

Les mathématiques à travers les images

Mame Diarra FALL

Institut Denis Poisson, UMR CNRS, Université d'Orléans et Université de Tours.

Email : diarra.fall@univ-orleans.fr

Congrès Math.en.JEANS, Rennes, 30/03/2019

Plan

1 Motivations et généralités

2 Traitement d'images

- Changement de luminosité
- Changement de contraste
- Égalisation d'histogramme
- Spécification, recalage, recollage
- Traitement des images en couleur
- Débruitage

1. Introduction et généralités sur l'image.

C'est quoi une image ?



C'est quoi une image ?

2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	0	0	0	0	2
2	0	1	1	1	1	0	2
2	0	1	0	0	1	0	2
2	0	1	1	1	1	0	2
2	0	1	0	0	1	0	2
2	0	0	0	0	0	0	2
2	2	2	2	2	2	2	2

Image

- Image numérique : un (ou plusieurs) tableau (x).
- Image divisée en **pixels**.
- Pixel caractérisé par sa position et sa (ses) valeur(s).
- Valeurs des pixels appartiennent à un intervalle borné connu (codage).
- Convention usuelle :
 - ▶ Base : (ligne, colonne).
 - ▶ Origine : coin supérieur gauche.

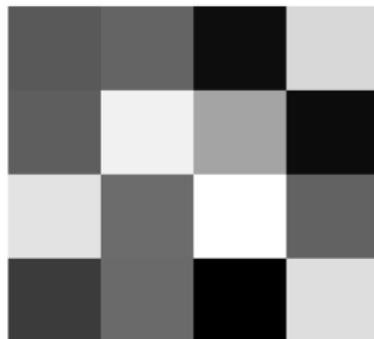
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2				■	■	■	■			
3			■					■		
4	■								■	
5	■			■			■			
6	■									■
7	■			■			■			
8	■				■	■				■
9			■					■		
10				■	■	■	■			
11										

Images et tableaux

On peut donc représenter

- une image en **niveau de gris** au travers d'un tableau.
- une image **couleur** au travers de trois tableaux (un par canal).

90	100	19	209
95	232	160	18
219	108	246	98
62	106	6	215



Images et tableaux

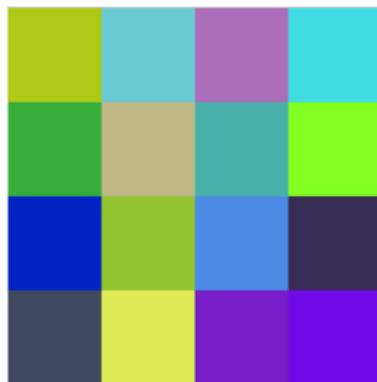
On peut donc représenter

- une image en **niveau de gris** au travers d'un tableau.
- une image **couleur** au travers de trois tableaux (un par canal).

175	107	172	65
56	193	73	130
0	146	74	56
64	222	120	112

201	202	110	219
174	182	176	255
36	196	138	45
72	235	29	10

22	212	185	228
58	133	169	33
196	48	228	84
95	86	199	231



Images et tableaux

- Locomotive à vapeur



Images et tableaux

- Extrait du cliché de la tête, 132×148 pixels
- Valeurs pour le coin nord-ouest de la tête, 30×15 pixels



```
217. 217. 217. 214. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 217.
217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 229. 229. 229. 229. 217.
217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 217. 229. 217. 217. 229. 217. 229. 229.
217. 229. 229. 217. 217. 229. 217. 229. 217. 229. 217. 229. 229. 229. 229.
229. 217. 229. 217. 229. 229. 217. 217. 229. 229. 229. 217. 217. 229. 229.
229. 229. 229. 229. 229. 217. 229. 229. 229. 217. 217. 229. 229. 229. 229.
229. 217. 229. 217. 217. 229. 229. 217. 229. 217. 229. 217. 229. 229. 229.
229. 229. 234. 234. 234. 234. 234. 229. 217. 234. 229. 229. 229. 229. 229.
234. 234. 229. 234. 234. 234. 234. 234. 234. 234. 234. 250. 234. 217. 229. 250.
229. 229. 229. 229. 229. 234. 229. 234. 229. 234. 250. 217. 195. 214. 229.
229. 229. 234. 234. 234. 234. 229. 234. 234. 229. 234. 229. 189. 214. 234.
229. 234. 229. 234. 229. 229. 229. 229. 234. 234. 234. 250. 150. 153. 173.
229. 229. 229. 229. 229. 234. 250. 229. 234. 250. 229. 234. 234. 250. 173. 164. 164.
234. 234. 229. 217. 229. 229. 234. 217. 229. 179. 179. 189. 173. 153. 117.
229. 229. 229. 250. 229. 229. 234. 229. 250. 150. 127. 102. 102. 102. 102.
217. 229. 234. 234. 250. 250. 234. 250. 250. 189. 117. 51. 77. 102. 102.
229. 250. 250. 195. 214. 250. 234. 234. 250. 250. 137. 77. 77. 102. 89.
229. 234. 250. 173. 166. 250. 250. 250. 250. 250. 127. 89. 89. 77. 77.
229. 250. 250. 217. 164. 217. 250. 250. 250. 189. 77. 102. 102. 77. 77.
229. 234. 234. 250. 195. 150. 164. 189. 189. 127. 77. 77. 77. 77.
217. 214. 217. 214. 166. 137. 137. 204. 117. 77. 77. 51. 77. 51.
166. 150. 150. 166. 117. 102. 150. 217. 89. 51. 51. 51. 51. 51. 51.
217. 102. 178. 204. 89. 77. 117. 175. 77. 51. 51. 51. 51. 51. 51.
234. 77. 102. 89. 153. 77. 51. 0. 0. 51. 51. 51. 51. 51. 51.
77. 117. 117. 150. 166. 0. 0. 0. 51. 51. 51. 51. 0. 51. 0.
102. 117. 117. 102. 51. 51. 51. 77. 51. 77. 51. 51. 51.
102. 117. 153. 173. 0. 51. 51. 51. 51. 51. 51. 51. 0. 51. 51.
77. 89. 89. 77. 51. 51. 77. 77. 51. 51. 0. 51. 51. 0.
89. 77. 89. 51. 51. 77. 77. 51. 51. 51. 51. 0. 51. 51. 51.
117. 175. 195. 51. 77. 77. 51. 51. 0. 51. 51. 51. 51. 51. 51.
```

