Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, **autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.**

La valse

Élèves de 4ème :
Ihssene AHMANE, Mathieu DOLFI, Anna-Flora HOMMEL-DUEZ, Julie LECOEUR, Gwendoline MARC, Lucas SIRJEAN.

Établissement
Collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier, 91402 Orsay Cedex.

Enseignants :
FERRY Florence
ASSELAIN-MISSENARD Claudie.

Chercheurs :
AGUILLON Nina et BOCHARD Pierre (Université d'Orsay).

Le sujet :

Un couple de danseurs débutants s'élance sur la piste. Leur chorégraphie est la suivante : ils font un pas en avant, un quart de tour vers la droite deux pas en avant, un quart de tour vers la droite, trois pas en avant, un quart de tour vers la droite, puis de nouveau un pas en avant, un quart de tour, etc...

Que se passe-t-il?

Et pour d'autres chorégraphies éventuellement plus compliquées?

I – Lexique :

Au début de nos recherches, nous avons dansé ; puis nous avons commencé à faire des figures sur des feuilles quadrillées. Nous nous sommes rendu compte que nous avions besoin d'introduire du vocabulaire pour décrire nos danses.

Chaque avancée avant de tourner sera appelée « **étape** ». On notera : « **valse 1-3-5 - 90°** » la valse correspondant à une suite de 1 pas, 3 pas et 5 pas, avec, à chaque étape, un quart de tour à droite.

Enfin, la suite de pas initial (ici 1-3-5), sera appelé « **mouvement** ».

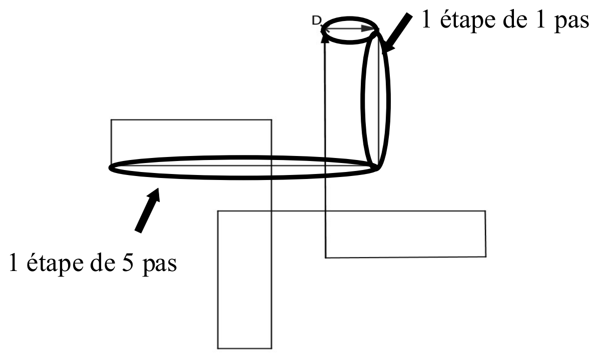


fig1

II – Quart de tour – 90°

1) Mouvements à 1 ou 2 étapes

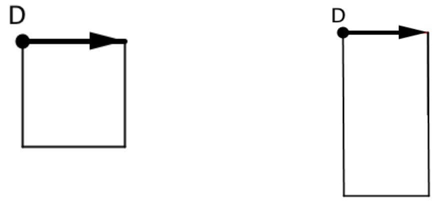


fig2

Quelque soit la longueur des pas, on revient au point de départ avec la même orientation : la boucle est fermée. La valse décrit un carré ou un rectangle ; il faudra 2 ou 4 mouvements pour que la valse revienne au point de départ.

2) Mouvements à 3 étapes

Exemple 1 : valse 1-2-3 – 90°

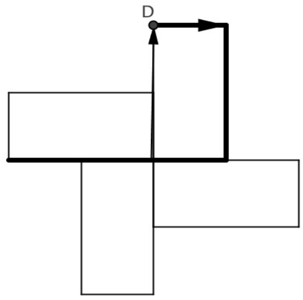


fig3

La boucle semble fermée. La valse revient à son point de départ avec la même orientation et au début de la chorégraphie en 12 étapes (4 mouvements).

