le volume des pyramides

par Eric Akbaraly et Sayana Pen, du collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93) et du collège André Doucet de Nanterre (92)

enseignants : Martine Brunstein, Danielle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud, Pierre Lévy

chercheur : Jacqueline Zizi

[NDLR : voici le sujet donné aux élèves en début d'année :]

A partir de questions géométriques précises rencontrées en cours, voir quels sont les logiciels qui permettent de voir, de manipuler et de construire dans le plan ou l'espace. Le travail pourrait se faire en plusieurs phases :

1. Première phase :
• Choix des questions mathématiques par une concertation professeur-élèves.
• Etablissement d'une liste de logiciels souhaités par les élèves (et aussi une autre par les enseignants) sans a priori financier et (ou) d'une liste de fonctionnalités désirées. Il serait bien que les demandes soient justifiées avec le plus de précision possible (influence du copain, du père ou de la pub etc.)
• Rédaction d'une lettre de motivation pour obtenir les logiciels en utilisation gratuite et éventuellement le matériel.
• Intervention du chercheur pour les demandes de sponsorisation et de l'enseignant pour les démarches administratives si besoin est.

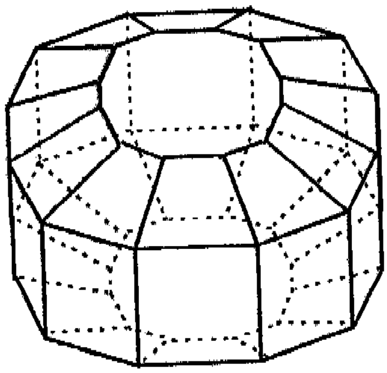
2. Deuxième phase : bilan des retours.

3. Troisième phase : travail effectif des questions avec le matériel et les logiciels qu'il a été possible de récupérer. Noter les points de satisfaction et les problèmes résolus de façon satisfaisante. Faire une liste des critiques et des points souhaités avec autant de précision que possible.

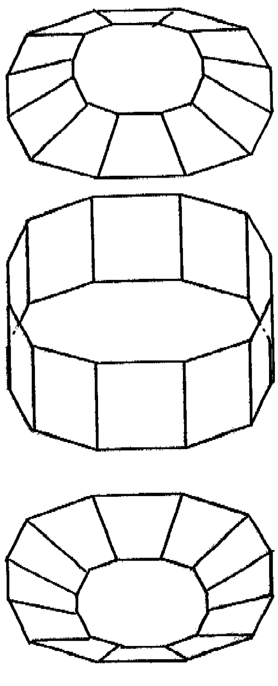
Bien sûr, si des choses sont déjà disponibles dans l'établissement, dès maintenant une équipe peut commencer à travailler. Il serait aussi intéressant d'avoir l'avis des élèves sur l'apport de l'informatique sur l'expérience de l'an dernier et en particulier d'analyser les raisons pour lesquelles ceux qui voulaient le plus faire "de l'ordinateur" ne l'ont pas utilisé finalement et ceux qui a priori n'ont rien demandé ont été amenés à utiliser ou à bénéficier d'apports informatiques et à coder eux-mêmes en Basic les utilitaires dont ils avaient besoin.

L'idée de départ de notre sujet était de trouver des outils qui nous permettraient de voir, de manipuler, de construire, de mesurer dans le plan ou l'espace en s'appuyant sur des problèmes issus de notre scolarité.

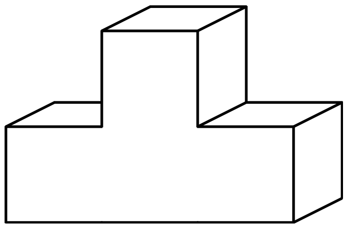
Un thème revient de manière systématique tous les ans dans le programme de mathématiques des collégiens ; il s'agit d'apprendre à calculer des volumes de solides simples : le cube, le pavé, le cylindre, les prismes ... Nous avons décidé alors de calculer des volumes de solides beaucoup plus compliqués tels que celui-ci :



Notre première idée a été de le décomposer en solides de plus en plus simples ; nous espérions ainsi aboutir à des solides dont nous savions calculer le volume.