Traitement d'images

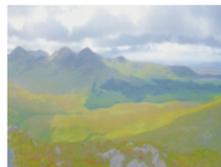
Discipline permettant de résoudre différents types de problèmes :



- 1 décrire/modifier certains aspects d'une image,
- 2 assembler deux images,
- 3 restaurer une image (débruiter, compléter, ...),
- 4 extraire de l'information d'une image.

Traitement d'images

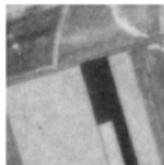
Discipline permettant de résoudre différents types de problèmes :



- 1 décrire/modifier certains aspects d'une image,
- 2 assembler deux images,
- 3 restaurer une image (débruiter, compléter, ...),
- 4 extraire de l'information d'une image.

Traitement d'images

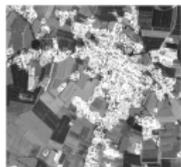
Discipline permettant de résoudre différents types de problèmes :



- 1 décrire/modifier certains aspects d'une image,
- 2 assembler deux images,
- 3 restaurer une image (débruiter, compléter, ...),
- 4 extraire de l'information d'une image.

Traitement d'images

Discipline permettant de résoudre différents types de problèmes :



- 1 décrire/modifier certains aspects d'une image,
- 2 assembler deux images,
- 3 restaurer une image (débruiter, compléter, ...),
- 4 extraire de l'information d'une image.

L'imagerie, un domaine multivarié...

Domaine pluridisciplinaire

- 1 Mathématiques.
- 2 Informatique.
- 3 Physique.
- 4 Etc.

Applications

- 1 Biométrie : identification de personnes (reconnaissance de l'écriture, d'empreintes digitales, détection/reconnaissance de visages etc).
- 2 Imagerie satellitaire (mesures de pollution de l'eau à partir d'images, délimitation des villes).
- 3 Astrophysique.
- 4 Imagerie biomédicale (radiographie, IRM, scanner, échographie, etc.)
- 5 Etc.

Étapes de la chaîne

Phases

- 1 Acquisition (caméra).
- 2 **Reconstruction** \Rightarrow représentation numérique de la scène physique.
- 3 **Traitement.**
- 4 Analyse et interprétation.

Traitement d'images

- 1 Amélioration d'images (meilleur rendu visuel, améliorer le contraste, enlever du flou, corriger du phénomène yeux rouges).
- 2 Extraction d'informations.
- 3 Compression, stockage.

Codage d'une image

L'ordinateur utilise un **code binaire** pour enregistrer l'information :

- 1 bit : $2^1 = 2$ états/possibilités (0/1) (ouvert/fermé ; noir/blanc etc.)
- 2 bits : $2^2 = 4$ états/possibilités (00/ 01/ 10/ 11).
- 3 bits : $2^3 = 8$ états/possibilités (000/ 001/ 010/ 011/ 100/ 101/ 110/ 111).
- 8 bits : $2^8 = 256$ possibilités.
- etc...
- Octet : ensemble de 8 bits.
 - ▶ Informations souvent regroupées par groupes de 8 bits :
8 bits ↔ 1 octet ; 16 bits ↔ 2 octets ; 24 bits ↔ 3 octets ; 32 bits ↔ 4 octets ;
64 bits ↔ 8 octets.
- kilooctet : 1 Ko = 2^{10} octets = 1024 octets.
- mégaoctet : 1Mo = 2^{20} octets = 1024 kilooctets.
- gigaoctet : 1Go = 2^{30} octets = 1024 mégaoctets.

Codage des images

Trois types :

- 1 Binaire.
- 2 Niveau de Gris (NDG).
- 3 Couleur.

Codage des images

Codage binaire (N&B)

- Codage en un bit par pixel.
- **1** bit :
 - ▶ 2^1 possibilités.
 - ▶ Pixels prennent la valeur 0 (noir) ou 1 (blanc).
 - ▶ Image de 10.000 pixels occupe 10.000 bits, soit 1250 octets.
 - ▶ Pas adapté pour des photos par exemple.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Codage des images

Codage en NDG

- Codage d'un pixel sur plusieurs bits.
- Exemples :
 - ▶ 2 bits $\implies 2^2 = 4$ possibilités (noir, gris foncé, gris clair, blanc).
 - ▶ 8 bits = 1 octet
 - ★ $2^8 = 256$ possibilités (256 nuances de dégradés du gris, entre le noir complet (0) et le blanc saturé (255)).
 - ★ Image de 10.000 pixels occupe 10.000 octets en mémoire.
 - ▶ 16 bits $\implies 2^{16} = 65.536$ possibilités.