Exemple 2 : valse 1-3-5 – 90°

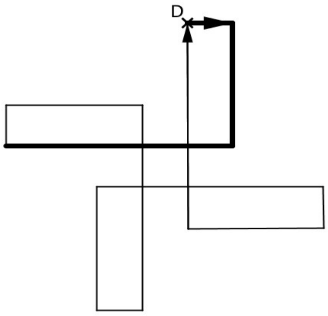


fig4

Exemple 3 : valse 2-5-2 - 90°

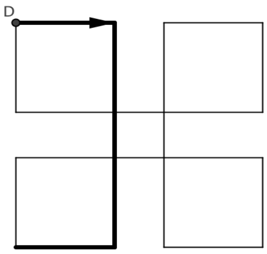


fig5

exemple 4 : valse 5-4-6 – 90°

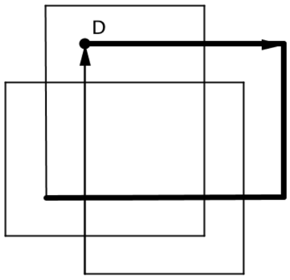


fig6

Après avoir étudié de nombreux exemples, la même conclusion s'imposait : la boucle était fermée en 12 étapes. Nous avons donc cherché à démontrer ce résultat.

Nous avons eu alors l'idée d'introduire un repère.

Démonstration :

Soit *a,b* et *c* trois nombres entiers strictement positifs non tous égaux (si $a = b = c$, la valse décrit un carré comme les mouvements à 1 étape).

Plaçons les points de départ de chaque étape dans un repère. La valse démarre à l'origine du repère.

Visualisation des premières étapes :

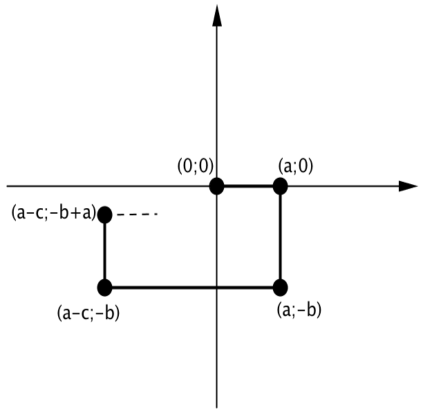


fig7

Voici la suite de points obtenus :

$(0 ; 0) \xrightarrow{+a} (a ; 0)$

$(a ; 0) \xrightarrow{-b} (a ; -b)$

$(a ; -b) \xrightarrow{-c} (a-c ; -b)$

$(a-c ; -b) \xrightarrow{+a} (a-c ; -b+a)$

$(a-c ; -b+a) \xrightarrow{+b} (a-c+b ; -b+a)$

$(a-c+b ; -b+a) \xrightarrow{-c} (a-c+b ; -b+a-c)$

$(a-c+b ; -b+a-c) \xrightarrow{-a} (-c+b ; -b+a-c)$

$(-c+b ; -b+a-c) \xrightarrow{+b} (-c+b ; a-c)$

$(-c+b ; a-c) \xrightarrow{+c} (b ; a-c)$

$(b ; a-c) \xrightarrow{-a} (b ; -c)$

$(b ; -c) \xrightarrow{-b} (0 ; -c)$

$(0 ; -c) \xrightarrow{+c} (0 ; 0)$

Pour avoir une boucle fermée, il nous faut 3 conditions :

- **revenir au point de départ**
- le **nombre d'étapes est un multiple de 4** : $4\times 90° = 360°$, on effectue un tour complet donc on se retrouve avec la même orientation
- le nombre total d'étapes est un multiple du nombre de pas dans un mouvement : quand on repart du point de départ, on est au début de la chorégraphie

Ici, ces 3 conditions sont bien respectées :

- on revient en (0 ; 0)
- 12 étapes au total ⟶ multiple de 4
- 12 est bien multiple de 3.

Conclusion : La valse d'un mouvement à 3 étapes et 90° est fermée en 12 étapes au total (4 mouvements).

Nous avons ensuite cherché à faire varier le nombre d'étapes dans un mouvement.

3) Mouvements à 4 étapes

Exemple 1 : valse 1-2-3-4 – 90°

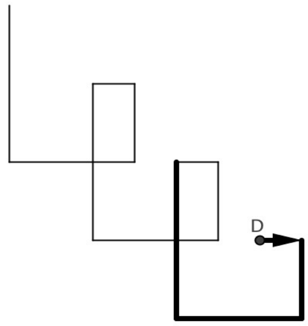


fig8

Exemple 2 : valse 2-4-1-3 – 90°

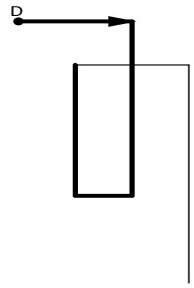


fig9

La valse semble partir à l'infini.