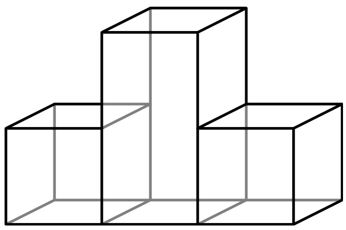


Il est assez naturel de découper ce solide en trois solides dont deux sont identiques. Il s'agit maintenant de continuer la décomposition de chacun d'eux. Cette première expérience nous a montré que vouloir décomposer un solide en solides "élémentaires" est une opération très complexe dans le cas général. En effet, nous n'avons pas réussi à conclure cette première tentative. Or nous voulions établir une méthode générale pour calculer un volume. C’est pourquoi nous avons travaillé sur un solide que l’on a appelé “podium”.

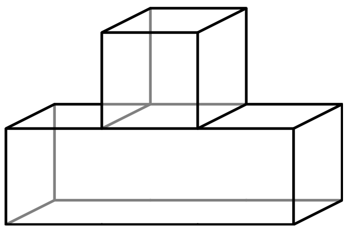


Voilà des décompositions possibles :

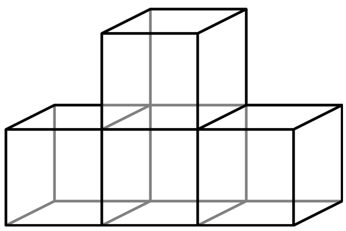
• 1 pavé (petit) et 2 cubes



• 1 pavé (grand) et 1 cube



• 4 cubes



• 12 pyramides … car tout cube se décompose en 3 pyramides identiques.

Chacune de ces décompositions nous permet de calculer le volume du podium ; il faut tout de même connaître le volume d’un cube, d’un pavé, d’une pyramide …

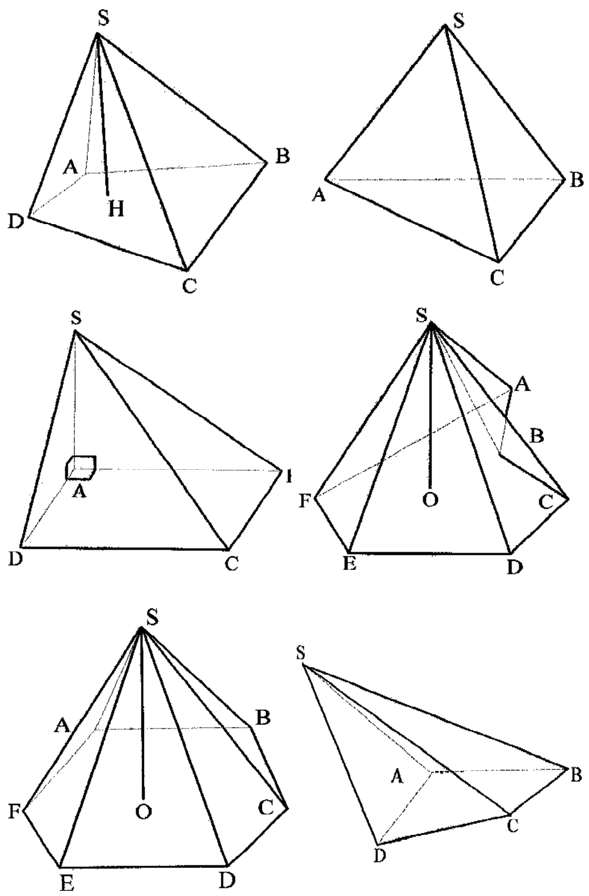
Mais, au fait, …

savez-vous calculer le volume d’une pyramide ?

Vous allez sans doute nous répondre que tout collégien arrivé en troisième est censé connaître par cœur la formule permettant de calculer le volume d’une pyramide.

Mais pourquoi une telle formule existe-t-elle ? C’est ce que nous avons cherché à comprendre.

