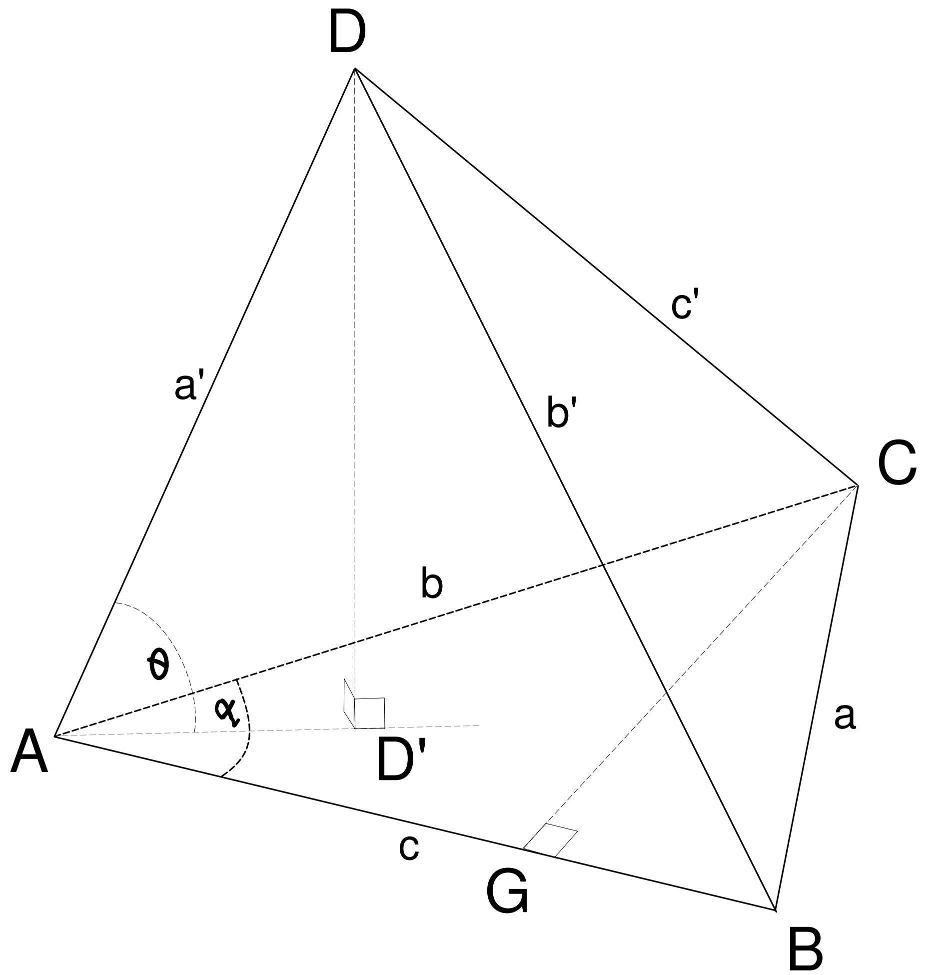
VOLUME DU TÉTRAÈDRE EN FONCTION DES CARRÉS DES LONGUEURS DES CÔTÉS

• **Introduction**

Le carré de l'aire d'un triangle peut s'exprimer en fonction du carré des longueurs de ses côtés. Qu'en est il pour le tétraèdre ?

En effet, la formule dite de Héron nous donne le carré de l'aire d'un triangle en fonction des carrés des longueurs des côtés. On peut donc se demander si une formule semblable existe pour le volume du tétraèdre.

• **Première expression du volume**



Soit le tétraèdre $ABCD$, on notera $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $a' = AD$, $b' = BD$ et $c' = CD$.

Soit D' le projeté orthogonal de D sur le plan de base (ABC), G le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), $\alpha = \widehat{BAC}$ et $\theta = \widehat{DAD'}$.

