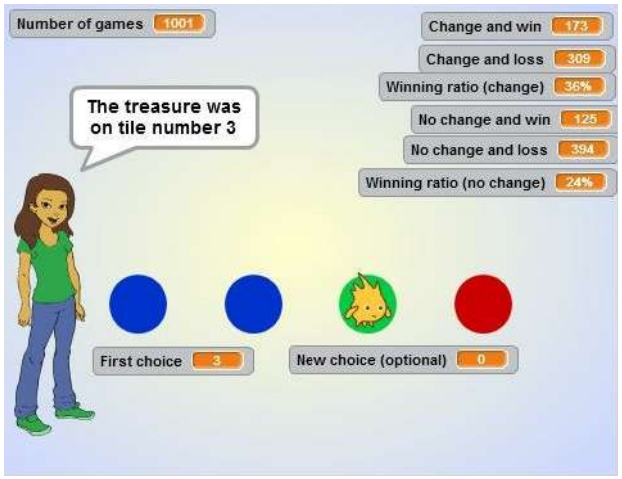
N=4			
with change		without change	
win	loss	win	loss
39,49%	60,51%	25,68%	74,32%

N=5			
with change		without change	
win	loss	win	loss
29,17%	70,83%	16,59%	83,41%

SCRATCH PROGRAM

Additionally, we have recreated the ENI game in the Scratch program, in order to see if the results were different from our Excel games. We have ran a vast amount of games with different value of n (3,4,5) to compare.

The results showed, that the number of won games was almost equal to the number of won Excel games, which maintained the correctness of Excel results and conclusions we have drawn from them.



Scratch simulation gave us following results: for N=3 winning ratio 63% with change and 32 % without change, for N=4 winning ratio 36% with change and 24% without change, for N=5 winning ratio 30% with change and 18% without change.

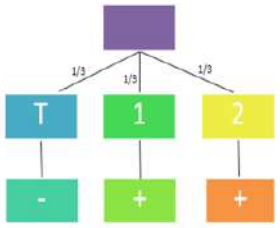
Comparing results from Scratch to results from our Excel simulation showed, that they're very similar to each other, making our simulations valid.

PROBABILITY RESEARCH:

To find a formula we tried using the tree diagram method. It allowed us to calculate the probability of winning when we change our decision with a given n.

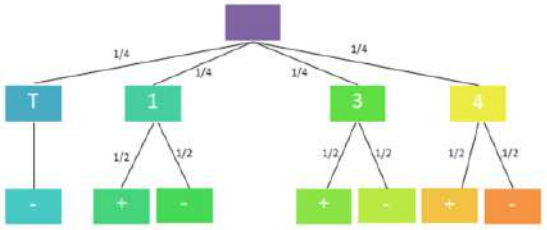
With the help of our teachers we finally managed to draw the diagrams. Here is an example:

n=3



$$P(+) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

n=4

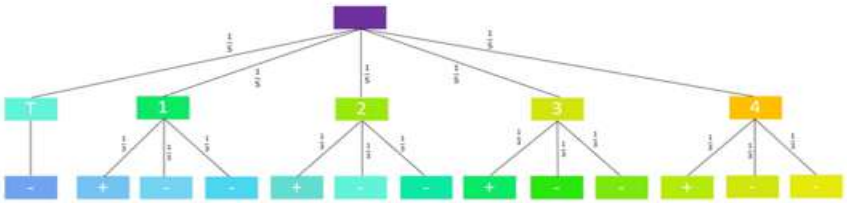


$$P(+) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(+) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{8}$$

After drawing a diagram we were able to calculate the probability of winning the game. For the parameters n=3 it was ⅔. (the diagram on the left). For n=4, the probability of winning equalled ⅜ (the diagram on the right).

For n=5, the probability of winning equalled 4/15 (the diagram below).



$$P(+) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

$$P(+) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{15}$$

Through analysis of the numbers we managed to come up with a formula that matched all of our calculations.

$$(n-1) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-2}$$

COMPARISON

n	Excel simulation	Scratch	formula
3	69%	63%	67%
4	38%	36%	38%
5	28%	30%	27%
6	21%	_	21%
7	18%	_	18%
8	15%	_	13%
9	14%	_	13%

WHAT IF WE USE MORE BLACK STONES?

$$(n-1)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-(k+1)}$$

Here is the comparison of our Excel results and calculations based on the formula for k=2:

n	Excel simulation	formula
4	71,88%	75,00%
5	52,63%	40,00%
6	30,00%	27,78%
7	33,33%	21,43%
8	10,00%	17,50%
9	16,67%	14,81%

n - number of tiles

k - number of black stones

OVERVIEW:

We played the game a couple of times and noted the results. Counted the probability of winning with both strategies based on our results. Compared the figures to the mathematically calculated probabilities and finally come up with a formula. We came to the conclusion that the probability of winning is higher when you change your first choice.

32
MATH
en
JEANS

Labo de MATHS
Lycée Marguerite de Navarre
BOURGES 18
INSA

Les additions pannumériques

Année 2018 - 2019

Camille Lacluche, Julie Monard et Lyna Ouffela–Ménecier (classe de 4e)

Établissement : Collège Henri de Montherlant, Neuilly-en-Thelle

Enseignant : Morgan Ide

Chercheur : Marc Bonino, Université paris 13

1 Présentation du sujet

Sujet : On veut faire l'addition de deux nombres entiers à trois chiffres pour en obtenir un troisième de telle façon que tous les chiffres de 1 à 9 apparaissent dans cette addition. (1)

Exemple :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle ①} \\ 6\ 5\ 4 \\ +\ 3\ 1\ 8 \\ \hline 9\ 7\ 2 \end{array}$$

Les questions posées :

- Que peut-on remarquer concernant les chiffres du résultat de l'addition ? Est-ce une coïncidence ?
- Peut-on faire la liste de toutes les additions répondant à la question ?

2 Annonces des conjectures et résultats obtenus

Il semble que la somme des chiffres du résultat soit toujours de 18.

Exemples :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle ①} \\ 6\ 5\ 4 \\ +\ 3\ 1\ 8 \\ \hline 9\ 7\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle ①} \\ 2\ 8\ 3 \\ +\ 1\ 7\ 6 \\ \hline 4\ 5\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle ①} \\ 1\ 5\ 9 \\ +\ 3\ 2\ 7 \\ \hline 4\ 8\ 6 \end{array}$$

3 Texte de l'article

3.1 Pourquoi 18?

Propriété 1 : Dans une addition pannumérique il y a exactement une retenue, et celle-ci vaut 1.
Nous allons étudier les retenues dans ce type d'opération. Pour prouver qu'il y a forcément une retenue, nous allons supposer qu'il n'y en a pas :

Notons a, b, c, d, e, f, g, h, i les 9 chiffres intervenant dans notre opération

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\ d\ e\ f \\ \hline g\ h\ i \end{array}$$

Donc $c+f=i$, $b+e=h$ et $a+d=g$.

La somme des chiffres de 1 à 9 est de 45, donc

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$$

On fait apparaitre les regroupements ci-contre :

$$\begin{aligned} (a+d)+(b+e)+(c+f)+g+h+i &= 45 \\ g+h+i+g+h+i &= 45 \\ 2\times(g+h+i) &= 45 \\ g+h+i &= 22,5 \end{aligned}$$

Notation 1 :

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\ d\ e\ f \\ \hline g\ h\ i \end{array}$$

$c+f=i$
$b+e=h$
$a+d=g$

Or g, h et i sont des chiffres donc leur somme donnera un nombre entier. Donc l'hypothèse de départ est fausse, il y a forcement une retenue. (2)

Nous voulons montrer que la retenue a toujours une valeur de 1 :
La retenue ne sera pas supérieure à 1 car les plus grands chiffres que nous pouvons additionner sont 8 et 9 qui donneront 17, donc la retenue ne sera pas supérieure à 1, et comme nous l'avons démontré précédemment, il y a forcement une retenue ; ce sera 1.

Montrons qu'il n'y a qu'une seule retenue. Si il y a deux retenues, elles proviennent de la colonne des unités et de celle des dizaines. Faisons la démonstration avec la colonne des unités :

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$$

On fait apparaitre les regroupements ci-contre : (3)

$$\begin{aligned} (a+d)+(b+e)+(c+f)+g+h+i &= 45 \\ (g-1)+(h-1+10)+(10+i)+g+h+i &= 45 \\ g-1+h+9+10+i+g+h+i &= 45 \\ 2g+2h+2i+18 &= 45 \\ 2g+2h+2i &= 27 \\ 2(g+h+i) &= 27 \\ g+h+i &= 13,5 \end{aligned}$$

Notation 2 :

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ a\ b\ c \\ +\ d\ e\ f \\ \hline g\ h\ i \end{array}$$

$c+f=10+i$
$b+e=h-1+10$
$a+d=g-1$

Or g, h et i sont des chiffres donc leur somme donnera un nombre entier. Donc l'hypothèse de départ est fausse, il ne peut y avoir deux retenues. En conclusion, il n'y a qu'une seule et unique retenue de 1.

Propriété 2 :

- La somme des chiffres du résultat d'une addition pannumérique est de 18.
- La somme des chiffres des termes d'une addition pannumérique est de 27.

Montrons que la somme du résultat est toujours 18. Si il y a une retenue, elle provient soit de la colonne des unités soit de celle des dizaines. Faisons la démonstration avec la colonne des unités :

On fait apparaitre les regroupements ci-contre :

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$$

$$\begin{aligned}(a+d)+(b+e)+(c+f)+g+h+i&=45\\ g+(h-1)+(10+i)+g+h+i&=45\\ g+h-1+10+i+g+h+i&=45\\ 2g+2h+2i+9&=45\\ 2g+2h+2i&=36\\ 2(g+h+i)&=36\\ g+h+i&=18\end{aligned}$$

Notation 3 :

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}\\ a\ \ b\ \ c\\ +\ d\ \ e\ \ f\\ \hline g\ \ h\ \ i\end{array}$$

$c+f=10+i$
$b+e=h-1$
$a+d=g$

Nous avons donc démontré que lorsque la retenue est sur la colonne des dizaines, nous trouvons toujours 18 au résultat.

$$45-18=27$$

La somme des chiffres des deux termes est donc de 27.

La démonstration précédente donne les mêmes résultats si la retenue provient de la colonne des dizaines.

3.2 La liste des résultats

Nous avons cherché la liste de tous les triplets dont la somme donne 18 car, comme nous l'avons démontré, la somme des chiffres du résultat d'une addition pannumérique donne 18. Ensuite, nous avons recherché si il y avait des additions pannumériques pour chaque résultat. Dans le tableau suivant : les résultats noirs possèdent au moins une addition pannumérique possible et les rouges, eux, n'en possèdent pas.

378	981	972	459	864	765	639
387	918	927	495	846	756	693
873	819	792	549	648	675	369
837	891	729	594	684	657	396
783	189	279	945	468	567	963
738	198	297	954	486	576	936

Il y a 31 résultats possibles. (4)

3.3 Les permutations

Nous avons découvert que nous pouvons créer 3 additions pannumériques de plus à partir d'une seule en effectuant des permutations.