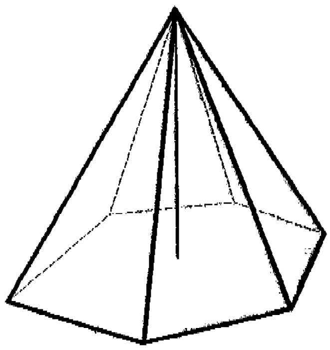
Voici des exemples de pyramides à base convexe et d’autres à base non convexe.



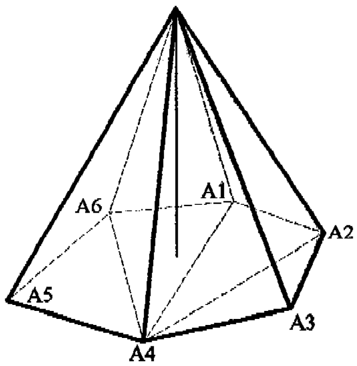
Pour calculer le volume de ces solides, nous avons cherché comment on pouvait les décomposer en solides plus simples.

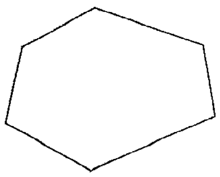
L’idée de base est la suivante : comme il est très facile de découper n’importe quel polygone en triangles, on va utiliser un tel découpage pour décomposer nos pyramides.

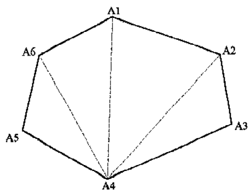
Etudions d'abord le ***cas d'une pyramide à base convexe***.



Il suffit de tracer toutes les diagonales issues d'un sommet et la décomposition est terminée. Dans notre exemple, la pyramide a pour base un hexagone convexe que l'on découpe en 4 triangles.

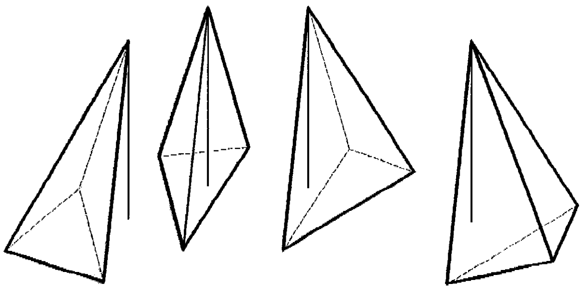






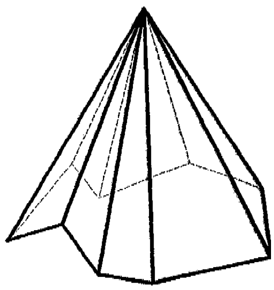
Notre pyramide est ainsi décomposée en 4 tétraèdres :

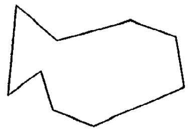
T_1 T_2 T_3 T_4.

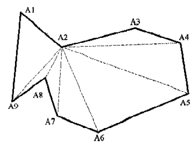


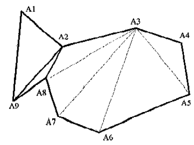
Cas d'une pyramide à base non convexe.

Dans ce cas, nous ne sommes pas sûr de terminer le découpage de la base en une seule étape car certaines diagonales peuvent être à l'extérieur du polygone.



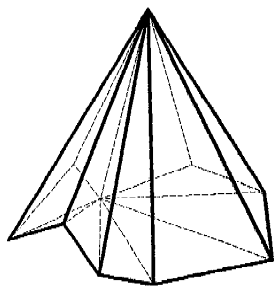


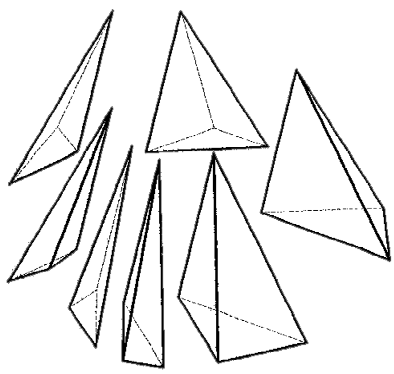




Dans notre exemple, si l'on choisit le sommet A_3, on peut tracer 4 diagonales à l'intérieur ; on obtient 4 triangles et un pentagone. On décompose le pentagone en partant du sommet A_2. Le découpage est fini. On obtient 7 triangles.