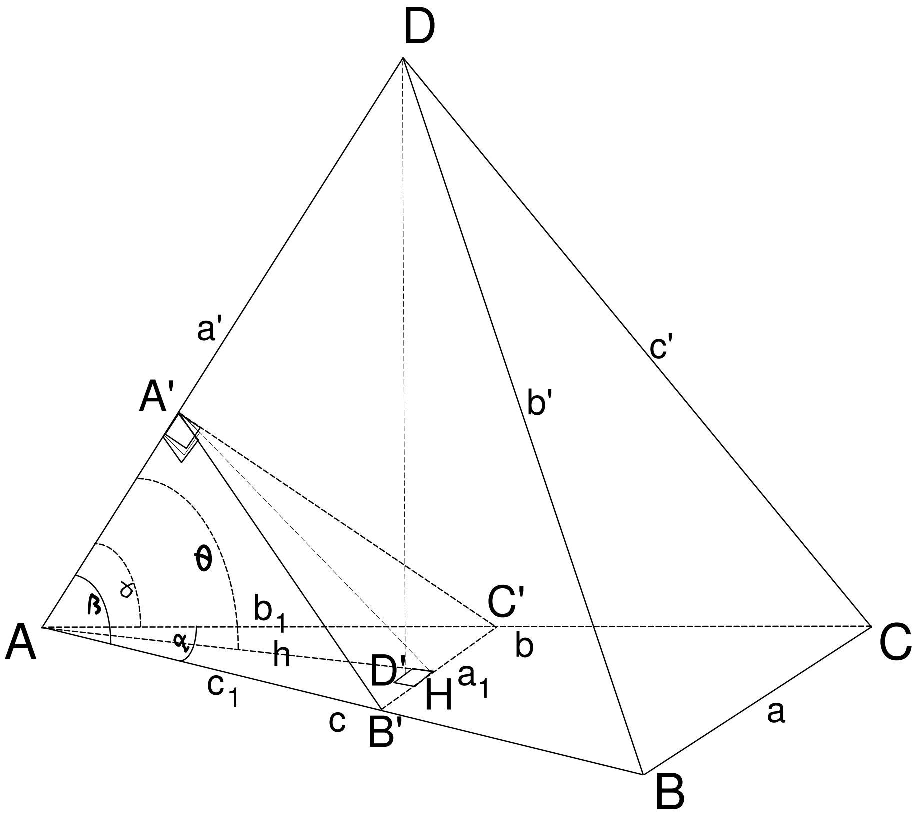
Le volume V du tétraèdre $ABCD$ est égal au tiers du produit de l'aire de la base (triangle ABC) et de la hauteur (distance DD') donc $V = \frac{\frac{AB \times CG}{2} \times DD'}{3}$ donc $V = \frac{AB \times AC \sin\alpha \times AD \sin\theta}{6}$.

Donc $V = \frac{a'bc \sin\alpha \sin\theta}{6}$ [1].

Nous connaissons a', b, c et on peut calculer $\sin\alpha$ avec la formule d'Al Kashi. Calculons donc $\sin\theta$:

• **Calcul de** $\sin\theta$

Pour pouvoir calculer $\sin\theta$, on réalise la construction suivante :



Soit $A' \in [AD)$ tel que $AA' = 1$.

Soit $\mathcal{P}\perp(AA')$ tel que $A' \in \mathcal{P}$, $B' = \mathcal{P} \cap (AB)$ et $C' = \mathcal{P} \cap (AC)$.

Soit $\mathcal{P}'\perp(B'C')$ tel que $A \in \mathcal{P}'$ et $H = \mathcal{P}' \cap (B'C')$. $B' \in \mathcal{P}$, $C' \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}\perp(AA')$ donc $(B'C')\perp(AA')$ donc $A' \in \mathcal{P}'$. Donc $\mathcal{P}'$ plan perpendiculaire à la base contenant (AD) donc $D' \in \mathcal{P}'$, $\theta \subset \mathcal{P}'$ et $\theta = \widehat{A'AH}$.

On notera $a_1 = B'C'$, $b_1 = AC'$, $c_1 = AB'$, $h = AH$, $\beta = \widehat{DAB}$ et $\gamma = \widehat{DAC}$.