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}\\ 6\ 5\ 4\\ +\ 3\ 1\ 8\\ \hline 9\ 7\ 2\end{array}\qquad\begin{array}{r} \textcircled{1}\\ 3\ 5\ 4\\ +\ 6\ 1\ 8\\ \hline 9\ 7\ 2\end{array}\qquad\begin{array}{r} \textcircled{1}\\ 6\ 1\ 4\\ +\ 3\ 5\ 8\\ \hline 9\ 7\ 2\end{array}\qquad\begin{array}{r} \textcircled{1}\\ 6\ 5\ 8\\ +\ 3\ 1\ 4\\ \hline 9\ 7\ 2\end{array}$$

Dans la première addition, nous permutons les chiffres des centaines (le 3 et le 6) pour obtenir la deuxième addition. La troisième addition est obtenue en permutant les chiffres des dizaines (le 1 et le 5) de la première addition. enfin nous avons fait de même avec les chiffres des unités (le 8 et le 4) pour obtenir la quatrième addition.
Il ne sert à rien de permuter deux chiffres car cela revient à n'en permuter qu'une seule (Par exemple permuter les dizaines et les centaines revient à permuter les unités). Permuter les trois chiffres ne change rien (par exemple 654 + 318 et 318 + 654 est la même addition pannumérique).

3.4 Combien il y en a?

Il y a 31 résultats possibles, nous avons donc déjà 31 additions pannumériques et grâce aux permutations nous avons au minimum 124 additions pannumériques possibles (31x4=124). Pour certains résulats, il existe 2 types d'additions pannumériques. C'est à dire 2 additions pour lesquelles il est impossible de passer de l'une à l'autre par permutations. Nous avons trouvé qu'en tout, il y avait 168 additions pannumériques possibles. (5)

864	739	125	981	246	735	954	716	238	891	567	324
	735	129		245	736		216	738		367	524
	729	135		236	745		736	218		527	364
	725	139		746	235		718	236		564	327
	571	293		324	657		673	281		654	237
	271	593		654	327		273	681		254	637
	591	273		354	627		683	271		634	257
	573	291		357	624		671	283		657	234
486	159	327	693	475	218	927	586	341	738	596	142
	157	329		478	215		386	541		196	542
	129	357		415	278		381	546		546	192
	127	359		275	418		581	346		592	146
936	752	184	459	173	286	576	192	384	495	168	327
	152	784		273	186		392	184		167	328
	782	154		183	276		182	394		128	367
	754	182		176	283		194	382		368	127
675	493	182	783	519	264	837	195	642	639	487	152
	492	183		514	269		145	692		187	452
	483	192		569	214		142	695		182	457
	193	482		219	564		192	645		482	157
	394	281		124	659		241	596			
	294	381		129	654		291	546			
	384	291		154	629		246	591			
	391	284		159	624		296	541			
594	278	319	468	293	175	657	439	218	729	586	143
	276	318		193	275		239	418		186	543
	218	376		273	195		419	238		546	183
	378	216		295	173		438	219		583	146
567	348	219	918	576	342	819	576	243	945	328	617
	248	319		572	346		276	543		628	317
	318	249		546	372		546	273		318	627
	349	218		376	542		573	246		327	618
	139	428		245	673		352	467		163	782
	439	128		645	273		362	457		763	182
	129	438		275	643		357	462		183	762
	138	429		243	675		367	452		162	783
648	291	357	972	658	314	963	245	718	873	614	259
	297	351		654	318		745	218		214	659
	251	397		618	354		215	748		654	219
	391	257		358	614		248	715		619	254
549	387	162	846	317	529	792	658	134			
	187	362		517	329		158	634			
	367	182		319	527		638	154			
	382	167		327	519		654	138			

4 Conclusion

Nous avons donc vu que dans une addition pannumérique il y avait forcement une retenue et qu'elle avait une valeur de 1. Ensuite, nous avons démontré que la somme des chiffres du résultat est de 18 et que la somme des chiffres des termes est égale à 27. Concernant les résultats, il y a 31 résultats possibles. Et pour chacune des additions pannumériques nous en trouvons 3 de plus grâce aux permutations. Au final, il y a 168 additions pannumériques.

Notes d'édition

(1) Si, comme le relecteur, vous l'ignoriez, "pannumérique" veut dire "constitué de tous les chiffres".

(2) Il aurait peut-être été plus simple de dire que que $2(g+h+i)$ est un nombre pair et ne peut donc pas être égal à 45.

(3) Ici, les auteurs travaillent en faisant l'hypothèse qu'il y a des retenues à la fois sur les unités et sur les dizaines. D'où les égalités $c+f=10+i$, $b+e+1=10+h$ et $a+d+1=g$.

(4)] (5) Il aurait pu être intéressant de savoir comment les auteures ont fait pour être certaines de ne pas avoir oublié de cas. Le relecteur étant paresseux, il a écrit un petit programme en python pour établir la liste des cas possibles, et il confirme que les nombres indiqués par les auteurs sont exacts. Bravo !

VENEZ
JOUER
56
55
VIE

Cas à 3 piliers et avec contrainte
Q_n nombre de déplacements de n disque

Titus et Pollux :
un jeu de traits et de points

Année 2018- 2019

Ida Fjellvaer, Candice Blache, Léonie Kittel, Julie Breuil, Clarisse Chaillou
Lysandre Soszynski (classe de Terminale) et Paco Vilas-Boas (classe de 2nde)

Établissements : Lycées E. Herriot 69006 Lyon et J.P. Sartre 68500 Bron

Enseignantes : Mmes Élisabeth Bruyère et Sylvie Di Fazio

Chercheurs : Aline Parreau et Valentin Gledel

I) Présentation du sujet

Il y a deux joueurs : Titus et Pollux.

Titus trace des traits de longueur 1 sur le plan. Il doit réussir à fermer une aire ne contenant aucun point.

A chaque fois que Titus trace un trait, Pollux ajoute un point, dans le but d'empêcher Titus d'arriver à ses fins.

Remarque : *Titus ne peut pas tracer ses traits sur les points de Pollux, et Pollux ne peut pas placer ses points sur les traits de Titus.*

II) Plan et annonce des conjectures et résultats obtenus

1. Les stratégies de Titus
    a. Les triangles
        i. La stratégie la plus rapide

La stratégie utilisant le moins de coups permet d'obtenir un demi triangle équilatéral d'aire $\frac{\sqrt{3}}{8}$

        ii. Le triangle équilatéral

Titus peut toujours fermer un triangle équilatéral de coté 1

    b. Les quadrilatères

Titus peut fermer un quadrilatère d'aire tendant vers une $\frac{1}{2}$ d'unité d'aire

2. Les stratégies de Pollux
    a. La grille carrée

Dans une grille carrée, Pollux peut toujours empêcher Titus de fermer une aire sans point.

    b. La grille hexagonale

Dans une grille hexagonale, Pollux peut toujours empêcher Titus de fermer une aire sans point.

III) Démonstrations

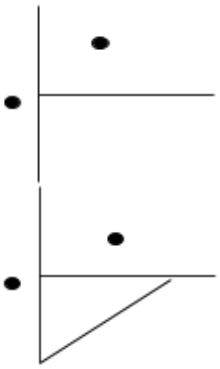
1. Les stratégies de Titus

2.a. Les triangles

2.a.i. La stratégie la plus rapide

Titus place un premier trait.
Pollux place un point à côté du trait au niveau du milieu de ce trait.

Remarque : *Peu importe le côté du trait où Pollux place son point, par symétrie, cela revient au même.*



Titus place son trait de sorte que ce dernier soit sur la médiatrice du premier segment, du côté opposé à celui où se trouve le point déjà placé.

Pollux place son point d'un côté ou de l'autre du deuxième trait, ce qui revient au même par symétrie.

Titus va pouvoir fermer un triangle rectangle correspondant à un demi-triangle équilatéral de côté 1

Conclusion : La stratégie utilisant le moins de coups permet d'obtenir un demi triangle équilatéral d'aire $\frac{\sqrt{3}}{8}$

2.a.ii. Le triangle équilatéral

Après avoir réussi à fermer en 3 coups un demi-triangle équilatéral, nous avons trouvé une stratégie pour fermer un triangle équilatéral de côté 1.

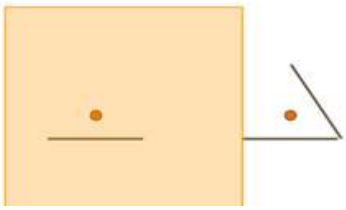
Titus trace un trait et Pollux place son point au-dessus du trait.
Remarque : *S'il le place en dessous, par symétrie cela revient au même.*

Titus trace un trait à une longueur 1 de son trait précédent.
Pollux peut jouer dans 3 aires différentes, symbolisées par les aires orange. On va expliquer comment dans les 3 cas, Titus réussit à fermer un triangle équilatéral.

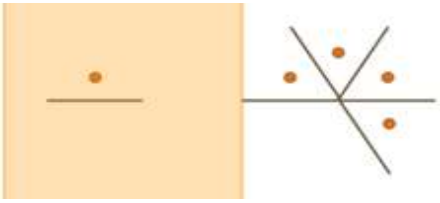
Cas n°1 Cas n°2 Cas n°3

Cas n°1 :

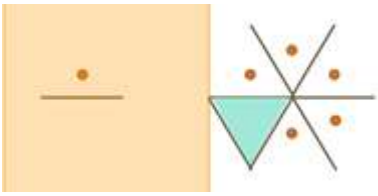
Titus joue à 60° de son trait précédent.
Pollux est alors contraint de jouer dans le domaine du plan délimité par les 2 derniers traits tracés pour empêcher Titus de fermer un triangle équilatéral.



Titus applique 3 fois cette stratégie



Titus réitère la stratégie, créant ainsi 2 possibilités de former un triangle équilatéral au coup suivant.



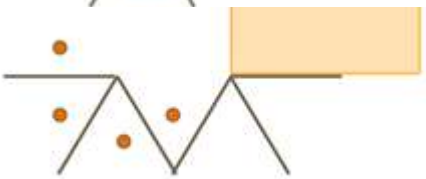
Pollux ne peut pas bloquer les 2.

Titus ferme donc un triangle équilatéral de côté 1.

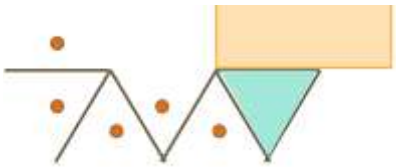
Cas n°2 :

Titus applique la stratégie du cas n°1 deux fois de suite.

Titus réutilise cette stratégie comme montré sur la figure ci-contre, créant ainsi 2 possibilités de former un triangle équilatéral au coup suivant.
Pollux ne peut pas bloquer les 2.

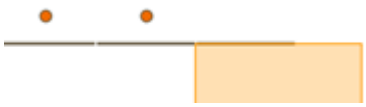


Titus ferme donc un triangle équilatéral de côté 1

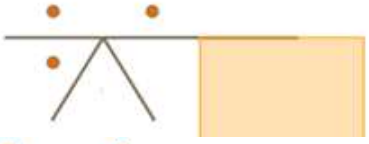


Cas n°3 :

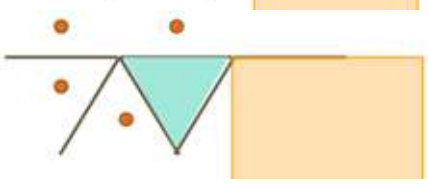
Titus trace un trait entre ses 2 précédents traits.
Pollux joue au-dessus de ce trait.
Remarque : *S'il joue en dessous, par symétrie cela revient au même*



Titus applique toujours la même stratégie pour obtenir la configuration ci-contre.