Par contre, si nous choisissons le sommet A_2 ou A_8 comme sommet de départ, le découpage est terminé en une étape.





Si l'on doit découper un polygone non convexe, le choix du sommet "de départ" est important si on veut limiter le nombre d'étapes. Notre exemple montre qu'il faut choisir de préférence un sommet rentrant car il a plus de diagonales à l'intérieur.

On a alors deux cas possibles :
• soit le découpage est terminé
• soit on a obtenu des triangles et au moins un polygone.

En faisant de nombreuses manipulations, nous avons remarqué que :

• le nombre de diagonales issues d'un sommet est égal au nombre de sommets du polygone moins trois :

$$D = S - 3$$

• le nombre minimal de triangles obtenus est égal au nombre de sommets moins deux :

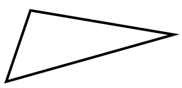
$$T = S - 2$$

Preuve : (on travaille dans des polygones non croisés).

• Une diagonale est un segment joignant deux sommets non consécutifs. Dans un polygone, tout sommet possède deux sommets consécutifs. Le nombre de diagonales issues d'un sommet est donc bien le nombre total de sommets moins trois.

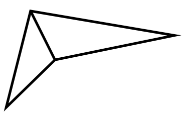
• Soit S le nombre de sommets du polygone. Soit T le nombre minimal de triangles issus de la décomposition. **Démontrons** la formule $T = S - 2$:

Si S = 3, le polygone est un triangle, il est donc inutile de le découper.



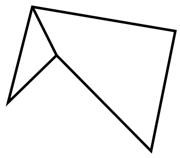
Si $S = 3$, $T = 3 - 2 = 1$

Si S = 4, il est toujours possible de découper un quadrilatère en deux triangles.



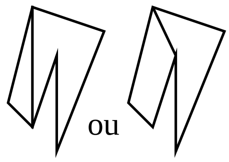
Si $S = 4$, $T = 4 - 2 = 2$

Si S = 5 : dans un pentagone quelconque, il existe toujours au moins un sommet possédant une diagonale à l'intérieur. On peut donc toujours décomposer un pentagone en un triangle et un quadrilatère. La formule est vraie pour les triangles et les quadrilatères, elle est donc vraie pour les pentagones.



Si $S = 5$, $T = 5 - 2 = 3$

Si S = 6 : on procède de la même manière. On décompose l'hexagone en deux polygones (un triangle et un pentagone ou deux quadrilatères). La formule est vraie pour tous ces polygones, elle est donc vraie pour l'hexagone.

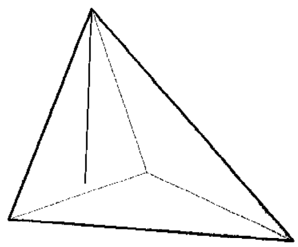


Si $S = 6$, $T = 6 - 2 = 4$

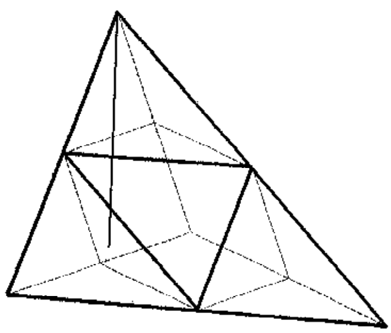
Ainsi de suite …

Pour calculer le volume d'une pyramide, il faut donc savoir calculer le volume d'un tétraèdre. Voici une méthode pour le faire.