Pour pouvoir calculer $\cos\theta$ (et donc ensuite $\sin\theta$) on calcule h :

◦ **Calcul de h**

Suivant la position de H ($H \in [B'C']$ ou $H \notin [B'C']$ et $H \in [B'C')$ ou $H \notin [B'C']$ et $H \in [C'B')$) on a (respectivement) :

$$a_1 = B'h + C'h \quad \text{ou} \quad a_1 = B'h - C'h \quad \text{ou} \quad a_1 = -B'H + C'H$$

donc d'après le théorème de Pythagore dans les triangles AHB' et AHC' :

$$\begin{array}{lllll}
 & a_1 = \sqrt{c_1^2 - h^2} + \sqrt{b_1^2 - h^2} & \text{ou} & a_1 = \sqrt{c_1^2 - h^2} - \sqrt{b_1^2 - h^2} & \text{ou} \quad a_1 = -\sqrt{c_1^2 - h^2} + \sqrt{b_1^2 - h^2} \\
\Rightarrow & \sqrt{b_1^2 - h^2}^2 = \left(a_1 - \sqrt{c_1^2 - h^2}\right)^2 & \text{ou} & \left(-\sqrt{b_1^2 - h^2}\right)^2 = \left(a_1 - \sqrt{c_1^2 - h^2}\right)^2 & \text{ou} \quad \sqrt{b_1^2 - h^2}^2 = \left(a_1 + \sqrt{c_1^2 - h^2}\right)^2 \\
\Rightarrow & b_1^2 = a_1^2 + c_1^2 - 2a_1\sqrt{c_1^2 - h^2} & \text{ou} & b_1^2 = a_1^2 + c_1^2 + 2a_1\sqrt{c_1^2 - h^2} & \\
\Rightarrow & \left(2a_1\sqrt{c_1^2 - h^2}\right)^2 = \left(a_1^2 - b_1^2 + c_1^2\right)^2 & \text{ou} & \left(-2a_1\sqrt{c_1^2 - h^2}\right)^2 = \left(a_1^2 - b_1^2 + c_1^2\right)^2 & \\
\Rightarrow & \multicolumn{4}{l}{4a_1^2c_1^2 - 4a_1^2h^2 = a_1^4 + b_1^4 + c_1^4 - 2a_1^2b_1^2 + 2a_1^2c_1^2 - 2b_1^2c_1^2} \\
\Rightarrow & \multicolumn{4}{l}{h = \frac{\sqrt{-2a_1^4 - 2b_1^4 - 2c_1^4 + \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)^2}}{2a_1} (h \text{ est une longueur donc } h \geq 0)}
\end{array}$$