Titus crée ainsi 2 possibilités de former un triangle équilatéral au coup suivant.
Pollux ne peut pas bloquer les 2.



Titus ferme donc un triangle équilatéral de côté 1

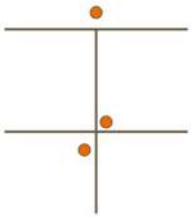
2.b. Les quadrilatères

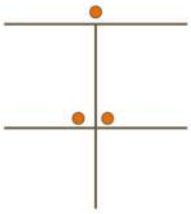
Après nous être penchés sur les triangles, nous nous sommes intéressés aux quadrilatères.
Nous avons donc cherché à fermer un quadrilatère en obtenant l'aire la plus grande possible.

Notre premier quadrilatère :
Le début de la partie est identique à celui de la stratégie la plus rapide pour obtenir un triangle.

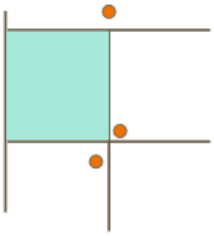
Titus place son troisième trait perpendiculairement au second de sorte que les deux segments aient le même milieu (ou du moins au plus près).

Pollux a alors deux possibilités : soit il joue en dessous du dernier trait joué soit il joue au-dessus.

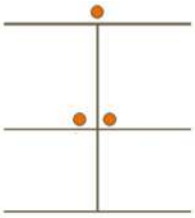




Si Pollux joue en dessous alors Titus peut directement fermer un quadrilatère d'une aire tendant vers un quart.

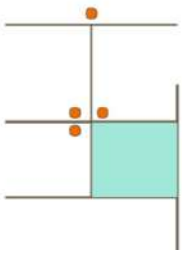


Si Pollux joue au-dessus, Titus place alors son quatrième trait comme montré sur la figure ci-contre.



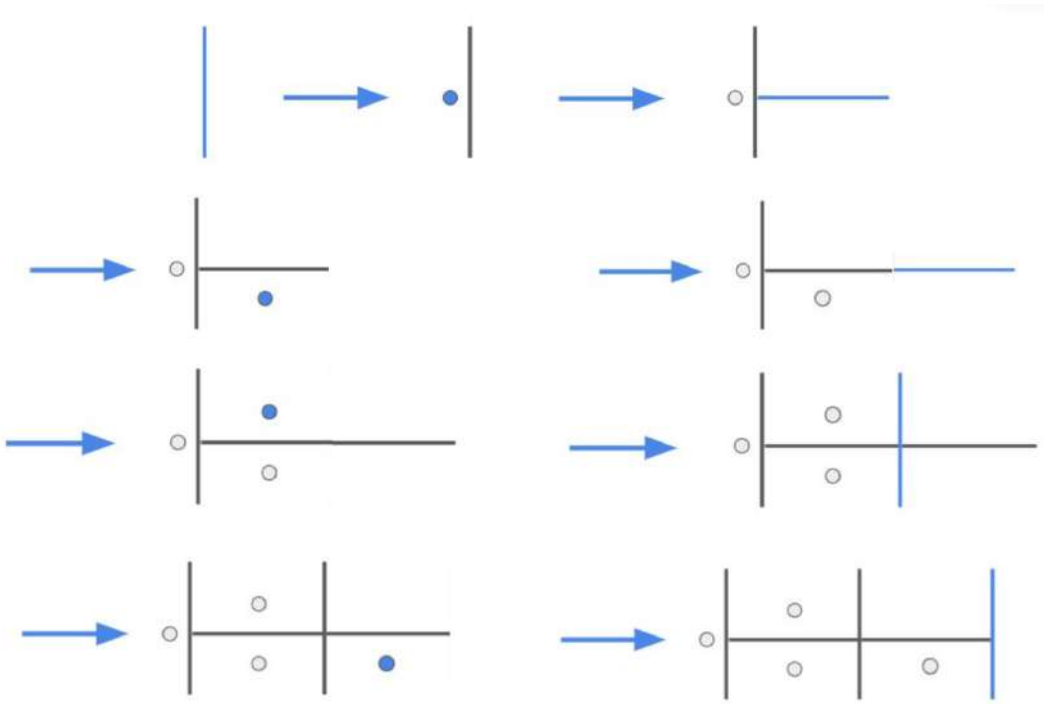
Pollux joue alors au-dessus de ce quatrième trait à droite ou à gauche (ici encore du fait de la symétrie, le côté n'a pas d'importance.)

Titus peut alors fermer un quadrilatère d'aire tendant vers un quart.



Stratégie du quadrilatère "limite".

Nous avons ensuite cherché à obtenir un quadrilatère d'aire supérieure à un quart en adoptant la méthode ci-dessous.



Si Titus place toujours son trait vertical à l'extrémité du dernier trait horizontal, Pollux pourra toujours le bloquer. Nous avons donc imaginé une autre stratégie qui consiste à décaler le trait vertical vers la gauche d'une petite longueur à chaque fois.

Montrons alors que Titus peut obtenir un rectangle d'aire (n-1)/2n en $2n$ coups, pour tout entier naturel n non nul :

Titus planifie à l'avance la position de ses n prochains traits, sans se soucier de ce que fait Pollux.

On note A l'aire ainsi obtenue.

Ceci est réalisable, car si Pollux place un point sur un de ses futurs traits, alors Titus décalera son trait d'une distance ou d'un angle infiniment petit, ce qui lui permettra d'obtenir un quadrilatère d'aire égale à $A-\varepsilon$ u.a.

Par ailleurs, pour éviter des distinctions de cas qui sont en fait similaires à l'ordre près des étapes, on suppose que Titus trace ses n traits avant que Pollux place ses n points.

Titus trace un trait t, et Pollux place un point dans le plan.

On note O le milieu du segment tracé et on note (d) la droite graduée portée par la médiatrice de ce segment, d'origine O et d'unité la longueur d'un trait.

On note A_i, pour i variant de 1 à $n-1$, les points de (d) d'abscisses i.

On note B_i, pour i variant de 1 à $n-1$, les points de (d) d'abscisses $\frac{n-i}{n}+i-1$

Titus trace :

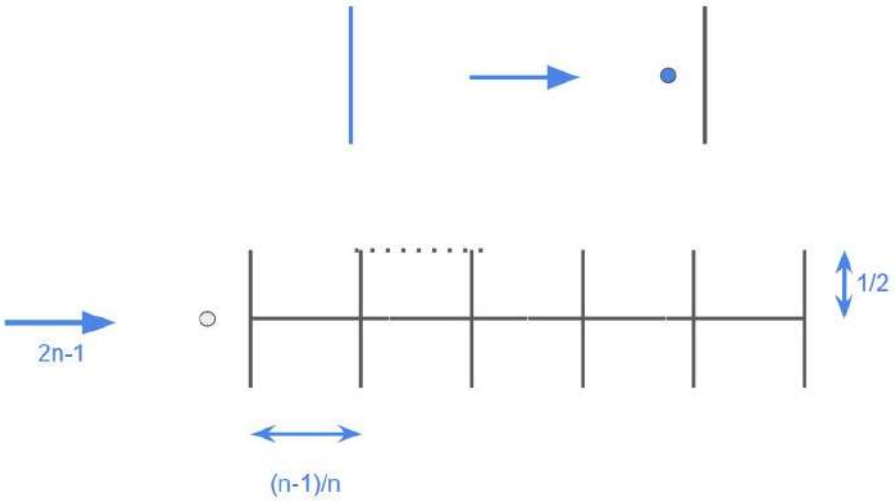
- les $n-1$ segments $[O\,A_1]$, $[A_1\,A_2]$, …, $[A_{n-2}\,A_{n-1}]$
- $n-1$ segments de milieux B_i dont la médiatrice est (d)
- Le segment de milieu A_{n-1} dont la médiatrice est (d)

En plaçant ces 2*n*–1 traits, Titus crée 2*n* rectangles d'aire égale à $\frac{n-1}{2n}$ qu'il peut fermer en un seul trait.

En effet, chaque rectangle a pour côté $\frac{1}{2}$et $\frac{n-1}{n}$ car pour tout *i* de 1 à *n*–2, la longueur B_iB_{i+1} est

$$B_iB_{i+1}=\frac{n-(i+1)}{n}+(i+1)-1-\left(\frac{n-i}{n}+i-1\right)=\frac{n-1}{n}=OB_1=A_{n-1}B_{n-1}$$

Titus a joué 2*n*–1 coups. Pollux place donc 2*n*–1 points, il reste donc un rectangle qui ne contient pas de points. Titus le ferme avec son $2n^e$ coup.



Titus a créé 2*n* aires égales qui peuvent être fermées par un trait (en pointillés).

Et pour cela il a seulement utilisé 2*n*–1 traits, donc pollux va placer 2*n*–1 points qui vont bloquer au plus 2*n*–1 zones.

Il restera donc au moins une zone que Titus pourra fermer, d'aire $\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2n}$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$$

D'où la conclusion :

Titus peut fermer un quadrilatère d'aire tendant vers $\frac{1}{2}$ unité d'aire.

2. Les stratégies de Pollux

L'objectif de Pollux étant d'empêcher Titus de fermer une aire sans point, sa stratégie dépend entièrement du jeu de Titus.

Dans le plan, il est difficile de prévoir ce jeu, nous décidons de chercher des stratégies quand Titus est contraint à jouer sur les traits d'une grille régulière.

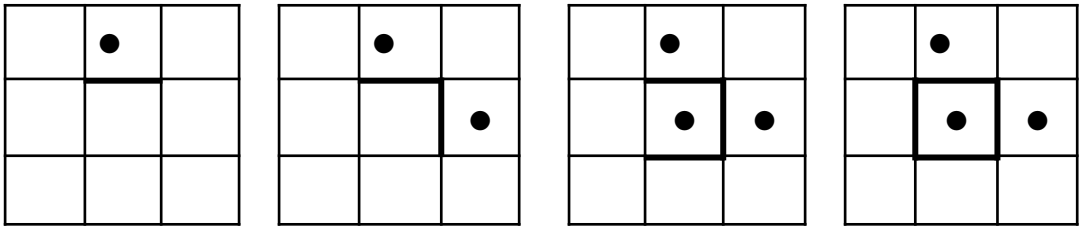
Nous travaillons seulement sur des grilles carrées et hexagonales car nous savons que Titus peut toujours former un triangle équilatéral comme montré en 2.a.ii.

2.a. La grille carrée

Stratégie : Pollux place ses points de la façon suivante:

- ➝ toujours à gauche ou toujours à droite des traits verticaux.
- ➝➝ toujours au-dessus ou toujours en dessous des traits horizontaux.

Exemple : Dans le cas d'un carré simple, cela donne le résultat suivant lorsque l'on place le point au-dessus ou à droite du trait.



On observe donc qu'il y a dans ce cas au moins 1 point à l'intérieur de l'aire fermée, et Pollux a donc atteint son but.