Démonstration :

Soit *a,b,c* et *d* quatre nombres entiers strictement positifs tels que « *a* et *c* » ou « *b* et *d* » sont différents ; si $a = c$ ou $b = d$, la valse décrit un carré ou un rectangle comme les mouvements à 1 ou 2 étapes. Plaçons-nous dans un repère. (1)

$(0 ; 0) \xrightarrow{+a} (a ; 0) \xrightarrow{-b} (a ; -b) \xrightarrow{-c} (a-c ; -b) \xrightarrow{+d} \mathbf{(a-c ; -b+d)}$

$\xrightarrow{+a} (2a-c ; -b+d) \xrightarrow{-b} (2a-c ; -2b+d) \xrightarrow{-c} (2a-2c ; -2b+d) \xrightarrow{+d} \mathbf{(2a-2c ; -2b+2d)}$

$\xrightarrow{+a} (3a-2c ; -2b+2d) \xrightarrow{-b} (3a-2c ; -3b+2d) \xrightarrow{-c} (3a-3c ; -3b+2d) \xrightarrow{+d} \mathbf{(3a-3c ; -3b+3d)}$

Au bout de $4n$ étapes (n entier, $n > 0$), on est sur le point ($n(a-c) ; n(-b ; +d)$).

Puisque $a - c$ et $-b + d$ ne sont pas tous les deux nuls, la valse ne reviendra jamais en (0 ; 0)

Conclusion : La valse avec un mouvement à 4 étapes part vers l'infini.

Nous avons aussi observé que tous les points, départ d'un mouvement, forment des points alignés.

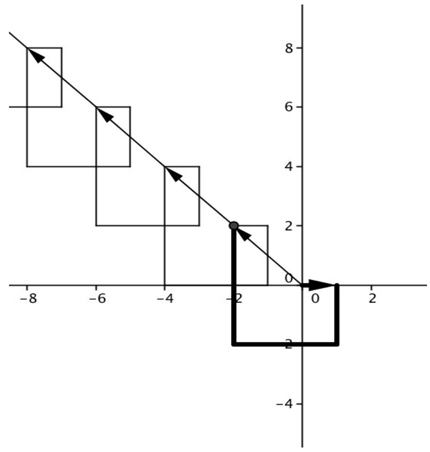


fig10

Démonstration :

O (l'origine du repère) est le début du premier mouvement. On note A, le début du deuxième, B, le début du troisième, et I, le milieu de $[AB]$.

Il faut prouver que I est confondu avec A.

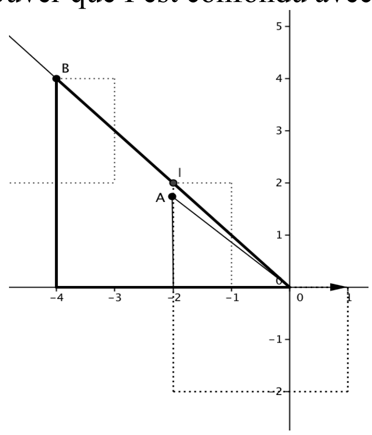


fig11

Dans cette valse $a - b - c - d$, on a :

$A(a-c ; d-b)$, $B(2(a-c) ; 2(d-b))$, $O(0 ; 0)$ et $I\left(\frac{(0+2(a-c))}{2} ; \frac{(0+2(d-b))}{2} \right)$

d'où $I(a-c ; d-b)$. I est bien confondu avec A et O, A et B sont alignés. En généralisant ce raisonnement aux autre points, départs de mouvement, on prouve que tous ces points sont alignés.