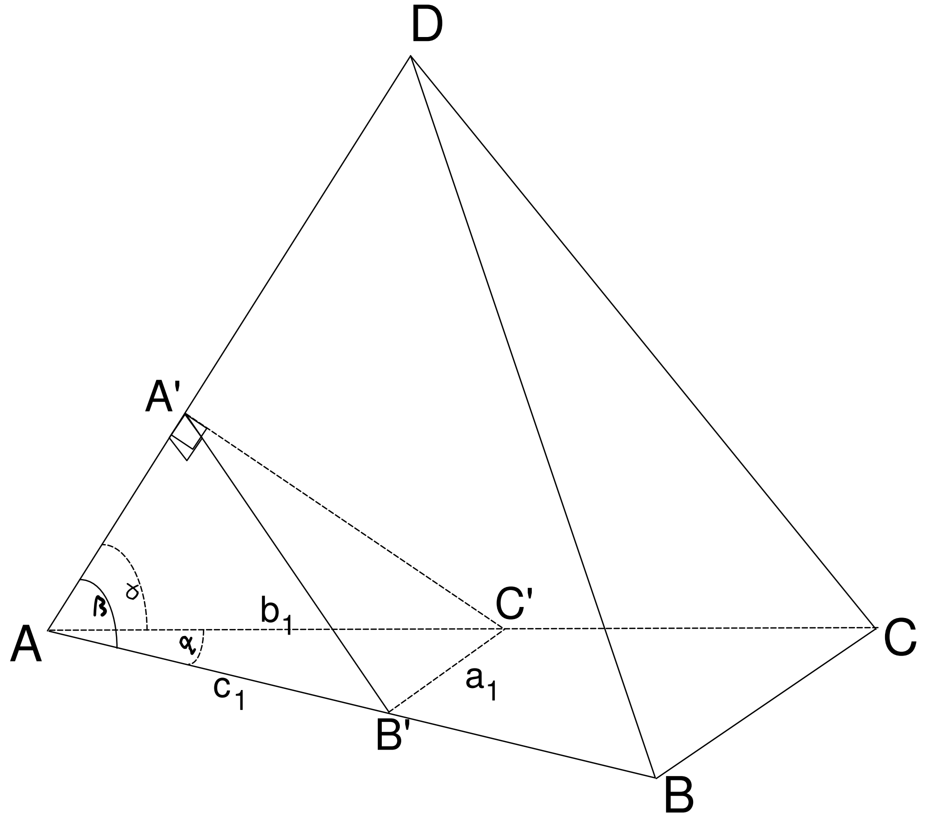
$\circ$ **Calcul de $\sin\theta$**

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta}\ (\theta \text{ angle géométrique inferieur à } \pi \text{ donc } \sin\theta \geq 0) \\ &= \sqrt{1-\left(\tfrac{1}{h}\right)^2} = \sqrt{1+\tfrac{4a_1^2}{2a_1^4+2b_1^4+2c_1^4-\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)^2}}\ [2]\end{aligned}$$

Nous ne connaissons pas a_1, b_1 et c_1, exprimons les donc en fonction des cosinus des angles α, β et γ que nous calculerons ensuite avec la formule d'Al Kashi :

$\circ$ **Expression de $\sin\theta$ en fonction de α, β et γ**

$\diamond$ **Si β et γ sont aigus**



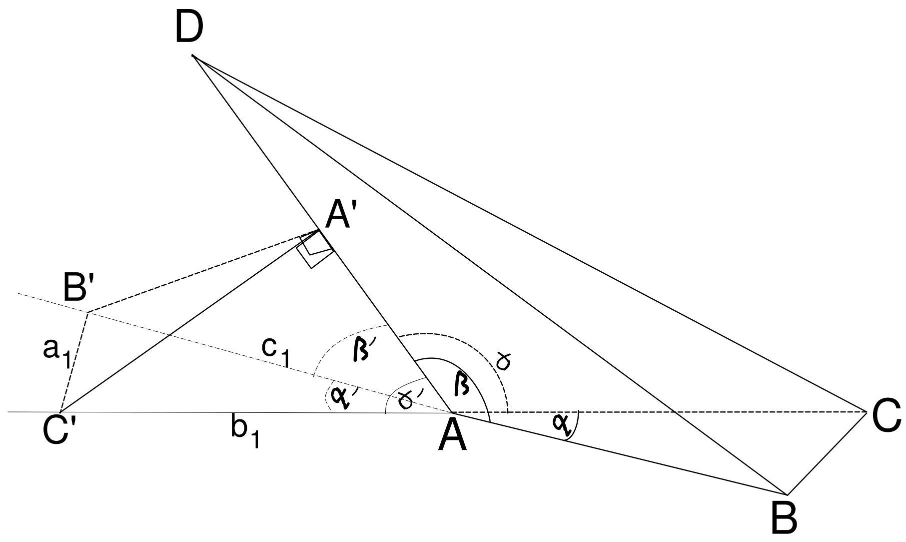
$$\cos\beta = \frac{1}{c_1} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{|\cos\beta|}$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{1}{|\cos\gamma|}$$

D'après la formule d'Al Kashi dans $AB'C'$: $a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos\alpha$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_1 &= \sqrt{\tfrac{1}{\cos^2\beta}+\tfrac{1}{\cos^2\gamma}-\tfrac{2\cos\alpha}{|\cos\beta\cos\gamma|}}(a_1 \text{ est une longueur donc } a_1\geq 0) \\ &= \sqrt{\tfrac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\beta\cos^2\gamma}}(|\cos\beta\cos\gamma| = \cos\beta\cos\gamma \text{ puisque } \cos\beta>0 \text{ et } \cos\gamma>0)\end{aligned}$$