Justification : Pour former une aire il faut toujours au moins un trait vertical à gauche et un trait horizontal en bas. Il y aura donc forcément au moins deux points à l'intérieur de l'aire fermée.

Nous pouvons aussi nous imaginer qu'un de ces traits ferme l'aire. Dans ce cas-là, Pollux n'aura pas la possibilité de mettre son dernier point à l'intérieur, mais il y aura dans tous les cas au moins un point à l'intérieur de l'aire et Pollux aura donc gagné.

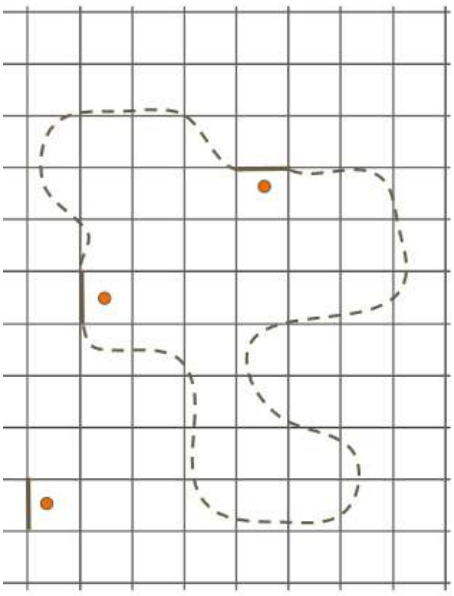
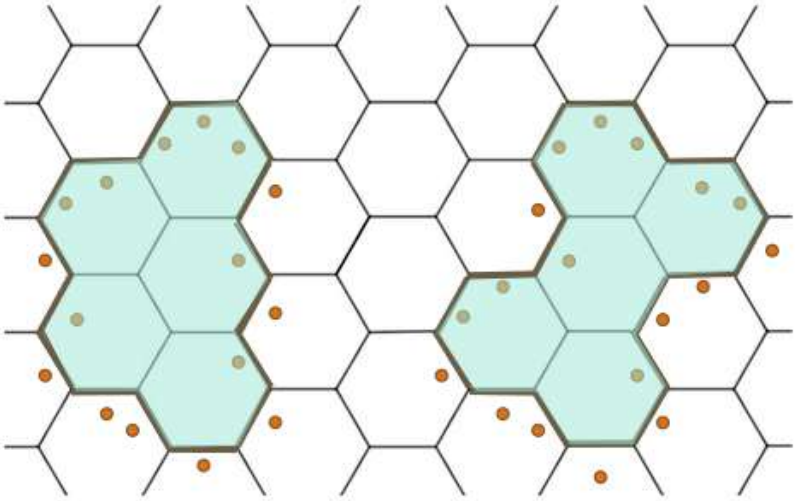


Illustration du cas général de la stratégie de Pollux dans une grille carrée.

2.b. La grille hexagonale

Pour la grille hexagonale, Pollux suit exactement la même stratégie que pour la grille carrée. Il choisit au début où il va se placer par rapport aux traits, et peut donc toujours bloquer les tentatives de Titus de fermer une aire quelconque.



IV) Conclusion

L'essentiel de notre travail a donc porté sur les stratégies de Titus.
Nous avons vu qu'il pouvait fermer un quadrilatère d'aire tendant vers $\frac{1}{2}$ unité d'aire. Il faudrait maintenant déterminer s'il peut fermer un quadrilatère d'aire plus grande.
Nous avions aussi tenté d'étudier la possibilité de fermer un autre type de polygone, mais nous n'avons pas eu le temps d'aboutir.
Une autre piste que nous avons explorée est la possibilité pour Titus de disposer d'un ou plusieurs coups d'avance par rapport à Pollux. Cette possibilité lui permet-elle d'élaborer une stratégie aboutissant à la fermeture d'une aire plus grande que celles déjà obtenues ?
Là encore, nous n'avons pas eu le temps d'aboutir.

Concernant les stratégies de Pollux, nous avons trouvé une stratégie lorsque le plan est recouvert d'un maillage, mais comment exploiter ces résultats pour revenir au cas général d'un plan « vierge » ?

Disposer des couples

Année 2018-2019

Estelle Lallain et Lorette Bourgeais (classe de 3e),
Juliette Morin et Elsa Roth (classe de 1eS)

Enseignants : Manuel Champion, Stéphanie Chancerel et Anne Duval
Établissements : Collège Fernand Puech et Lycée Douanier Rousseau (Laval)
Chercheurs : François Ducrot et Théo Jamin, Université d'Angers.

EXPLICATION DU SUJET

Notre problème parle de 5 couples constitués d'hommes et de femmes se rendant à une soirée dansante. A chaque musique les 10 personnes changeront simultanément de partenaire. Les contraintes sont les suivantes :

- Deux hommes ne peuvent pas danser ensemble. Ni deux femmes.
- Un homme ne danse pas avec sa femme.

En prenant compte ces remarques, combien de danses pourront-il faire ?

[La première partie de ces recherches a été rédigée par les collégiennes. La seconde, rédigée par les lycéennes reprend le problème des 5 couples et le généralise au cas de n couples.]

PREMIÈRE PARTIE

NOS RECHERCHES ET RESULTATS

Nous avons travaillé la représentation de notre problème à l'aide d'un tableau à double entrée, en nous appuyant sur une notation diminuée : F1 - H2 pour Femme 1 et Homme 2.

Nous avons obtenu qu'il y avait 44 musiques, et donc de danses possibles.

1) Pour 3 couples

Avec cette notation, et pour simplifier l'approche mathématique du problème, nous avons commencé nos recherches à partir de 3 couples.

Afin d'obtenir le nombre de danses possibles, nous avons fait en sorte que les femmes ne changent pas de place puis cherché les différentes possibilités de partenaires masculins.

Nous avons écrit tous les cas possibles, c'est-à-dire sans contrainte, puis nous avons éliminé les cas ne répondant pas aux contraintes (ici, un homme avec sa femme, l'autre contrainte étant d'elle-même éliminée).

Les cas impossibles de par la contrainte sont indiqués en ROUGE dans le tableau suivant :

F	1	2	3
H	1	2	3
H	1	3	2
H	2	3	1
H	2	1	3
H	3	1	2
H	3	2	1

Il nous reste alors 2 possibilités avec 3 couples.

F1-H2; F2-H3; F3-H1
et
F1-H3; F2-H1; F3-H2

Ayant obtenu des résultats par cette méthode, nous avons procédé de la même façon pour 4 couples.

2) Pour 4 couples

Pour ce tableau, il y a beaucoup plus de couples possibles, sans les contraintes. Nous avons donc bloqué le couple F1-H2, puisque F1-H1 n'est pas possible.

Voici le tableau obtenu :

F	1	2	3	4
H	2	1	3	4
H	2	1	4	3
H	2	3	1	4
H	2	3	4	1
H	2	4	3	1
H	2	4	1	3

On remarque qu'il y a alors 3 cas possibles respectant les contraintes :

F1-H2; F2-H1; F3-H4; F4-H3

F1-H2; F2-H3; F3-H4; F4-H1
et
F1-H2; F2-H4; F3-H1; F4-H3

Nous aurions le même résultat si nous avions bloqué les couples F1-H3 et F1-H4.

Il y a donc au total 3 x 3 possibilités, soit 9 possibilités.

3) Pour 5 couples (réponse à la question initiale)

➢ **Si on fixe F1-H2 :**

Alors F2 ne peut donc danser qu'avec H1, H3, H4 ou H5. On obtient alors :

F	1	2	3	4	5
H	2	1	4	5	3
H	2	1	5	3	4
H	2	3	4	5	1
H	2	3	5	1	4
H	2	3	1	5	4
H	2	4	1	5	3
H	2	4	5	1	3
H	2	4	5	3	1
H	2	5	1	3	4
H	2	5	5	1	3
H	2	5	5	3	1

Dans le tableau, on a uniquement écrit les cas possibles.

- F2-H1 donne 2 possibilités.
- F2-H3 donne 3 possibilités
- Idem pour F2-H4 et F2-H5

Il y a donc 11 possibilités.

➢ **Si on fixe F1-H3**

Alors F2 ne peut pas danser qu'avec H1, H4 ou H5 (F2-H2 étant interdit).

F	1	2	3	4	5
H	3	1	2	5	4
H	3	1	5	2	4
H	3	1	4	5	2
H	3	4	1	5	2
H	3	4	2	5	1
H	3	4	5	1	2
H	3	4	5	2	1
H	3	5	1	2	4
H	3	5	2	1	4
H	3	5	4	1	2
H	3	5	4	2	1

- F2-H1 donne 3 possibilités.
- F2-H4 donne 4 possibilités.
- F2-H5 donne également 4 possibilités.

Soit **11 musiques possibles.**

Les cas F1-H3, F1-H4, F1-H5 sont identiques.
Il y a alors **33 musiques possibles.**

AU TOTAL : ***44 musiques possibles pour 5 couples.***

SECONDE PARTIE

Annonce des résultats

Soit D_n le nombre de morceaux de musique qu'on pourra passer durant une soirée avec n couples.

Exemple traité :
Pour $n=5$, 44 morceaux de musiques seront possibles.

Notations :

- Chaque couple est numéroté.
- Le duo formé par l'homme x et la femme y est noté : $Hx-Fy$

Théorème 1 :
Soit n un entier naturel tel que $n>2$.

$$D_n=(D_{n-2}+D_{n-1})(n-1)$$

Théorème 2 :
Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$.

$$\begin{cases} D_n=(-1)^n+nD_{n-1} \\ D_1=0 \end{cases}$$

Théorème 3 :
Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$.

$$D_n=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

1) Première approche : « cycle »

Tout d'abord, nous avons ajouté une consigne et cherché à compter le nombre de danses pour lesquelles chaque invité ne danse jamais deux fois avec le même partenaire. On obtient pour 5 couples un ensemble de quatre danses : un cycle, où personne ne danse deux fois avec la même personne.
Seulement, selon la consigne de départ, tous les invités ne doivent pas obligatoirement permuter de cette manière à chaque danse : un simple échange de 2 partenaires suffit pour créer une nouvelle configuration. Nous avons alors cherché à dénombrer, à partir de la première danse de ce cycle, toutes les manières de faire permuter 2 hommes.
10 échanges de ce type sont possibles :

1-2 ; 1-3 ; 1-4- ; 1-5 ; 2-3 ; 2-4 ; 2-5 ; 3-4 ; 3-5 ; 4-5

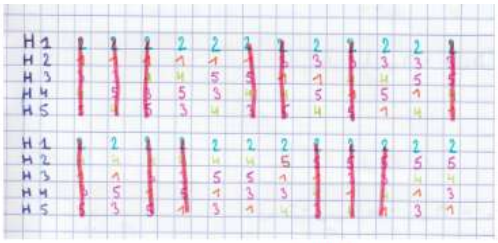
Ces échanges sont applicables aux quatre danses du cycle, on obtiendrait ainsi 40 danses. Toutefois, certaines de ces possibilités ne respectent pas l'énoncé du problème : deux numéros identiques ne peuvent pas se retrouver ensemble. Par exemple, si l'on échange $H1$ et $H2$, seules les danses 2 et 3 de ce cycle sont finalement possibles. Après avoir retranché toutes les danses impossibles, on obtiendrait ainsi 20 possibilités.