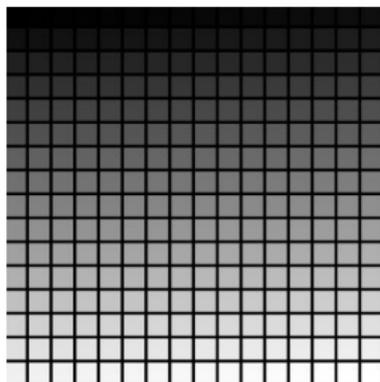


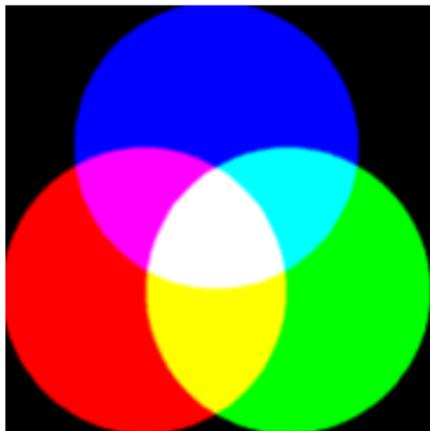
Figure – Codage en 8 bpp : 256 nuances de gris.

Codage des images

Codage couleur : synthèse additive RVB

Synthèse additive : opération consistant à combiner la lumière de plusieurs sources émettrices colorées afin d'obtenir une nouvelle couleur.

- 1 3 couleurs primaires souvent utilisées : Rouge, Vert et Bleu.
- 2 Addition de ces trois couleurs (à leur intensité maximale) donne du blanc.
- 3 Absence de couleur donne du noir.
- 4 Addition 2 à 2 de ces couleurs primaires permet d'obtenir les couleurs secondaires :
 - 1 Rouge+vert=jaune.
 - 2 Rouge+bleu=magenta.
 - 3 Bleu+vert=cyan.

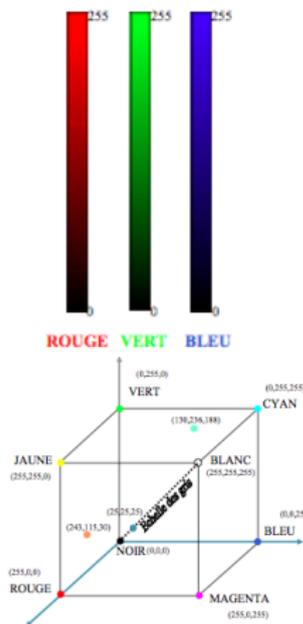


Codage des images couleur

Mode colorimétrique RVB

- 1 Système appelé RVB (ou RGB).
- 2 Représentation standard.
- 3 3 plans de NDG : un rouge, un vert et un bleu.
- 4 Lorsque $R = V = B$, la couleur associée est un "niveau de gris".

	R	V	B
	255	0	0
	255	255	0
	255	255	255
	128	128	128
	128	56	180
	128	200	5
	0	0	0



Codage des images couleur

Mode colorimétrique RVB en 24 bits

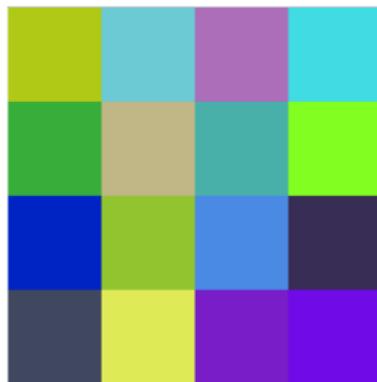
- Codage RVB en 8 bits (1 octet) par couche.
- Valeur dans chaque pixel est une combinaison (selon certaines proportions) des trois composantes.
- On obtient $256 \times 256 \times 256 \approx 16.77$ millions de couleurs différentes.
- Chaque couleur codée sur 1 octet (8 bits).
- Chaque pixel codé sur 3 octets (24 bits).
- Image de 10.000 pixels : $10.000 \times 3 = 30.000$ octets.
- Codage utilisé par la plupart des écrans d'ordinateurs.
- **Problème** : gourmand en mémoire.
- \Rightarrow D'autres formes de codage pour faciliter le stockage.

Image couleur

175	107	172	65
56	193	73	130
0	146	74	56
64	222	120	112

201	202	110	219
174	182	176	255
36	196	138	45
72	235	29	10

22	212	185	228
58	133	169	33
196	48	228	84
95	86	199	231



2. Traitement d'images.

Traitement de l'image

Objectifs :

- Amélioration de l'apparence.
- Extraction d'informations.
- Modification du codage pour stockage, transmission etc.
- Etc.

Deux familles.

① Techniques qui transforment l'image

Exemples :

- ▶ Restauration : production d'une image plus proche de la scène physique.
- ▶ Amélioration : confort visuel.