$\diamond$ **Si β et γ sont obtus**

$$\beta+\beta' = \pi \Rightarrow \cos\beta' = -\cos\beta$$
$$\gamma+\gamma' = \pi \Rightarrow \cos\gamma' = -\cos\gamma$$



$$\cos\beta' = \frac{1}{c_1} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\cos\beta'} = \frac{1}{|\cos\beta|}$$

$$\cos\gamma' = \frac{1}{b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{\cos\gamma'} = \frac{1}{|\cos\gamma|}$$

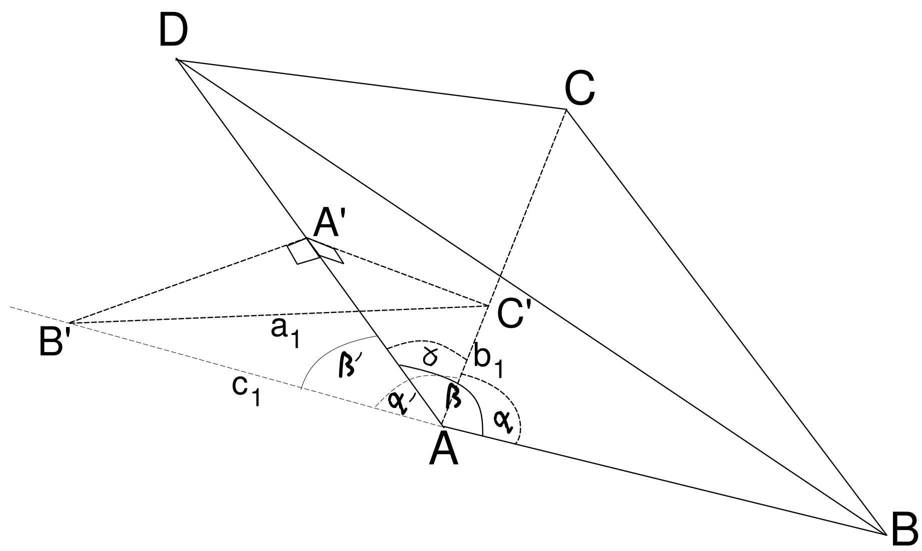
D'après la formule d'Al Kashi dans $AB'C'$: $a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos\alpha$

$\Rightarrow a_1 \quad = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} - \frac{2\cos\alpha}{|\cos\beta\cos\gamma|}}$($a_1$ est une longueur donc $a_1 \geq 0$)

$\qquad = \sqrt{\frac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\beta\cos^2\gamma}}$($|\cos\beta\cos\gamma| = \cos\beta\cos\gamma$ puisque $\cos\beta < 0$ et $\cos\gamma < 0$)

$\diamond$ **Si β est obtu et γ aigu** (c'est la même chose avec γ obtu et β aigu)

$$\alpha + \alpha' = \pi \Rightarrow \cos\alpha' = -\cos\alpha$$
$$\beta + \beta' = \pi \Rightarrow \cos\beta' = -\cos\beta$$



$$\cos\beta' = \frac{1}{c_1} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\cos\beta'} = \frac{1}{|\cos\beta|}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{1}{|\cos\gamma|}$$