4) Mouvements à 5 étapes

Exemple 1 : valse 1-2-3-4-5 – 90°

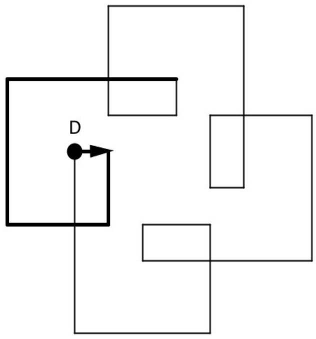


fig12

Exemple 2 : valse 1-5-3-6-2 – 90°

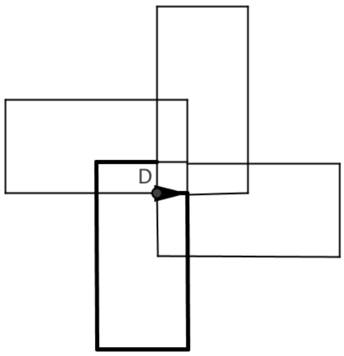


fig13

Conjecture : ces valses à 5 étapes forment des boucles fermées en 20 étapes.

Démonstration :

La démonstration se fait sur le même principe qu'au 3). On part de l'origine d'un repère et on note les pas : a – b – c – d – e (5 nombres entiers positifs). Voici la suite de points que l'on obtient à chaque étape :

$(0\,;0)$
$(a\,;0)$
$(a\,;-b)$
$(a-c\,;-b)$
$(a-c\,;d-b)$
$(a-c+e\,;d-b)$
$(a-c+e\,;d-b-a)$
$(a-c+e-b\,;d-b-a)$
$(a-c+e-b\,;d-b-a+c)$
$(a-c+e-b+d\,;d-b-a+c)$
$(a-c+e-b+d\,;d-b-a+c-e)$
$(-c+e-b+d\,;d-b-a+c-e)$
$(-c+e-b+d\,;d-a+c-e)$
$(e-b+d\,;d-a+c-e)$
$(e-b+d\,;-a+c-e)$
$(-b+d\,;-a+c-e)$
$(-b+d\,;c-e)$
$(d\,;c-e)$
$(d\,;-e)$
$(0\,;-e)$
$(0\,;0)$

Il a fallu 20 étapes pour revenir au point de départ, avec la même orientation et au début de la chorégraphie puisque 20 est un multiple de 4 et de 5.

Théorème : Soit 5 nombres *a, b, c, d et e* entiers strictement positifs. La valse *a-b-c-d-e* et 90° est une boucle fermée.

5) Mouvements à 6 étapes

valse 1-2-3-4-5-6 - 90°

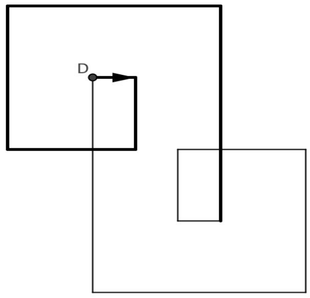


fig14

Cette boucle est fermée en 12 étapes (12 est un multiple de 4 et de 6).

Nous avons traité de multiples exemples en traçant à la main puis avec Géogébra et nous avons pu généraliser nos résultats.

6) Généralisation (2)

1- Pour **4 étapes** (*a, b, c ,d*) avec *a-c* et *b-d* tous deux non nuls : **valse infinie**. **(Si *a*=*c* et *b*=*d* : boucle fermée** en 1 mouvement)

Nombre d'étapes **multiple de 4** : **valse infinie** avec conditions similaires sur la longueur des étapes.

2- Nombre d'étapes **impair** (y) : **boucle fermée** en $4y$ étapes .

3- Nombre d'étapes **pair** (z) non multiple de 4 : **boucle fermée** en $2z$ étapes.

Exemples :

-Valse à 18 étapes : 18 est pair mais non multiple de 4 donc la valse sera fermée en 36 (18×2) étapes.

-Valse à 37 étapes : 37 est impair donc la valse sera fermée en 148 (37×4 étapes.
-Valse à 20 étapes : 20 est multiple de 4 donc la valse part à l'infini.