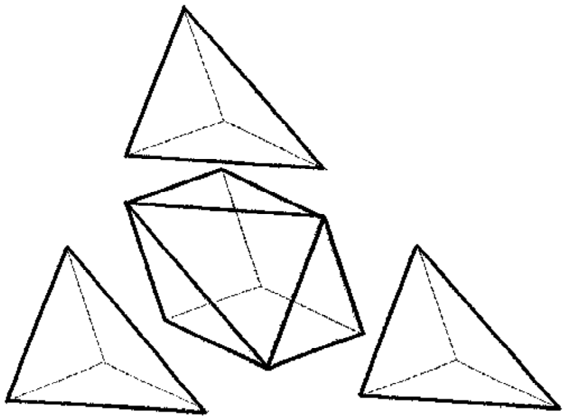
Le volume du tétraèdre



On appelle T son volume. On appelle B l'aire de sa base et h sa hauteur. On le découpe par trois plans parallèles aux faces et passant par le milieu de chaque arête.



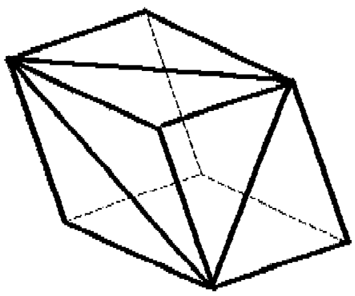
On obtient ainsi 4 solides : 3 petits tétraèdres identiques et un solide. Les petits tétraèdres sont des réductions de moitié du grand tétraèdre.



Soit t le volume d'un petit tétraèdre : nous avons

$$t = \frac{1}{8} T$$

Le solide restant peut être complété en ajoutant un petit tétraèdre identique aux précédents.



On obtient ainsi un pavé, ici non droit, de base b et de hauteur $h/2$. Son volume P est alors : $P = b \times h/2$. On a donc : $T = 3\,t + P - t$, $T = 2\,t + P$, c'est-à-dire :

$$T = 2\left(\frac{1}{8} T\right) + b \times \frac{h}{2} = \frac{1}{4} T + \frac{b \times h}{2}$$

$$T - \frac{1}{4} T = \frac{b \times h}{2}$$

$$\frac{3}{4} T = \frac{b \times h}{2}$$

$$T = \frac{4 \times b \times h}{3 \times 2} = \frac{2 \times b \times h}{3}$$

Or $2 \times b = B$. On obtient donc :

$$T = \frac{B \times h}{3}$$

qui est bien la formule que l'on nous apprend au collège (sans aucune démonstration !).

Le volume de la pyramide

Reprenons l'exemple de la pyramide à base convexe. Nous l'avons découpée en 4 tétraèdres. Soient T_1, T_2, T_3 et T_4 les volumes de ces tétraèdres. Soit V le volume de la pyramide.

On a $V = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$, c'est à dire

$$V = \frac{B_1 \times h}{3} + \frac{B_2 \times h}{3} + \frac{B_3 \times h}{3} + \frac{B_4 \times h}{3}$$

(B_1, B_2, B_3 et B_4 sont les bases respectives des tétraèdres). Donc :

$$V = \frac{\left(B_1 + B_2 + B_3 + B_4\right) \times h}{3}$$

C'est à dire : $V = B \times h / 3$ qui est encore la formule bien connue des tous les collégiens.

Conclusion

Cette méthode de décomposition utilisée est sans doute une méthode très ancienne, mais lorsque nous l'avons reconstituée, elle nous a permis de démontrer d'une manière simple une formule que l'on apprend en 3ème au collège sans aucune démonstration.

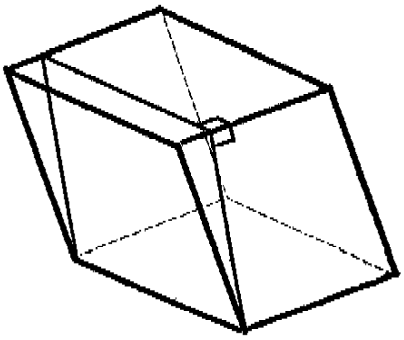
C'est dommage !