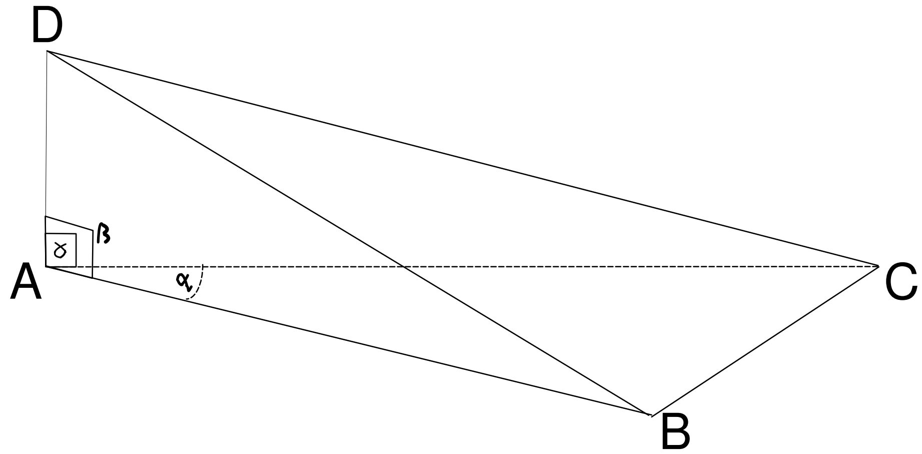
D'après la formule d'Al Kashi dans $AB'C'$: $a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos\alpha'$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_1 &= \sqrt{\tfrac{1}{\cos^2\beta} + \tfrac{1}{\cos^2\gamma} - \tfrac{2\cos\alpha'}{|\cos\beta\cos\gamma|}} (a_1 \text{ est une longueur donc } a_1 \geq 0)\\ &= \sqrt{\tfrac{1}{\cos^2\beta} + \tfrac{1}{\cos^2\gamma} + \tfrac{2\cos\alpha}{|\cos\beta\cos\gamma|}} (\cos\alpha = -\cos\alpha')\\ &= \sqrt{\tfrac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\beta\cos^2\gamma}} (|\cos\beta\cos\gamma| = -\cos\beta\cos\gamma \text{ puisque } \cos\beta < 0 \text{ et } \cos\gamma > 0)\end{aligned}$$

Donc que β et γ soient aigus ou obtus, on a : $a_1 = \sqrt{\frac{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\beta\cos^2\gamma}}$, $b_1 = \frac{1}{|\cos\gamma|}$ et $c_1 = \frac{1}{|\cos\beta|}$.

Donc en remplacant et en simplifiant dans [2] : $\sin\theta = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1}{\cos^2\alpha-1}}$.

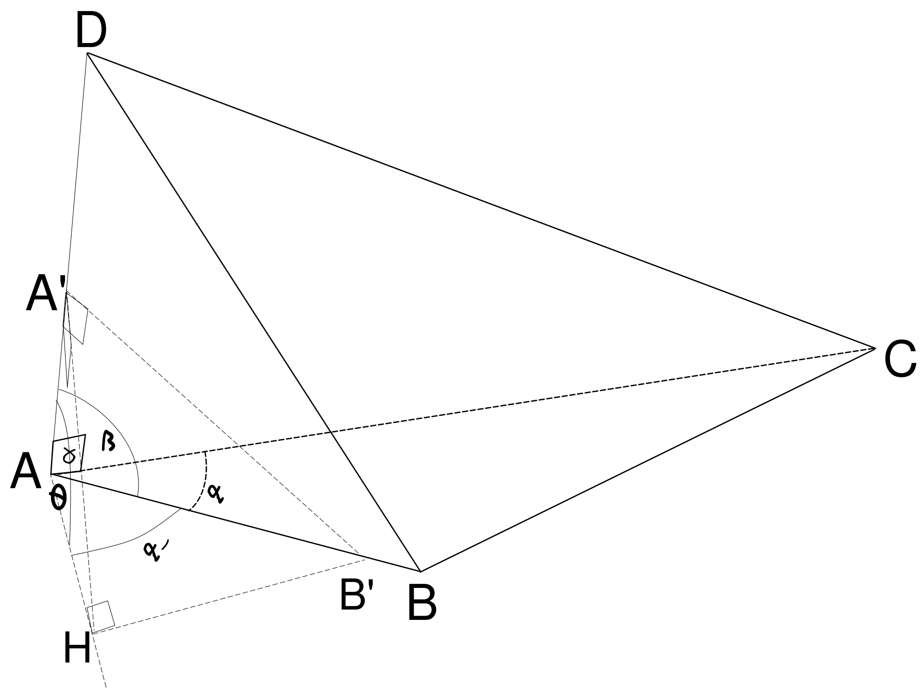
◇ **Cas particulier β et γ droits**



Si β et γ sont droits, B' et C' ne peuvent exister pourtant :

$$\begin{aligned}\sin\theta &= 1 \ (D' = A \Rightarrow \tfrac{DD'}{DA} = 1 \Rightarrow \sin\theta = 1)\\ &= \sqrt{\tfrac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}}\\ &= \sqrt{\tfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1}{\cos^2\alpha-1}} (\beta = \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\beta = 0 \text{ et } \gamma = \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma = 0)\end{aligned}$$