III - <u>Angles de 135°</u>

Après avoir fini l'étude de 90°, nous avons essayé d'autres angles. Nous avons tout d'abord pensé à 45°. Mais au bout de quelque temps, nous nous sommes aperçus que l'angle avec lequel tournait le danseur était en fait 135° et non 45°. Nous avons donc repris notre étude pour 135°.

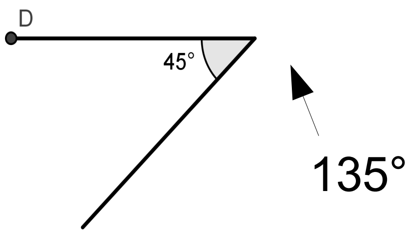


fig15

Valse 1-2-3 - 135°

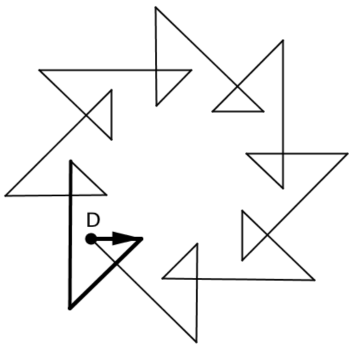


fig16

Retour au même point avec la même orientation en **24** étapes (8 mouvements).
On tourne de 135°, il faudra donc un multiple de 135° qui est aussi multiple de 360° pour se retrouver dans la même position. Le plus petit multiple de 135 et 360 est 1080.
Avec nos conditions vues au II, pour avoir une boucle fermée, il faut :

– un multiple de 8
– un multiple de 3
– retour au point de départ

Ici, ces 3 conditions semblent respectées.
Pour cette valse à 3 étapes, **24** est le premier multiple de 8 et de 3 donc la boucle est fermée en **24** étapes.

Valse 1-2-3-4 - 135°

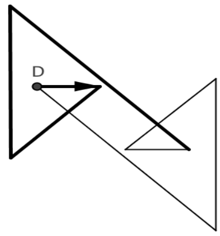


fig17

La boucle semble fermée en 2 mouvements, **8** étapes au total. **8** est le premier multiple de 8 et de 4.

Valse 1-2-3-4-5 – 135°

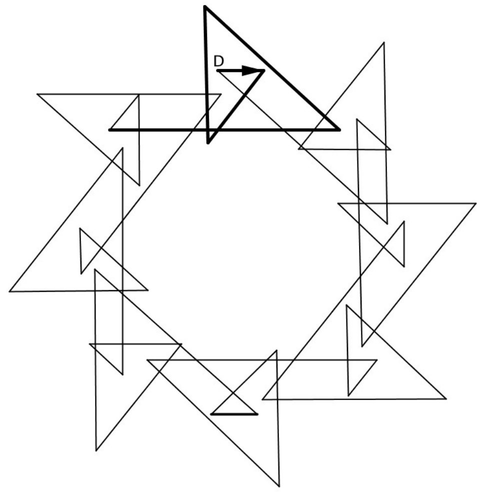


fig18

Valse 2-5-1-4-3 - 135°

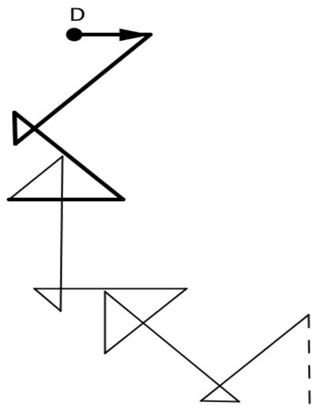


fig19

Pour les 2 exemples précédents, la boucle semble fermée en 8 mouvements, **40** étapes : **40** est le premier multiple de 8 et de 5.

Valse 1-2-3-4-5-6 - 135°

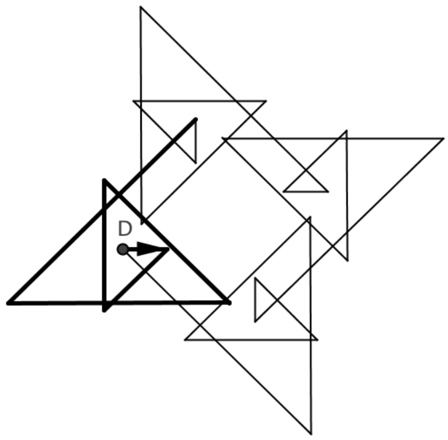


fig20

La boucle semble fermée en 4 mouvements, **24** étapes au total. **24** est le premier multiple de 8 et de 6.