Mais on peut également échanger les partenaires de 3 puis de 4 hommes sur les 5. Il faudrait alors de nouveau retrancher toutes les danses impossibles à la main, puis vérifier qu'aucune danse ne se recoupe… Nous nous sommes vite rendu compte que cette manière de procéder n'était pas adaptée : nous n'avions pas la certitude d'avoir répertorié l'ensemble des possibilités.

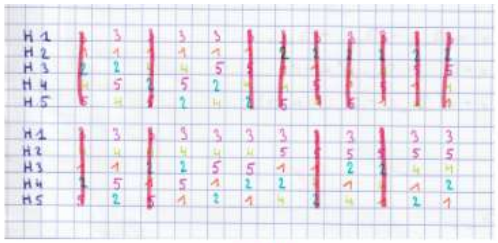
2) Ordonner les possibilités

Nous avons alors tenté une approche différente : sans se préoccuper de la consigne des couples de même numéro, nous avons dénombré toutes les possibilités pour lesquelles $H1$ est avec $F2$, puis avec $F3$, $F4$ et $F5$. Nous savions d'emblée que tous les cas commençant par $H1$-$F1$ seraient par définition impossibles.

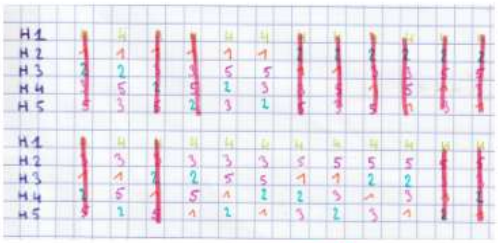
On obtient ainsi 4 ensembles de 24 possibilités chacun. Il suffit ensuite d'écarter à la main les configurations impossibles (ici barrées au rouge). Pour chaque ensemble, 11 danses ont été retenues. Nous sommes donc arrivées à une première réponse : 44 danses sont possibles selon les règles énoncées par ce problème.



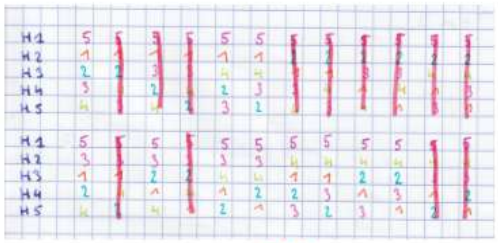
Possibilités H1-F2 = 11



Possibilités H1-F3 = 11



Possibilités H1-F4 = 11



Possibilités H1-F5 = 11

3) Données pour différents nombres de couples

Nous avons alors cherché à établir une formule qui donnerait le nombre de danses possibles en fonction du nombre de couples présents.
Pour cela, nous avons comparé le nombre de danses possibles pour 2, 3, 4 et 6 couples en utilisant la même méthode.

Nombre de couples n	**Nombre de danses sans la contrainte : $n!$**	**Nombre de danses avec la contrainte**	**Différence**
2	2	1	1
3	6	2	4
4	24	9	15
5	120	44	76
6	720	265	445

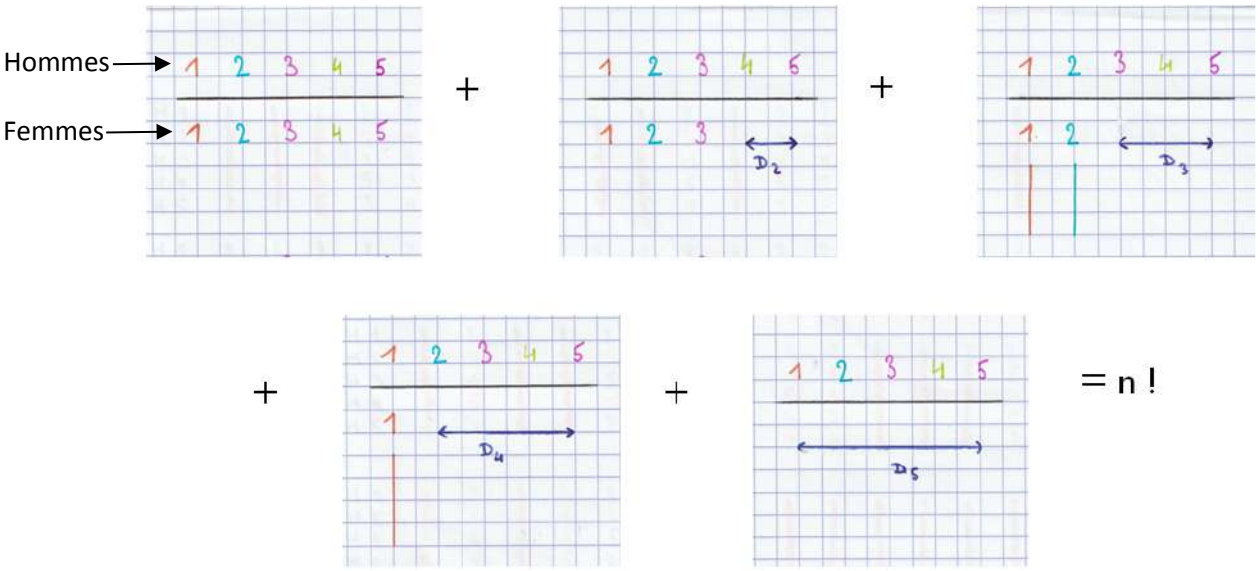
On constate que quel que soit le nombre n de couples, le nombre de danses possibles sans la contrainte est égal à $n!$. De fait, le premier homme peut danser avec n femmes, le second avec $n-1$ femmes… et le dernier homme n'aura plus qu'une seule possibilité. Soit : $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1$.

4) Organiser les impossibilités : déterminer les configurations à retrancher à $n!$

Théorème 1 :
Soit n un entier naturel tel que $n>2$. On a $D_n=(D_{n-2}+D_{n-1})(n-1)$.

Preuve (1)

Cas de $n=5$:



Afin de répertorier toutes les possibilités, on place sur ce schéma les hommes, et face à eux les femmes. On peut ainsi visualiser d'une manière différente $n!$: Pour 5 couples, on a le cas où les 5 femmes dansent avec leur mari, puis celui où seulement 3 des femmes sont fixées en face de leur mari et où les deux autres échangent. Si 2 femmes sont fixées, il faut que les 3 autres permutent ; si une seule femme est fixée, il s'agit des 4 autres. Pour chaque cas, on multipliera par le nombre de manières de choisir 1, 2 ou 3 femmes parmi 5, noté $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$ et $\binom{5}{3}$.

Enfin, il y a le cas où les 5 femmes permutent sans qu'aucune d'elles ne soit en face de son mari ; en bref, la réponse à notre problème.

$$D_5=5!-\left(D_4\times\binom{5}{1}+D_3\times\binom{5}{2}+D_2\times\binom{5}{3}+1\right)$$

Cas général :

En utilisant le même raisonnement, nous obtenons la formule suivante pour tout $n\geq 2$

$$D_n=n!-\left(D_{n-1}\times\binom{n}{1}+D_{n-2}\times\binom{n}{2}+\ldots+D_2\times\binom{n}{n-2}+1\right)$$

$$D_n=n!-1-\sum_{i=2}^{n-1}\left(D_i\times\binom{n}{n-i}\right).$$

Une autre approche

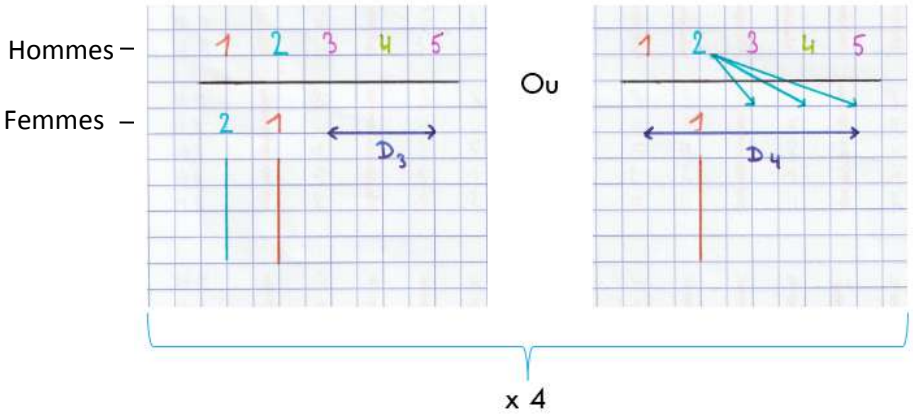
Afin de trouver une formule plus simple, on peut visualiser le dérangement (2) de couples d'une autre manière :

Cas de $n=5$:

Si l'on place $F1$ avec $H2$, deux cas sont possibles :

- $F2$ peut aller avec $H1$, on retrouve alors le dérangement des trois autres femmes (cf. schéma).

- $F2$ peut aller non pas avec $H1$ mais avec l'un des trois autres hommes. Chaque femme a alors 3 possibilités, il s'agit d'un dérangement de quatre (3).



Ces situations peuvent se reproduire avec $F3$, $F4$, et $F5$, soit 4 fois en tout.

On a donc : $D_5=(D_3+D_4)\times 4$.

Cas général :

$$D_n=(D_{n-2}+D_{n-1})(n-1)$$

5) Simplifier la formule

Il faut à présent trouver une formule par récurrence d'ordre 1, c'est-à-dire exprimer D_n en fonction de D_{n-1}

Théorème 2 :

Soit *n* un entier naturel tel que $n\geq 2$. Pour *n* couples présents lors de la soirée, nous pourrons passer D_n morceaux de musique en respectant les contraintes du problème avec :

$$\begin{cases} D_n=(-1)^n+nD_{n-1} \\ D_1=0 \end{cases}$$

Preuve :

On a $D_1=0$, $D_2=1$ et $D_3=3$. Pour $n>2$,

$$\begin{aligned} D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})&=nD_{n-1}-D_{n-1}+nD_{n-2}-D_{n-2} \\ D_n-nD_{n-1} &= nD_{n-2}-D_{n-2}-D_{n-1} \\ &=-D_{n-1}+(n-1)D_{n-2} \\ &=-1\times(D_{n-1}+(n-1)D_{n-2}) \end{aligned}$$

On définit la suite (E_n) pour $n\geq 2$ par

$$\begin{cases} E_2=1, \\ \text{pour } n>2,\ E_n=D_n-nD_{n-1} \end{cases}$$

Alors, pour $n>2$,

$$E_n=-1\times(D_{n-1}+(n-1)D_{n-2})=-E_{n-1}.$$

Or $E_2=1$ donc $E_n=(-1)^n$ et

$$\begin{aligned} D_n-nD_{n-1}&=(-1)^n \\ D_n&=(-1)^n+nD_{n-1}. \end{aligned}$$

Enfin, il faut déterminer une formule explicite pour exprimer le dérangement de n couples sans connaître celui du nombre de couples précédent.