② Techniques d'extraction d'information

Exemples :

- ▶ détection de contours : mise en évidence des contours de l'objet.
- ▶ segmentation : partitionnement de l'image en régions homogènes.
- ▶ reconnaissance de formes : association d'un objet ou une propriété à certaines régions de l'image.

Pourquoi restaurer/améliorer une image ?

- Image peut subir plusieurs dégradations dues :
 - ① composantes du système d'acquisition.
 - ★ Capteur de mauvaise qualité, mal réglé.
 - ② Conditions de prise de vue
 - ★ bougé, éclairage de la scène.
 - ③ Échantillonnage
 - ★ précision faible.
 - ④ Usure du temps.
 - ⑤ Etc.
- Traitement peut avoir pour but :
 - ① correction des dégradations.

Amélioration par modification d'histogramme

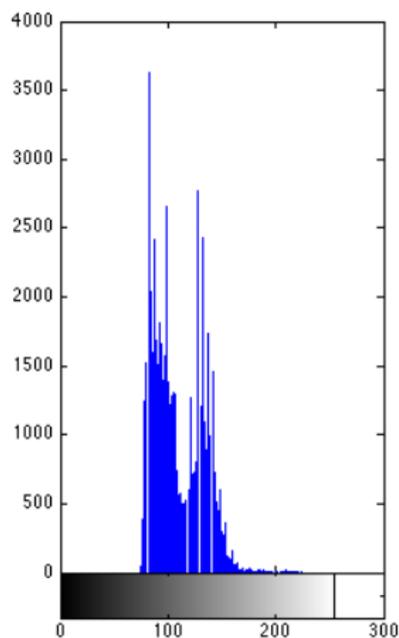
Deux définitions

- 1 **Luminosité (luminance, brillance)** : valeur moyenne des NDG de l'image.
- 2 **Contraste** : moyenne des écarts entre la valeur d'un pixel et la moyenne des NDG de l'image.

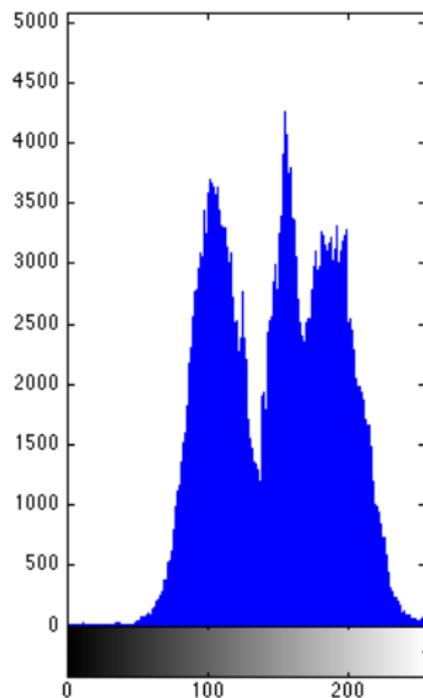
Histogramme

- On peut extraire d'une image I son **histogramme**.
- Construction :
 - ▶ on recouvre $[0, 255]$ en p classes $[a_0; a_1[, \dots, [a_{p-1}; a_p[$
 - ▶ A chaque classe $[a_{i-1}; a_i[$, on associe l'effectif n_i de NDG s'y trouvant.
- Outil très utilisé en traitement d'images.
- Permet de mettre en évidence des aspects généraux de l'image :
 - ▶ contraste,
 - ▶ luminosité,
 - ▶ présence de groupes de pixels de niveaux de gris similaires.

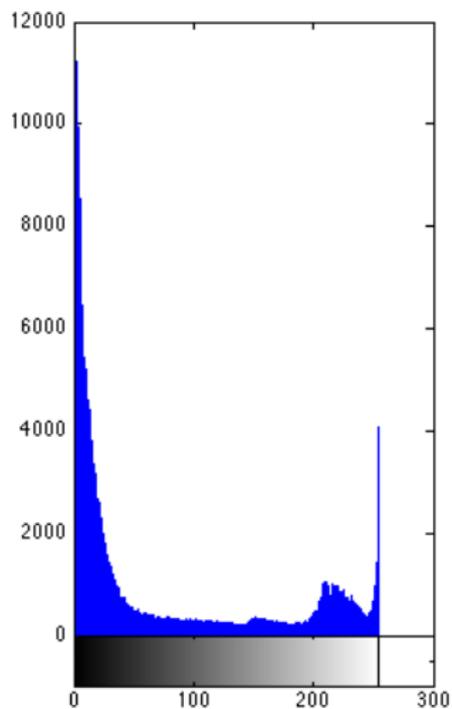
Exemple 1 : une image et son histogramme



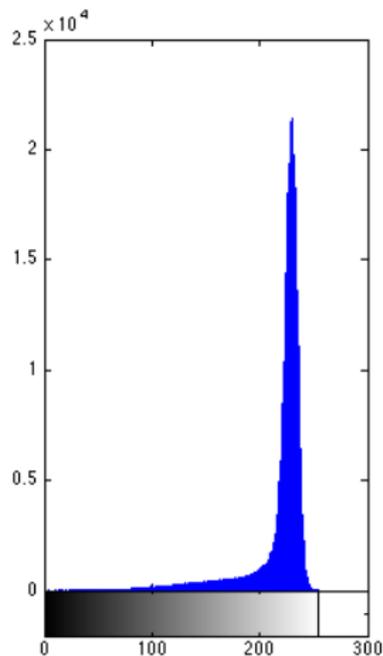
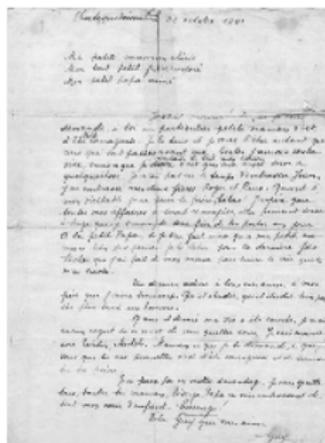
Exemple 2 : une image et son histogramme



Exemple 3 : une image et son histogramme



Exemple 4 : une image et son histogramme



Récapitulatif

Contraste, luminosité et histogramme

Contraste caractérise la répartition lumineuse de l'image.