Valse 1-2-3-4-5-6-7-8 - 135°

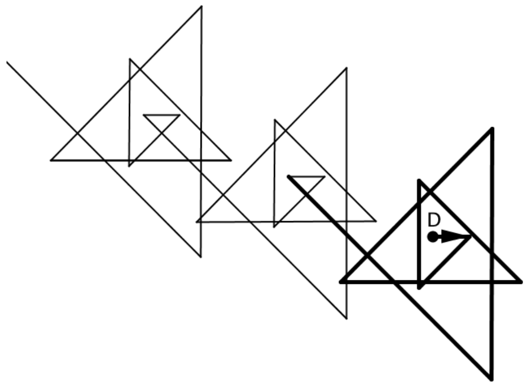


fig21

Cette valse est infinie.

Généralisation – Conjecture pour 135°

- Nombre d'étapes **non multiple de 8** : boucle fermée. Le nombre d'étapes total correspond au premier multiple de 8, qui est aussi multiple du nombre d'étapes au départ.

- Nombre d'étapes multiple de 8 : boucle infinie, (sauf cas très particuliers).

Par exemple, pour une valse à 10 étapes et 135°, la boucle sera fermée. Le nombre total d'étapes est le premier multiple de 10 et de 8 c'est-à-dire 40.

IV – <u>Angle de 120°</u>

Nous avons ensuite essayé pour un angle de 60°, ce qui nous a conduit (comme pour 135°) à étudier un angle de 120°.

Valse 1-2-3 – 120°

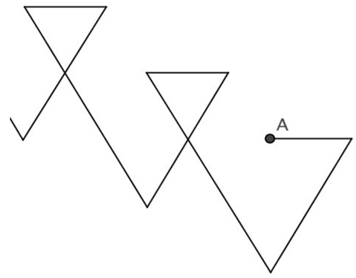


fig22

Valse 1-2-3-4 – 120°

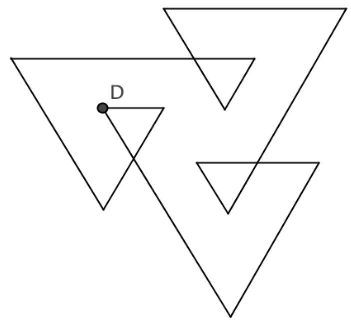


fig23

Valse 1-2-3-4-5 – 120°

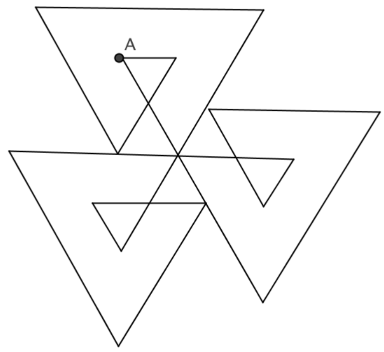


fig24

Valse 1-2-3-4-5-6 – 120°

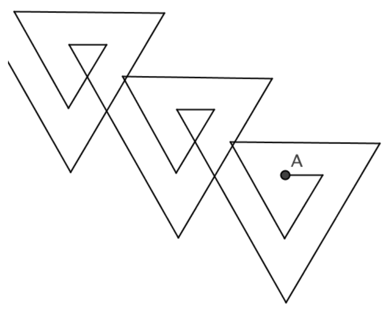


fig25

Pour les exemples des *fig23 et 24*, la boucle semble fermée, pour les deux autres elle part à l'infini.

Généralisation – Conjecture pour 120°

- Nombre d'étapes **non multiple de 3** : boucle fermée. Le nombre d'étapes total correspond au premier multiple de 3, qui est aussi multiple du nombre d'étapes au départ (*fig23* fermée en 12 étapes et *fig24* en 15 étapes).