◇ **Cas particulier γ droit** (c'est la même chose avec β droit)



Si γ est droits, C' ne peut exister pourtant :

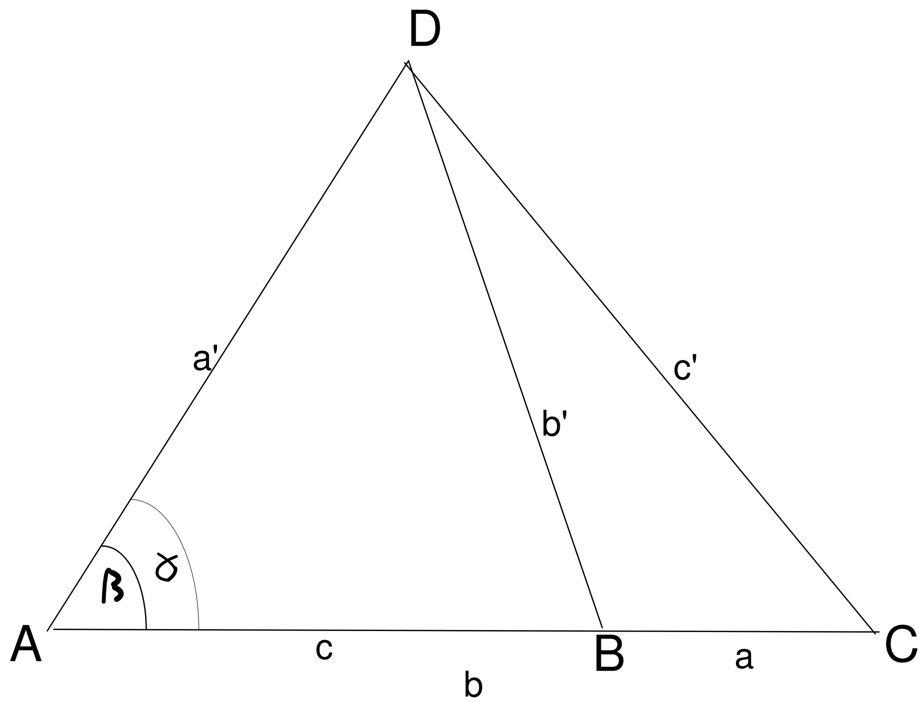
$$|\cos\beta| = \frac{1}{AB'} \Rightarrow AB' = \frac{1}{|\cos\beta|} \qquad |\cos\alpha| = \sin\alpha' = \frac{B'H}{AB'} \Rightarrow B'H = \frac{|\cos\alpha|}{|\cos\beta|}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{AH}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{AB'^2 - B'H^2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\beta+\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}}$$
$$= \sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1}{\cos^2\alpha-1}}\ (\gamma=\tfrac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\gamma=0)$$

- **Calcul du volume**

D'après [1], $V = \frac{a'bc\sin\alpha\sin\theta}{6}$. Ce qui donne en remplaçant $\sin\theta$:
$V = \frac{a'bc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{6}$ [3].