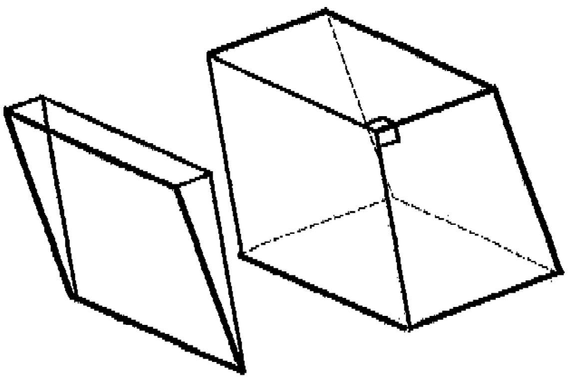
Nous pensons aussi que tout solide dont les faces sont planes peut toujours se décomposer en tétraèdres et qu'il est donc ainsi possible d'en calculer le volume. Mais ceci est une autre aventure car nous n'avons pas eu le temps cette année de vérifier cette conjecture.

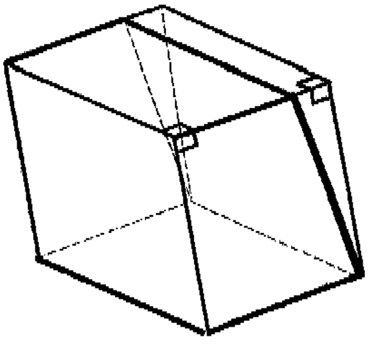
Additif

Pour calculer le volume d'un tétraèdre, nous avons dû calculer le volume d'un prisme. Nous avons supposé que la formule était connue de tous (aire de la base × hauteur). Mais pourquoi est-ce la même formule que pour un pavé droit ? Grâce, une nouvelle fois à notre méthode de décomposition, nous allons vous le prouver.

Observez attentivement les dessins suivants qui montrent comment on peut découper un prisme non droit à base rectangulaire afin de reconstituer un pavé droit.







[NDLR : le « troisième problème de Hilbert » a été posé par celui-ci, lors du Second Congrès International des Mathématiciens, à Paris, en 1900 ; parmi une liste de 20 problèmes considérés par Hilbert comme autant de défis pour les mathématiciens du XX° siècle, le « troisième problème » a un statut à part puisqu'il était déjà résolu … Il s'agissait de l'équivalence par découpage des volumes de deux tétraèdres ayant des bases et des hauteurs égales.

La question est tout de même plus précise : Hilbert voulait trouver « deux tétraèdres de même base et de même hauteur, qui ne se subdivisent d'aucune manière en tétraèdres **superposables**, et qui ne se laissent pas compléter par des tétraèdres **superposables** en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres **superposables** soit possible. »

Source : Pierre Cartier, *Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 37ème année, 1984-85, n° 646, pages 646-01 à 646-28, publié dans *Astérisque* n° 133-134, pp. 261-288, 1986.

Les calculs de volumes par découpages (ou *subdivision*) tels qu'ils sont faits ici, et tels que les faisaient Euclide, ne sont donc pas en contradiction avec l'impossibilité dont Hilbert demandait une démonstration rigoureuse, et qui était déjà connue grâce à Dehn. Dehn a trouvé un *invariant* simple : lors de découpages, l'invariant est … invariant, et on peut sans mal trouver des tétraèdres précis pour lesquels l'invariant de Dehn n'a pas la même valeur, bien que les deux tétraèdres aient le même volume.

Claude Dellacherie nous propose également l'article de Pierre Cartier et les références suivantes :

P. Grandemange et P. Schwartz, *Aspects classiques du troisième problème de Hilbert*, mémoire de licence de l'Université de Strasbourg paru dans la *Gazette des mathématiciens*, n° 52, avril 1992, pp. 73-86.

D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie*, Edition de P. Roussier, Dunod, 1971.

M. Berger, *Géométrie*, tome 3, Cedic/Nathan, 1978.

H. Eves, *A survey of Geometry*, vol. 1, Allyn and Bacon, 1963.]