- 1 Si contraste faible,
 - ▶ histogramme concentré autour de certaines valeurs.
- 2 Si contraste fort,
 - ▶ histogramme s'étale entre 0 et 255.

Luminosité.

- 1 Si image claire (forte luminosité),
 - ▶ histogramme présente une grande fréquence pour les fortes intensités (fortes valeurs de NDG).
- 2 Si image sombre,
 - ▶ grande fréquence pour les faibles intensités (faibles valeurs de NDG).

Changement de luminosité

- **Modifier la luminosité** globale d'une image en **ajoutant/enlevant** une valeur à l'ensemble des NDG.



Changement de contraste

- Rappel : **contraste** s'observe au travers de l'histogramme des NDG.
 - ▶ fort : histogramme réparti entre 0 et 255
 - ▶ faible : concentration de l'histogramme autour de certaines valeurs.

Changement de contraste

- Transformation de l'image de sorte à ramener les NDG dans $[m, M]$.
- Exemple : **extension de dynamique** → **augmenter** le contraste d'une image.
- Principe : étendre la plage des NDG afin de la ramener à une dynamique, exemple entre $m = 0$ et $M = 255$.
- Technique de recadrage : redistribution des NDG de telle sorte que tous les NDG présents soient répartis entre 0 et 255.
- ⇒ **"Étirement" de l'histogramme.**

Extension de la dynamique

- Si I est l'image de départ (de plage des NDG [$\min(I)$, $\max(I)$]).
- I^1 l'image modifiée,
- Transformation à effectuer sur tout pixel s , pour se ramener à $[0, 255]$:

$$I_s^1 = 255 \times \frac{I_s - \min(I)}{\max(I) - \min(I)}.$$

Image initiale



Image dynamisée



Égalisation d'histogramme

- Égalisation d'histogramme : transformer l'image de manière à ce que la répartition des NDG soit à peu près uniforme.
- On souhaite donc **aplanir** l'histogramme des NDG, i.e.,
 - ▶ rajouter du contraste pour les valeurs NDG où la densité est forte
 - ▶ le diminuer pour celles où la densité est faible.
- Conséquences :
 - ▶ Mettre en évidence, au sein des pixels correspondant à de fortes valeurs de la densité, des détails jusque là masqués.
 - ▶ Diminuer l'ampleur de certains détails au sein des pixels correspondant à de faibles valeurs de la densité.

Égalisation d'histogramme



Figure – Image initiale et après égalisation d'histogramme

Égalisation d'histogramme

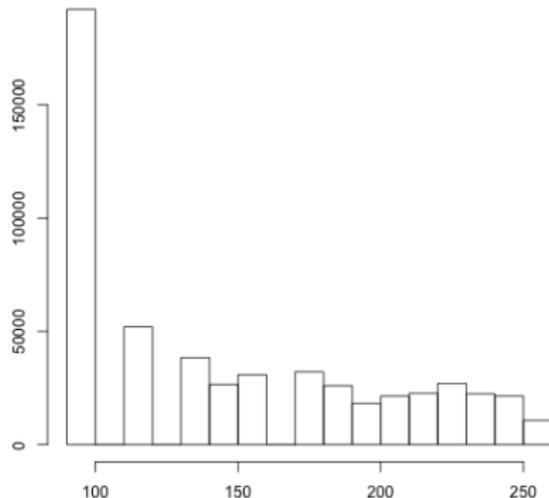
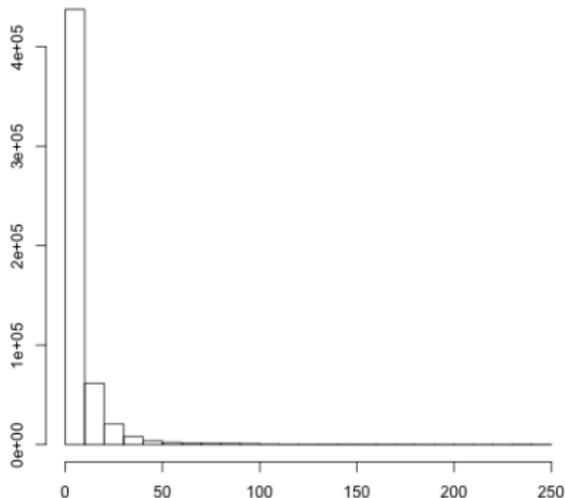


Figure – Histogrammes avant/après égalisation.