Théorème 3 :

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Pour n couples présents lors de la soirée, nous pourrons passer D_n morceaux de musique en respectant les contraintes du problème avec :

$$D_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Preuve :

Nous considérons toujours n couples Homme-Femme invités à la soirée et dansant simultanément avec les conditions du problème. Intéressons-nous au quotient $D_n/n!$: en utilisant le théorème 2, nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned}
\frac{D_n}{n!} &= \frac{(-1)^n + nD_{n-1}}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{D_{n-3}}{(n-3)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{(-1)^2}{2!}.
\end{aligned}$$

Lors du congrès, un professeur chercheur nous a expliqué que cette expression est proche de $1/e$ quand n devient très grand. On déduit de l'égalité précédente que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$$

et donc, que pour une grande valeur de n, D_n est proche de $n!/e$.

En multipliant par $n!$, on obtient aussi la formule du théorème : $D_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

6) Bilan

Ainsi, grâce à ce problème des couples qui peut paraître simple au premier abord, nous avons eu l'opportunité de découvrir des notions mathématiques très variées, tout en approfondissant certains sujets vus en cours.

Notes d'édition

(1) Les autrices démontrent d'abord une autre formule. La preuve du théorème 1 se trouve au paragraphe "une autre approche", un peu plus loin.

(2) En combinatoire mathématique, un *dérangement* est une permutation des éléments d'un ensemble où aucun des éléments ne se retrouve à sa place initiale. Ici, si on place d'abord chaque femme (ou chaque homme) en face de son conjoint, il s'agit de trouver le nombre de leurs dérangements.

(3) $F1$ dansant avec $H2$, si on place $F2$ en face de $H1$ et $F3$, $F4$ et $F5$ en face de leurs conjoints, les cas où $F2$ ne danse pas avec $H1$ correspondent bien aux dérangements de ces 4 dernières femmes.

Les tours de Hanoï

Année 2020-2021

Emma Debray (classe de Terminale)

Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort (79)

Encadrés par : Fabien Aoustin, Thomas Forget

Chercheur : Abdallah El Hamidi, Université de La Rochelle

Dans cet article, on s'intéresse au jeu appelé « tours de Hanoï ». On détermine le nombre de coups minimum pour résoudre le jeu, on donne un programme qui donne la solution optimale et on établit quelques statistiques. On s'intéresse ensuite à plusieurs variantes du jeu où certains mouvements sont interdits.

1) Présentation du jeu :

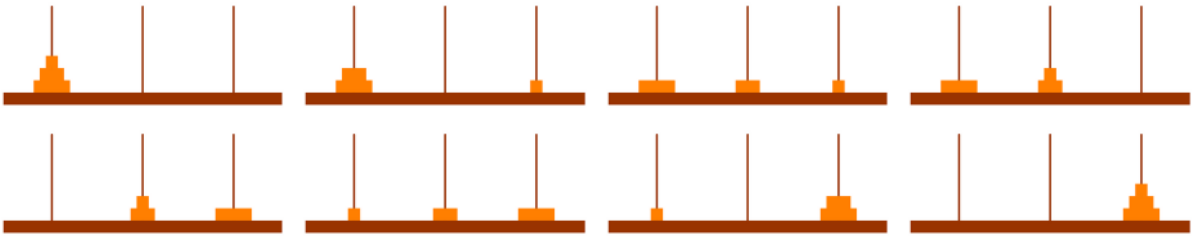
Le jeu des tours de Hanoï a été inventé par le jeune mathématicien Édouard Lucas (1842-1891) en 1883. Il serait inspiré de la tour sacrée du Brahma où on trouvait 64 disques en or que des prêtres déplaçaient en permanence selon les mêmes règles que le jeu. On raconte que la fin du monde coïnciderait avec le dernier déplacement de disque ; en déplaçant un disque par seconde, il se sera écoulé environ 585 milliards d'années, soit plusieurs fois l'âge estimé de notre univers.
Voici les règles du jeu. On dispose de trois piquets. Sur le premier piquet, on place un nombre n d'anneaux. Chaque anneau a en dessous de lui un anneau plus grand. Le but est de déplacer cette pile de n anneaux jusqu'au troisième piquet en respectant les deux contraintes suivantes :
- on ne peut déplacer qu'un seul anneau à la fois ;
- un anneau ne peut pas être posé sur un autre anneau plus petit.

2) Résolution de la version classique du jeu :

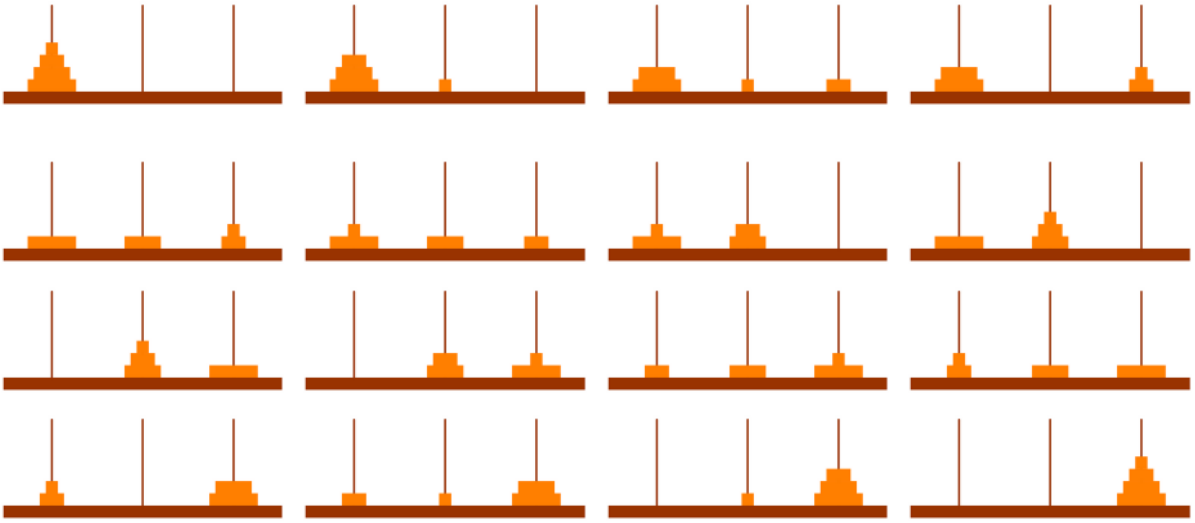
2-a) Nombre de coups optimal :

Nous avons tout d'abord tenté de résoudre le jeu avec un petit nombre n d'anneaux.
Pour $n=1$, il n'y a évidemment qu'un seul coup à jouer.
Pour $n=2$, on peut résoudre le jeu en 3 coups.

Pour $n=3$, on peut résoudre le jeu en 7 coups.



Pour $n=4$, on peut résoudre le jeu en 15 coups.



Démontrons par récurrence que le nombre de coups minimal pour résoudre le jeu avec n anneaux est égal à 2^n-1.

Initialisation : Le nombre de déplacements pour un anneau est égal à 1 et $2^1-1=2-1=1$ donc la récurrence est fondée au rang 1.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier n supérieur ou égal à 1, le nombre minimal de coups à jouer pour déplacer les n anneaux d'un piquet à l'autre soit égal à 2^n-1. Montrons alors que le nombre minimal de déplacements pour $n+1$ anneaux est égal à $2^{n+1}-1$.

Avec $n+1$ anneaux, on doit d'abord déplacer n anneaux du piquet de gauche au piquet du milieu. Cela nécessite 2^n-1 déplacements. On peut alors déplacer le plus grand anneau du piquet de gauche au piquet de droite ce qui nécessite 1 déplacement. Il faut ensuite redéplacer les n anneaux du piquet du milieu vers le piquet de droite ce qui nécessite 2^n-1 déplacements (1).

Au final, le nombre de déplacement est égal à :

$$\left(2^n-1\right)+1+\left(2^n-1\right)=2^n+2^n-1=2^{n+1}-1.$$

On a démontré que la propriété est héréditaire.

Conclusion : Finalement, quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 1, le nombre minimal de déplacements pour résoudre le jeu est bien égal à 2^n-1.

2-b) Description des solutions optimales :

On va noter chaque déplacement de la façon suivante (2) :

- *a* représente le déplacement du piquet 1 vers le piquet 2 ;
- *A* représente le déplacement du piquet 2 vers le piquet 1 ;
- *b* représente le déplacement du piquet 1 vers le piquet 3 ;
- *B* représente le déplacement du piquet 3 vers le piquet 1 ;
- *c* représente le déplacement du piquet 2 vers le piquet 3 ;
- *C* représente le déplacement du piquet 3 vers le piquet 2.

Les solutions trouvées précédemment se notent donc ainsi :

- pour $n=1$, on a le mot-solution : *b*.
- pour $n=2$, on a le mot-solution : *abc*.
- pour $n=3$, on a le mot-solution : *baCbAcb*.
- pour $n=4$, on a le mot-solution : *abcaBCabcABcabc*.

On peut alors écrire un programme qui prend en entrée :

- le nombre *n* d'anneaux ;
- le numéro du piquet de départ ("piquetdepart")
- le numéro du piquet d'arrivée ("piquetdarrivee")

et qui renvoie le mot décrivant la solution la plus courte, en 2^n-1 coups.

On commence par donner les six cas avec un seul anneau.
Ensuite, si le nombre d'anneaux est plus grand que 1, on écrit :
- le mot-solution qui décrit le déplacement des $n-1$ plus petits anneaux du piquet de départ vers le piquet intermédiaire ;
- la lettre qui correspond au déplacement du grand anneau du piquet de départ vers le piquet d'arrivée ;
- le mot-solution qui décrit le déplacement des $n-1$ plus petits anneaux du piquet intermédiaire vers le piquet d'arrivée.

Voici le programme écrit dans le langage Python.

```
def tourdehanoi(n,piquetdepart,piquetdarrivee):
    if n==1:
        if piquetdepart==1 and piquetdarrivee==2:
            return('a')
        if piquetdepart==2 and piquetdarrivee==1:
            return('A')
        if piquetdepart==1 and piquetdarrivee==3:
            return('b')
        if piquetdepart==3 and piquetdarrivee==1:
            return('B')
        if piquetdepart==2 and piquetdarrivee==3:
            return('c')
        if piquetdepart==3 and piquetdarrivee==2:
            return('C')
    else:
        if piquetdepart==1 and piquetdarrivee==2:
            return(tourdehanoi(n-1,1,3)+'a'+tourdehanoi(n-1,3,2))
        if piquetdepart==2 and piquetdarrivee==1:
            return(tourdehanoi(n-1,2,3)+'A'+tourdehanoi(n-1,3,1))
        if piquetdepart==1 and piquetdarrivee==3:
            return(tourdehanoi(n-1,1,2)+'b'+tourdehanoi(n-1,2,3))
        if piquetdepart==3 and piquetdarrivee==1:
            return(tourdehanoi(n-1,3,2)+'B'+tourdehanoi(n-1,2,1))
        if piquetdepart==2 and piquetdarrivee==3:
            return(tourdehanoi(n-1,2,1)+'c'+tourdehanoi(n-1,1,3))
        if piquetdepart==3 and piquetdarrivee==2:
            return(tourdehanoi(n-1,3,1)+'C'+tourdehanoi(n-1,1,2))
```