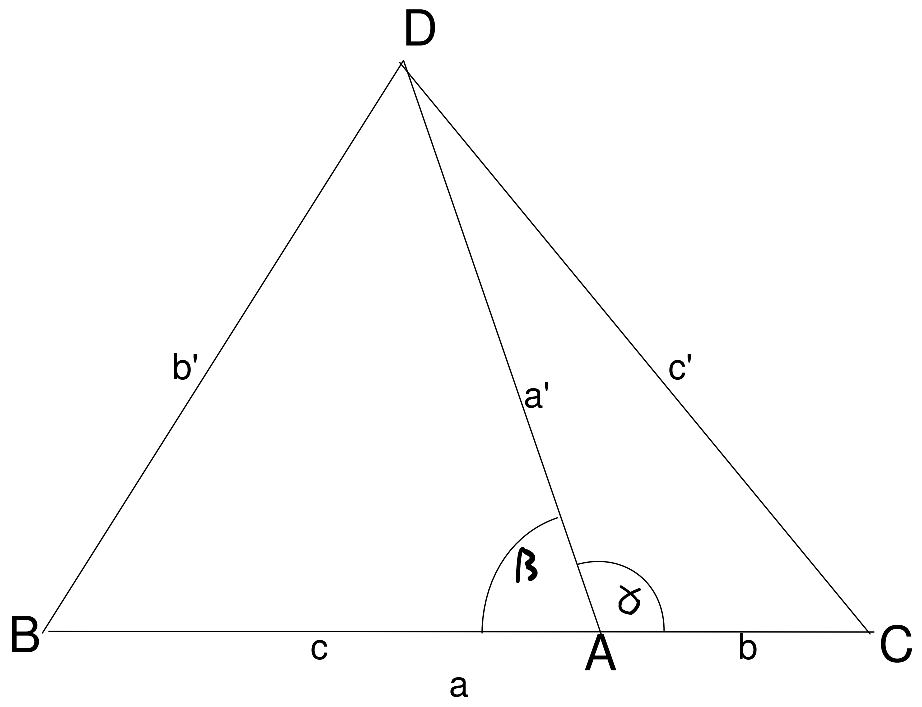
◇ **Cas particulier** $\alpha = 0$



Si α est nul, le plan de base (ABC) n'est pas défini donc D' projeté orthogonal de D sur ce plan n'existe pas donc θ qui est égal à $\widehat{DAD'}$ ne peut exister pourtant :

$$\begin{aligned}
V &= 0 \text{ (l'aire de la base } (ABC) \text{ est nulle donc } V \text{ est nul)}\\
&= \frac{a'bc\sqrt{-2\cos^2\beta+2\cos^2\beta}}{6}\\
&= \frac{a'bc\sqrt{-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\beta\cos\gamma}}{6} (\beta=\gamma)\\
&= \frac{a'bc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{6} (\alpha=0\Rightarrow\cos\alpha=1)
\end{aligned}$$

◇ **Cas particulier** $\alpha = \pi$



Si α est égal à π, le plan de base (ABC) n'est pas défini donc D' projeté orthogonal de D sur ce plan n'existe pas donc θ qui est égal à $\widehat{DAD'}$ ne peut exister pourtant :

$$\begin{aligned}
V &= 0 \text{ (l'aire de la base } (ABC) \text{ est nulle donc } V \text{ est nul)}\\
&= \frac{a'bc\sqrt{-2\cos^2\beta+2\cos^2\beta}}{6}\\
&= \frac{a'bc\sqrt{-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\beta\cos\gamma}}{6}(\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\cos\beta=-\cos\gamma)\\
&= \frac{a'bc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{6}(\alpha=\pi\Rightarrow\cos\alpha=-1)
\end{aligned}$$

Il ne nous reste maintenant plus qu'à exprimer $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ en fonction des longueurs des côtés du tétraèdre pour obtenir V :

◦ **Expression de V en fonction des carrés des longueurs des côtés**

D'après la formule d'Al Kashi : dans ABC : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$

dans ABD : $b'^2 = a'^2 + c^2 - 2a'c\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a'^2-b^2+c^2}{2a'c}$

dans ACD : $c'^2 = a'^2 + b^2 - 2a'b\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a'^2+b^2-c'^2}{2a'b}$

En remplaçant et en simplifiant dans [3] on obtient donc :

$$\begin{aligned}
V^2 = \frac{1}{144}\Big[&a^2a'^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)+b^2b'^2(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2)\\
&+c^2c'^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2)-a^2b^2c^2-a^2b'^2c'^2-b^2a'^2c'^2-c^2a'^2b'^2\Big]
\end{aligned}$$