Égalisation d'histogramme



Figure – Image initiale et après égalisation d'histogramme

Égalisation d'histogramme

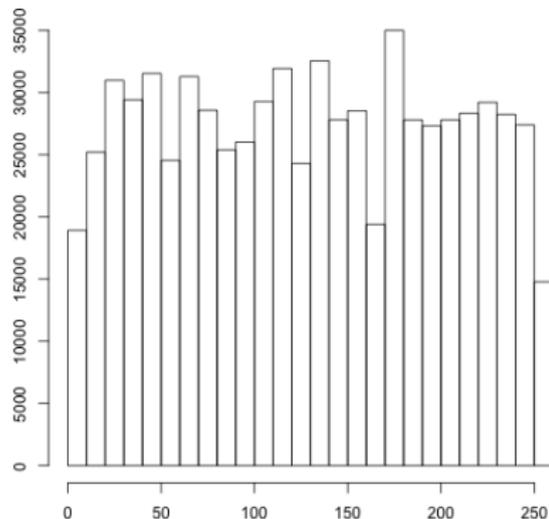
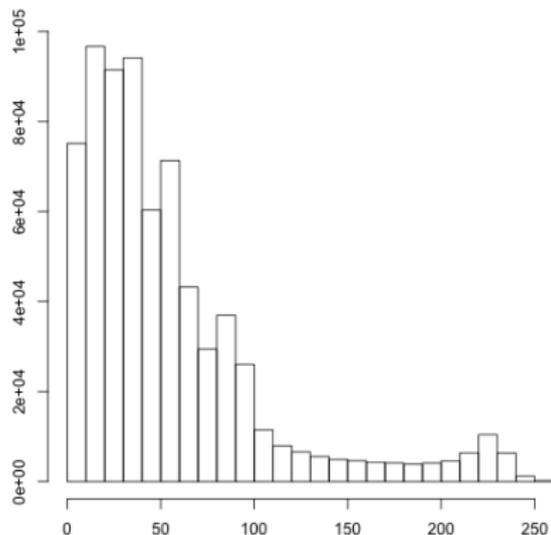


Figure – Histogrammes avant/après égalisation.

Égalisation d'histogramme



Figure – Image initiale et après égalisation d'histogramme

Égalisation d'histogramme

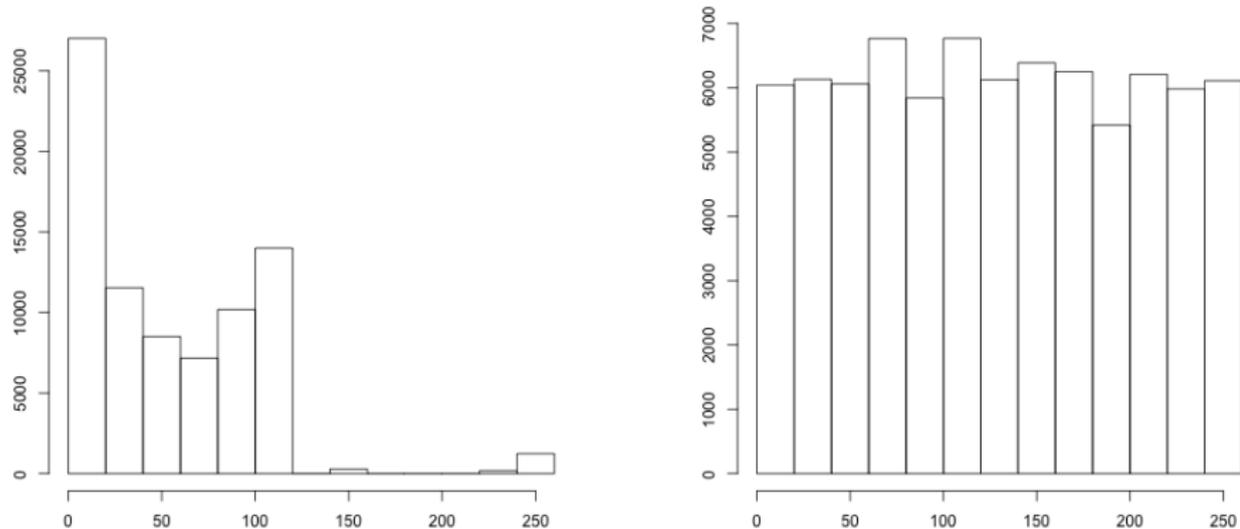


Figure – Histogrammes avant/après égalisation.

Spécification d'une image par rapport à une autre

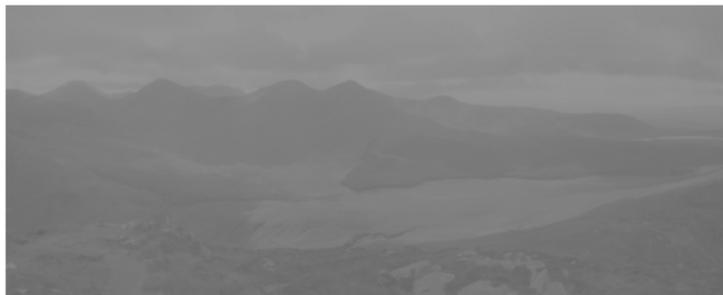
- Images d'une *même scène* peuvent être *différentes* pour différentes conditions de prise de vue (luminosité, contraste, etc.)
⇒ Répartitions de niveaux de gris différentes.
- **Spécification** : transformer une image telle que l'histogramme de ses NDG ait une certaine distribution de NDG fixée a priori (correspondant à une autre image, ou bien à une vignette de l'image par exemple).
- Exemple d'utilisation.
 - ▶ Réalisation d'images panoramiques : **assemblage** de deux images ayant en commun une partie de la scène.
 - ▶ ⇔ Nécessite la **spécification** si une des deux images est sous-exposée.