On a par exemple :

```
>>> tourdehanoi(8,1,3)
'abcaBCabcABcabcaBCaBcABCabcaBCabcABcabcABCaBcABcabcaBCabcABcabcaBCaBcABCabcaBCaBcABcabcABCaBcABCabcaBCabcABcabcaBCaBcABCabcaBCabcABcabcABCaBcABCabcaBCaBcABcabcABCaBcABcabcaBCabcABcabcaBCaBcABCabcaBCabcABcabcABCaBcABcabcaBCabcABcabc'
>>> len(tourdehanoi(8,1,3))
255
>>> tourdehanoi(8,1,3).count('a')
58
```

2-c) Quelques statistiques intéressantes :

En comptant le nombre d'apparitions de chaque mouvement dans les solutions optimales pour déplacer les *n* anneaux du piquet 1 vers le piquet 3, on a le tableau suivant (3) :

n	Nombre de coups	Nombre d'apparitions du					
		mouvement a	mouvement b	mouvement c	mouvement A	mouvement B	mouvement C
1	1	0	1	0	0	0	0
2	3	1	1	1	0	0	0
3	7	1	3	1	1	0	1
4	15	4	3	4	1	2	1
5	31	4	9	4	6	2	6
6	63	15	9	15	6	12	6
7	127	15	31	15	27	12	27
8	255	58	31	58	27	54	27
9	511	58	117	58	112	54	112
10	1 023	229	117	229	112	224	112
11	2 047	229	459	229	453	224	453
12	4 095	912	459	912	453	906	453
13	8 191	912	1 825	912	1 818	906	1 818
14	16 383	3 643	1 825	3 643	1 818	3 636	1 818
15	32 767	3 643	7 287	3 643	7 279	3 636	7 279
16	65 535	14 566	7 287	14 566	7 279	14 558	7 279
17	131 071	14 566	29 133	14 566	29 124	14 558	29 124
18	262 143	58 257	29 133	58 257	29 124	58 248	29 124
19	524 287	58 257	116 515	58 257	116 505	58 248	116 505
20	1 048 575	233 020	116 515	233 020	116 505	233 010	116 505
21	2 097 151	233 020	466 041	233 020	466 030	233 010	466 030
22	4 194 303	932 071	466 041	932 071	466 030	932 060	466 030
23	8 388 607	932 071	1 864 143	932 071	1 864 131	932 060	1 864 131
24	16 777 215	3 728 274	1 864 143	3 728 274	1 864 131	3 728 262	1 864 131
25	33 554 431	3 728 274	7 456 549	3 728 274	7 456 536	3 728 262	7 456 536
26	67 108 863	14 913 085	7 456 549	14 913 085	7 456 536	14 913 072	7 456 536

En calculant les fréquences d'apparitions des mouvements, on a les résultats suivants :

n	Nombre de coups	Fréquences d'apparition du					
		mouvement a	mouvement b	mouvement c	mouvement A	mouvement B	mouvement C
1	1	0	1	0	0	0	0
2	3	0,3333333333	0,3333333333	0,3333333333	0	0	0
3	7	0,1428571429	0,4285714286	0,1428571429	0,1428571429	0	0,1428571429
4	15	0,2666666667	0,2	0,2666666667	0,6666666667	0,1333333333	0,6666666667
5	31	0,1290322581	0,2903225806	0,1290322581	0,1935483871	0,6451612903	0,1935483871
6	63	0,2380952381	0,1428571429	0,2380952381	0,9523809524	0,1904761905	0,9523809524
7	127	0,1181102362	0,2440944882	0,1181102362	0,2125984252	0,9448818898	0,2125984252
8	255	0,2274509804	0,1215686275	0,2274509804	0,1058823529	0,2117647059	0,1058823529
9	511	0,1135029354	0,228962818	0,1135029354	0,2191780822	0,1056751468	0,2191780822
10	1 023	0,2238514174	0,1143695015	0,2238514174	0,1094819159	0,2189638319	0,1094819159
11	2 047	0,1118710308	0,2242305813	0,1118710308	0,2212994626	0,1094284319	0,2212994626
12	4 095	0,2227106227	0,1120879121	0,2227106227	0,1106227106	0,2212454212	0,1106227106
13	8 191	0,1113417165	0,2228055183	0,1113417165	0,2219509217	0,1106092052	0,2219509217
14	16 383	0,2223646463	0,1113959592	0,2223646463	0,1109686871	0,2219373741	0,1109686871
15	32 767	0,11117893	0,2223883786	0,11117893	0,2221442305	0,1109653005	0,2221442305
16	65 535	0,2222629129	0,1111924926	0,2222629129	0,1110704204	0,2221408408	0,1110704204
17	131 071	0,1111306086	0,2222688467	0,1111306086	0,2222001816	0,111069573	0,2222001816
18	262 143	0,2222336664	0,1111339994	0,2222336664	0,111099667	0,222199334	0,111099667
19	524 287	0,1111166212	0,2222351498	0,1111166212	0,2222160763	0,1110994551	0,2222160763
20	1 048 575	0,2222254011	0,1111174689	0,2222254011	0,1111079322	0,2222158644	0,1111079322
21	2 097 151	0,1111126476	0,222225772	0,1111126476	0,2222205268	0,1111078792	0,2222205268
22	4 194 303	0,2222230964	0,1111128595	0,2222230964	0,1111102369	0,2222204738	0,1111102369
23	8 388 607	0,111111535	0,2222231891	0,111111535	0,2222217586	0,1111102237	0,2222217586
24	16 777 215	0,2222224606	0,1111115879	0,2222224606	0,1111108727	0,2222217454	0,1111108727
25	33 554 431	0,111111227	0,2222224838	0,111111227	0,2222220964	0,1111108694	0,2222220964
26	67 108 863	0,2222222868	0,1111112403	0,2222222868	0,1111110465	0,2222220931	0,1111110465

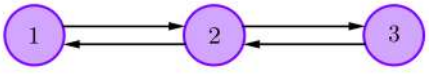
On peut conjecturer que si *n* est pair, alors :
- les fréquences d'apparition des mouvements *a*, *B* et *c* convergent vers $2/9$;
- les fréquences d'apparition des mouvements *A*, *b* et *C* convergent vers $1/9$.

On peut aussi conjecturer que si *n* est impair, les résultats sont échangés.

3) Étude de certaines variantes du jeu :

3-a) La variante « à petits pas » :

On modifie maintenant le jeu de la façon suivante. Le but est toujours de déplacer *n* anneaux du premier au troisième piquet sauf que les coups directs entre le piquet 1 et le piquet 3 sont interdits. On autorise seulement les coups entre les piquets 1 et 2 et entre les piquets 2 et 3.



On peut résoudre ce nouveau jeu à la main pour de petites valeurs de n.
On peut aussi modifier le programme précédent.

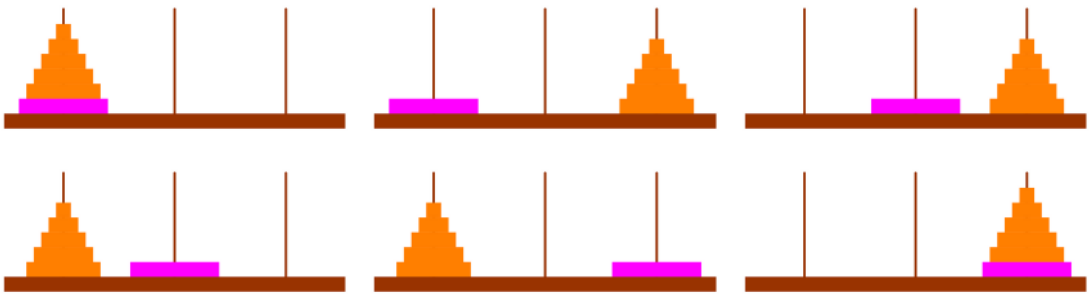
```
def tourdehanoisansbB(n,piquetdepart,piquetdarrivee):
    if n==1:
        if piquetdepart==1 and piquetdarrivee==2:
            return('a')
        if piquetdepart==2 and piquetdarrivee==1:
            return('A')
        if piquetdepart==1 and piquetdarrivee==3:
            return('ac')
        if piquetdepart==3 and piquetdarrivee==1:
            return('CA')
        if piquetdepart==2 and piquetdarrivee==3:
            return('c')
        if piquetdepart==3 and piquetdarrivee==2:
            return('C')
    else:
        if piquetdepart==1 and piquetdarrivee==2:
            return(tourdehanoisansbB(n-1,1,3)+'a'+tourdehanoisansbB(n-1,3,2))
        if piquetdepart==2 and piquetdarrivee==1:
            return(tourdehanoisansbB(n-1,2,3)+'A'+tourdehanoisansbB(n-1,3,1))
        if piquetdepart==1 and piquetdarrivee==3:
            return(tourdehanoisansbB(n-1,1,3)+'a'+tourdehanoisansbB(n-1,3,1)+'c'+tourdehanoisansbB(n-1,1,3))
        if piquetdepart==3 and piquetdarrivee==1:
            return(tourdehanoisansbB(n-1,3,1)+'C'+tourdehanoisansbB(n-1,1,3)+'A'+tourdehanoisansbB(n-1,3,1))
        if piquetdepart==2 and piquetdarrivee==3:
            return(tourdehanoisansbB(n-1,2,1)+'c'+tourdehanoisansbB(n-1,1,3))
        if piquetdepart==3 and piquetdarrivee==2:
            return(tourdehanoisansbB(n-1,3,1)+'C'+tourdehanoisansbB(n-1,1,2))
```

On obtient alors les résultats suivants :

n	Nombre de déplacements minimum
1	2
2	8
3	26
4	80
5	242
6	728
7	2 186
8	6 560

On observe que pour passer d'un terme à l'autre, il faut le multiplier par 3 et ajouter 2.
Cela s'explique de la façon suivante. On note u_n le nombre minimum de coups à jouer pour déplacer les n anneaux du piquet 1 au piquet 3.
Pour déplacer $n+1$ anneaux, on doit d'abord déplacer n anneaux du piquet 1 vers le piquet 3, ce qui consiste à effectuer u_n déplacements.

On peut alors déplacer le dernier anneau vers le piquet 2, soit 1 déplacement.
Puis on repasse les n anneaux du piquet 3 vers le piquet 1, soit u_n déplacements.
Ensuite, on peut déplacer le dernier anneau du piquet 2 vers le piquet 3, soit 1 déplacement.
Enfin, on peut déplacer les n anneaux du piquet 1 vers le piquet 3, soit u_n déplacements.



Finalement, on a bien : $u_{n+1}=3u_n+2$.

La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
On pose $v_n = u_n + 1$. Pour cette suite auxiliaire, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 3u_n + 2 + 1 \\ &= 3u_n + 3 \\ &= 3(u_n + 1) \\ &= 3 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.
On a : $v_1 = u_1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Donc $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$ d'où $3^n = u_n + 1$ et $u_n = 3^n - 1$.

On peut aussi démontrer cette formule par récurrence.

Initialisation :
Le nombre de déplacements pour un anneau est égal à 2 (d'abord du piquet 1 vers le piquet 2, puis du piquet 2 vers le piquet 1) et $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$ donc la récurrence est fondée au rang 1.

Hérédité :
Supposons que pour un certain entier n supérieur ou égal à 1, $u_n = 3^n - 1$.
Montrons alors que $u_{n+1} = 3^{n+1} - 1$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 2 \\ &= 3(3^n - 1) + 2 \\ &= 3 \times 3^n - 3 + 2 \\ &= 3^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

On a démontré que la propriété est héréditaire.

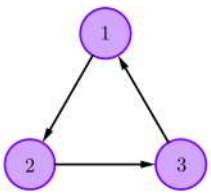
Conclusion :
Finalement, quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 1, le nombre minimal de déplacements pour résoudre la variante à petits pas est bien égal à $3^n - 1$.

3-b) Remarque sur la variante « à petits pas » :

On peut compter le nombre de positions différentes correctes pour disposer les anneaux.
Pour chaque anneau, il y a trois piquets possibles. Une fois qu'on sait quels anneaux se trouvent sur un piquet, il suffit de les empiler du plus grand au plus petit.
On peut représenter la situation par un n-uplet avec 3 choix (les 3 piquets pour les n anneaux).
D'après le principe multiplicatif, il y a 3^n positions différentes correctes.
Avec le résultat trouvé précédemment (le nombre de coups minimum pour déplacer les n anneaux du piquet 1 au piquet 3 avec les déplacements interdits entre les piquets 1 et 3), on remarque qu'on passe par toutes les positions : il y a $3^n - 1$ déplacements à effectuer ce qui donne $3^n - 1 + 1 = 3^n$ positions avec la position initiale (4).

3-c) La variante cyclique :

Dans cette variante, on n'autorise ici que les mouvements du piquet 1 vers le piquet 2, du piquet 2 vers le piquet 3 et du piquet 3 vers le piquet 1.



On a cette fois-ci deux suites. On note :

- w_n le nombre de déplacements pour aller du piquet k au piquet $k+2$ en allant dans le même sens (de 1 vers 3, de 2 vers 1 ou de 3 vers 2) ;
- z_n le nombre de déplacements pour aller du piquet k au piquet $k+1$ en allant dans le même sens (de 1 vers 2, de 2 vers 3 ou de 3 vers 1).

À la main, on trouve les résultats suivants :

n	w_n	z_n
1	2	1
2	7	5
3	21	15
4	59	

On observe que pour $n=4$ on fait $2\times w_3+1\times z_3+2$.
De façon générale, on a : $w_n=w_{n-1}+1+z_{n-1}+1+w_{n-1}=2w_{n-1}+z_{n-1}+2$.
On observe aussi que : $z_n=w_{n-1}+1+w_{n-1}=2w_{n-1}+1$ et donc : $z_{n-1}=2w_{n-2}+1$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} w_n &= 2w_{n-1}+z_{n-1}+2 \\ &= 2w_{n-1}+2w_{n-2}+1+2 \\ &= 2w_{n-1}+2w_{n-2}+3. \end{aligned}$$

On a une suite récurrente d'ordre 2.

On cherche une suite constante C qui vérifie cette relation.
On a alors $C=2C+2C+3$ et donc $C=-1$.

On pose alors $W_n=w_n-(-1)=w_n+1$. On a donc aussi $w_n=W_n-1$.
On a alors, de $w_n=2w_{n-1}+2w_{n-2}+3$:

$$\begin{aligned} W_n-1 &= 2(W_{n-1}-1)+2(W_{n-2}-1)+3 \\ &= 2W_{n-1}-2+2W_{n-2}-2+3 \\ &= 2W_{n-1}+2W_{n-2}-1 \\ W_n &= 2W_{n-1}+2W_{n-2}. \end{aligned}$$

Si on suppose que (W_n) est géométrique, on a $W_n=W_0\times q^n$ et :

$$\begin{aligned} W_n &= 2W_{n-1}+2W_{n-2} \\ W_0\times q^n &= 2W_0\times q^{n-1}+2W_0\times q^{n-2} \\ q^n &= 2q^{n-1}+2q^{n-2} \\ q^2\times q^{n-2} &= 2q\times q^{n-2}+2q^{n-2} \\ q^2 &= 2q+2 \\ 0 &= -q^2+2q+2. \end{aligned}$$

On a : $\Delta=2^2-4\times(-1)\times 2=12$.
Il y a deux solutions : $q_1=\dfrac{(-2-\sqrt{12})}{-2}=1+\sqrt{3}$ et $q_2=1-\sqrt{3}$
On a alors : $W_n=\alpha(1+\sqrt{3})^n+\beta(1-\sqrt{3})^n$ (5).

Pour trouver les valeurs de α et β on utilise :

$$\begin{aligned} W_1 &= \alpha(1+\sqrt{3})+\beta(1-\sqrt{3})=w_1+1=2+1=3 \\ W_2 &= \alpha(1+\sqrt{3})^2+\beta(1-\sqrt{3})^2=w_2+1=7+1=8. \end{aligned}$$

On résout maintenant le système :

$$\begin{cases} \alpha(1+\sqrt{3})+\beta(1-\sqrt{3}) &= 3\times(1+\sqrt{3}) \\ \alpha(1+\sqrt{3})^2+\beta(1-\sqrt{3})^2 &= 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(1+\sqrt{3})^2+\beta(1-3) &= 3+\sqrt{3} \\ \alpha(1+\sqrt{3})^2+\beta(1-\sqrt{3})^2 &= 8 \end{cases}$$

En soustrayant la lignes (1) de la ligne (2) on trouve :

$$\begin{aligned} (1-\sqrt{3})^2\beta-(1-3)\beta &= 8-(3+\sqrt{3}) \\ (1-2\sqrt{3}+3)\beta+2\beta &= 5-3\sqrt{3} \\ (1-2\sqrt{3}+3+2)\beta &= 5-3\sqrt{3} \\ (6-2\sqrt{3})\beta &= 5-3\sqrt{3} \\ \beta &= \frac{5-3\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}} = \frac{3-2\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

En reprenant la première relation, on a :

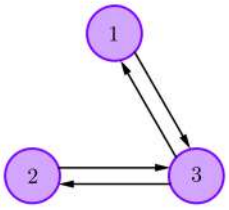
$$\begin{aligned} (1+\sqrt{3})\alpha+\frac{(1-\sqrt{3})\times 3-2\sqrt{3}}{6} &= 3 \\ (1+\sqrt{3})\alpha+\frac{9-5\sqrt{3}}{6} &= 3 \\ (1+\sqrt{3})\alpha &= \frac{9+5\sqrt{3}}{6} \\ \alpha &= \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$w_n = W_n - 1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n - 1.$$

3-d) Sans échanges entre les piquets 1 et 2 :

Dans cette variante, on supprime les mouvements entre les piquets 1 et 2.



On prend deux suites différentes :

- v_n est le nombre de mouvements pour aller du piquet 1 au piquet 3 avec n anneaux sans échanges directs entre les piquets 1 et 2 ;
- u_n est la suite utilisée pour trouver le nombre de déplacements minimum en interdisant les échanges directs entre les piquets 1 et 3.

On a déjà vu que $u_n = 3^n - 1$.

En trouvant les premiers résultats à la main pour 1, 2 ou 3 anneaux, on observe que :

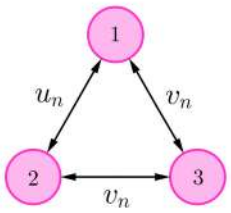
$$v_n = u_{n-1} + 1 + v_{n-1}.$$

En effet, pour déplacer les $n$anneaux du piquet 1 au piquet 3, il faut :

– déplacer $n-1$ anneaux du piquet 1 au piquet 2 sans échanges entre les piquets 1 et 2, ce qui revient au même que d'appliquer la variante "à petit pas", soit u_{n-1} déplacements ;

– déplacer le grand anneau du piquet 1 au piquet 3, soit 1 déplacement ;

– déplacer les $n-1$ anneaux du piquet 2 au piquet 3 sans échanges entre les piquets 1 et 2, ce qui revient au même que de les déplacer du piquet 1 au piquet 3, soit v_{n-1} déplacements.



On a donc :

$$v_n = 3^{n-1} - 1 + 1 + v_{n-1} = 3^{n-1} + v_{n-1},$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \\ v_2 &= 3+1 \\ v_3 &= 3^2+3+1 \\ v_4 &= 3^3+3^2+3+1 \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_n &= 1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1} \\ &= \frac{1-3^n}{1-3} \\ &= \frac{3^n-1}{2}. \end{aligned}$$

On remarque qu'on trouve la moitié du nombre minimum de déplacements en interdisant les échanges entre les piquets 1 et 3.

Bibliographie

Pour la présentation du jeu :
– Le beau livre des maths, Clifford A. Pickover, Dunod, 2019.
Pour les suites récurrentes d'ordre 2 :
– *Récurrence linéaire et épidémie de bosse des maths*, Gilles Cohen, Tangente Hors-série n° 76, novembre 2020.

Notes d'édition

(1) Il existe d'autres façons de déplacer les anneaux mais cette stratégie le réalise effectivement en un nombre minimal de coups, et c'est la seule. En effet, il faut déplacer au moins une fois l'anneau le plus grand ; il faut pour cela déplacer avant les n autres anneaux sur un autre piquet, et il faut les déplacer à nouveau sur le piquet d'arrivée après y avoir mis le grand anneau.
De même, les stratégies données pour les variantes avec déplacements interdits sont aussi optimales.

(2) On pourrait introduire cette notation par une fonction Python de façon à éviter l'énumération des cas dans le programme.

(3) Ici, on compte les nombres d'apparitions des différents mouvements dans les solutions fournies par le programme. Mais on peut remarquer qu'on peut aussi les obtenir directement par des équations de récurrence linéaires déduites de la construction.

(4) Il est clair qu'on ne repasse jamais par la même position du fait que la stratégie optimale ne peut pas comporter de boucles (on le voit aussi à la façon dont la solution est construite). Les 3^n positions visitées sont donc toutes différentes et on trouve bien toutes les positions possibles.

(5) En effet, quels que soient α et β les suites (W_n) et $\left(\alpha\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\beta\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right)$ satisfont la même équation de récurrence d'ordre 2 ; en choisissant les valeurs de α et β telles que leurs deux premiers termes coïncident, on obtient par récurrence que leurs termes d'indice n sont égaux pour tout n.

L’association MATh.en.JEANS a fêté ses 30 ans en 2019. Elle a toujours pour objectif de faire découvrir les mathématiques autrement aux jeunes collégien·nes, lycéen·nes et étudiant·es, tous volontaires, de niveaux variés dans cette discipline, en les initiant à la recherche avec la participation de mathématiciennes et de mathématiciens.

Chaque année, les jeunes participant·es aux ateliers de recherche présentent le résultat de leur travail lors de Congrès régionaux. Une fois le congrès passé, les chercheuses et chercheurs en herbe sont incité·es à rédiger un article publié sur le site de l’association par le comité d’édition.

https://www.mathenjeans.fr/

L'activité MATh.en.JEANS permet aux jeunes collégien·nes, lycéen·nes, étudiant·es de vivre les mathématiques en découvrant la pratique de la recherche avec l'aide de chercheuses, chercheurs et d'enseignant·es. Lors du congrès annuel, les élèves présentent les résultats de leur recherche. Le travail de l'année est ensuite concrétisé par l'écriture d'articles comme ceux publiés ici.

Cette brochure regroupe des contributions des années 2019, 2020, 2021.

Association MATh.en.JEANS ISBN 978-2-9669425-1-1 dépôt légal : mars 2022