Spécification d'une image par rapport à une autre

- On dispose de deux images I et I_R , où I_R est l'image de référence.
- On souhaite modifier I de sorte que la répartition de ses valeurs soit proche de celle observée pour I_R .
- On doit donc **changer I en une image I^{sp} telle que $hist(I^{sp}) \approx hist(I_R)$** .
- Soit H la *fonction de répartition* de I et H_R celle de I_R .
- **Idée de la spécification** : égaliser I (\Rightarrow distribution uniforme des NDG) puis appliquer à chaque pixel s de l'image ainsi obtenue,

$$I_s^{sp} = H_R^{-1}[H(I_s)].$$

Exemple d'utilisation. De haut en bas : image de référence, image à spécifier et résultat de la spécification.



Assemblage de deux images

- On dispose de deux images I_1 et I_2 que l'on souhaite assembler pour obtenir une image panoramique.
- On suppose :
 - ▶ I_1 (image de gauche) et I_2 (image de droite).
 - ▶ Une partie de la scène représentée par I_1 se retrouve dans I_2 .
- Notons nc_i le nombre de colonnes de I_i , pour $i = 1, 2$.
- Soit $L = \min(nc_1, nc_2)$.
- Il existe alors $\ell_0 \in \{1, \dots, L\}$ tel que les ℓ_0 dernières colonnes de I_1 et les ℓ_0 premières colonnes de I_2 représentent la même scène.
- Détermination de $\ell_0 \Rightarrow$ **recalage d'images**.

Démarche proposée pour l'assemblage :

- 1 **Recalage** des images I_1 et I_2 .
- 2 **Recollage** lisse des images ainsi obtenues.

Recalage d'images par corrélation

Coefficient de corrélation

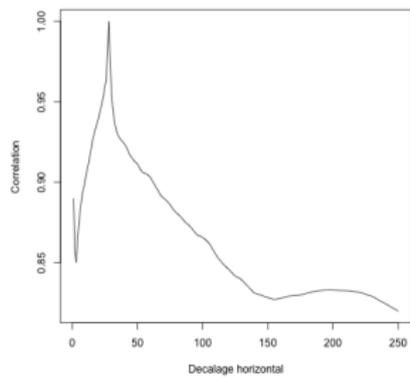
- On considère x et y deux vecteurs.
- Le **coefficient de corrélation** $r(x, y)$ entre x et y permet de savoir si les deux vecteurs sont liés et leur sens d'évolution.
- $r(x, y)$ proche de 1 signifie que x et y semblent liés et ont tendance à évoluer dans le **même sens**.
- $r(x, y)$ proche de -1 signifie que x et y semblent liés et ont tendance à évoluer en **sens opposé**.

Démarche proposée pour le recalage par corrélation :

- Calculer pour chaque valeur possible ℓ , la corrélation entre les ℓ dernières colonnes de I_1 et les ℓ premières colonnes de I_2 .
- Choisir comme **décalage optimal** ℓ_0 , celui qui **maximise la corrélation**.



Decalage optimal: 28



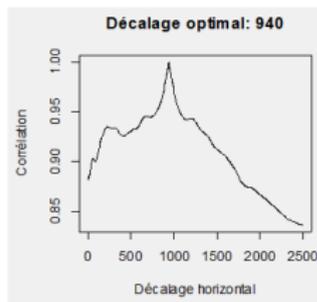
Recollage

- Une fois le décalage optimal trouvé, on veut **combiner** les deux images pour obtenir une nouvelle image I de plus grande taille.
- Recollage lisse.



Spécification et recollage

- On veut assembler A et B ayant une partie commune, mais B sous-exposée.
- Spécifier \hat{B} en prenant A comme image de référence.
On note \hat{B} le résultat de la spécification.
- Recalage et recollage lisse des images A et \hat{B} .



Cas des images en couleur

- Images en couleur souvent codées sur 3 canaux.
- Image couleur est donc la combinaison de 3 tableaux.
- Pour certaines applications, on ne peut travailler que sur une matrice : la **luminance**.
- On transforme l'image RVB en une image YC_bC_r .
- Autre forme de codage avec la *luminance* (Y) et deux *chrominances* C_b (niveau de bleu moins Y) et C_r (niveau de rouge moins Y).
- Transformation YC_bC_r définie de la façon suivante (pour chaque pixel) :

$$\begin{cases} Y = 0.299 \times R + 0.587 \times V + 0.114 \times B \\ C_b = -0.1687 \times R - 0.3313 \times V + 0.5 \times B + 128 \\ C_r = 0.5 \times R - 0.4187 \times V - 0.0813 \times B + 128 \end{cases}$$

- **Modification d'une image couleur** (changement de luminosité, de contraste, égalisation d'histogramme, spécification, recalage, recollage etc) :
 - 1 La passer en YC_bC_r .
 - 2 Effectuer la modification voulue sur le canal de luminance Y .
 - 3 Repasser l'image modifiée en RGB pour la visualisation.

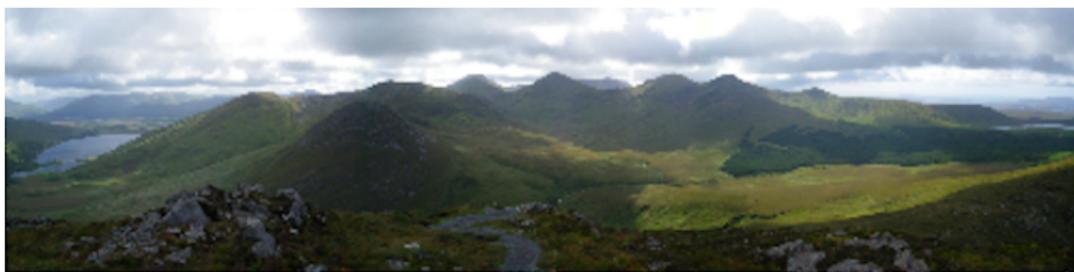
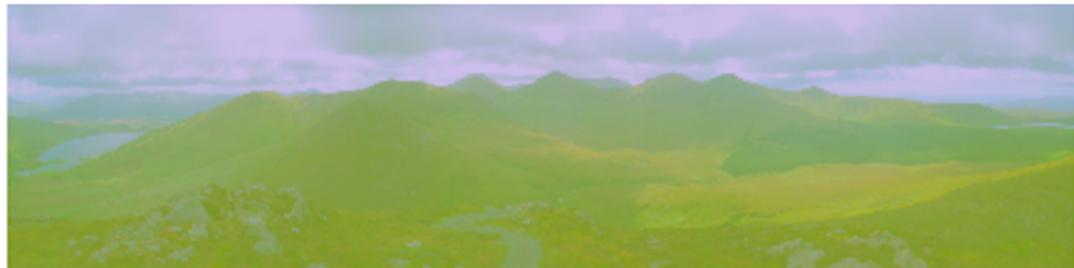
Images en couleur

Changement de contraste



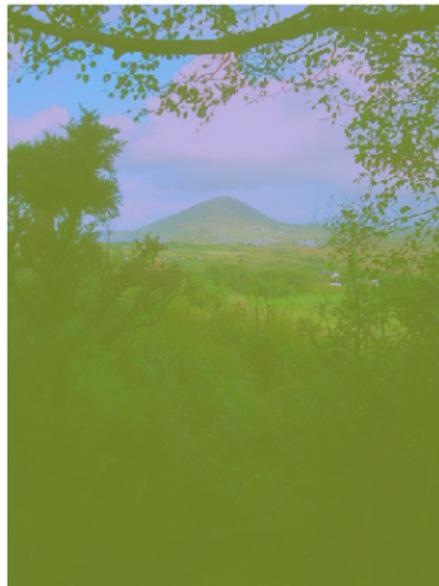
Images en couleur

Changement de contraste



Images en couleur

Changement de contraste



Images en couleur

Égalisation d'histogramme

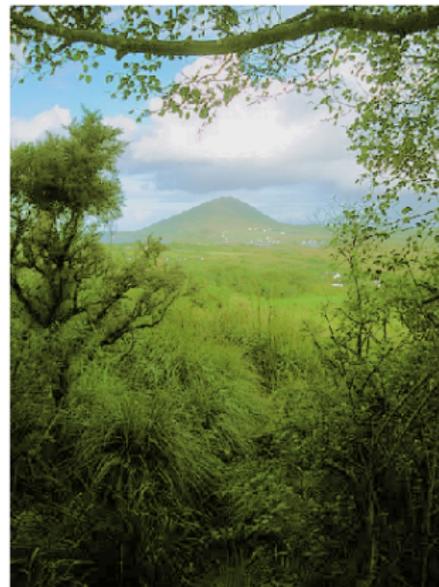


Figure – Images de départ et après égalisation

Images en couleur

Recalage et recollage



Images en couleur

Recalage et recollage



Débruitage

Réduction du bruit par filtrage

- Image peut être dégradée par du **bruit**.
- Différents types de bruits.
- Exemple : bruit impulsionnel ("**poivre et sel**").
 - ▶ Dégradation d'une l'image qui apparait sous la forme de pixels noirs et blancs répartis au hasard sur l'image.
 - ▶ **Causes** : erreurs de transmission de données, défaillance d'éléments du capteur CCD, présence de particules fines sur le capteur d'images etc.
 - ▶ **Conséquences** : bruits très localisés et très perturbants.
- **Débruitage** : opération consistant à supprimer le bruit d'une image.

Débruitage

Bruit "poivre et sel"



Réduction du bruit par filtrage

Filtre médian

Principe du filtre médian

- 1 Considérer un voisinage autour de chaque pixel (typiquement, 3×3).
- 2 Remplacer le NDG du pixel par la **médiane** des NDG des pixels de son voisinage.
- 3 Exemple : filtrage du pixel de NDG **255** tel que

10	10	7
9	255	10
12	10	7

- ▶ On classe les valeurs dans l'ordre croissant : 7, 7, 9, 10, **10**, 10, 10, 12, 255.
- ▶ On remplace 255 par la médiane **10**.

Réduction du bruit par filtrage

Filtre médian



Figure – Image bruitée et après débruitage.

MERCI !

Merci à mon collègue Laurent Delsol et à nos étudiants.