- Nombre d'étapes multiple de 3 : boucle infinie, (sauf cas très particuliers) : c'est le cas des *fig22* et *25.*

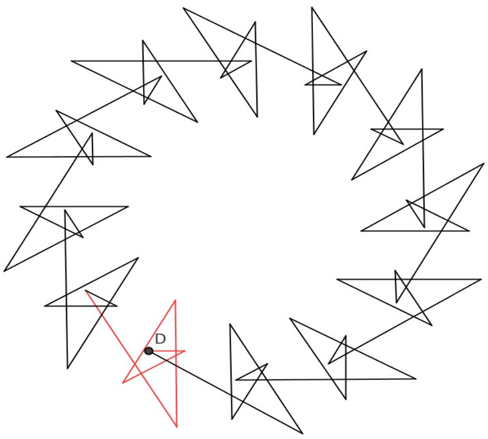
V – <u>Synthèse</u>

Pour un angle x donné, on cherche le premier multiple de *360* qui soit aussi multiple de x ; appelons m le premier entier tel que $x \times m$ est divisible par 360.

Si la valse donnée est à m étapes (ou un multiple de m), elle est infinie. Sinon elle sera fermée et on pourra déterminer en combien d'étapes : c'est le plus petit nombre qui est à la fois divisible par m et par le nombre de pas de départ de la chorégraphie.

Voici quelques exemples pour illustrer notre synthèse :

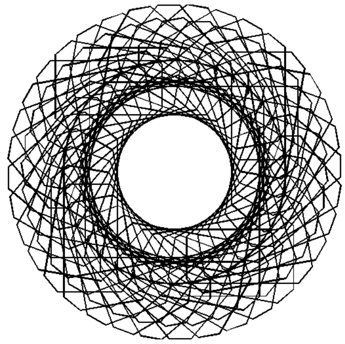
Valse 1-2-3-4-5 – 150°



$150 \times 12 = 5 \times 360$

Le nombre que l'on retient est 12. Le nombre de pas de départ n'est pas un multiple de 12 donc la valse sera fermée : le nombre d'étapes pour revenir au point de départ dans la même orientation sera le premier multiple de 5 et de 12, c'est-à dire : $5 \times 12 = 60$

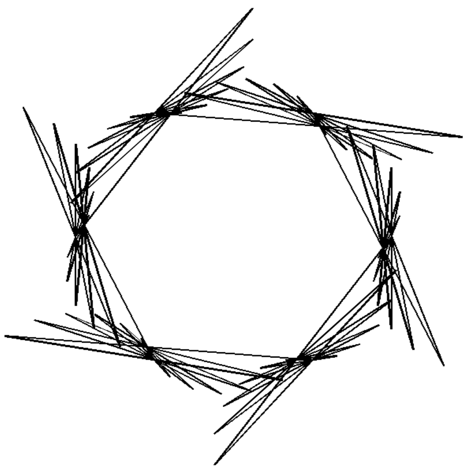
Valse à 11 étapes et 50°



$50 \times 36 = 5 \times 360$

Le nombre que l'on retient est 36. Le nombre de pas de départ n'est pas un multiple de 36 donc la valse sera fermée : le nombre d'étapes pour revenir au point de départ dans la même orientation sera le premier multiple de 11 et de 36, c'est-à dire : $11 \times 36 = 396$

Valse à 12 étapes et 175°



$175 \times 72 = 35 \times 360$

Le nombre que l'on retient est 72. Le nombre de pas de départ n'est pas un multiple de 72 donc la valse sera fermée : le nombre d'étapes pour revenir au point de départ dans la même orientation sera le premier multiple de 12 et de 72, c'est-à dire 72.

Il nous reste maintenant à chercher comment démontrer cette généralisation. On sait que l'on revient avec la même orientation et au début de la chorégraphie, mais il faut encore démontrer que l'on revient au point de départ.

Notes d'édition

(1) Attention, une petite erreur s'est glissée, la valse décrit un rectangle si a=c ET si b=d. Cela est écrit correctement dans tout le reste de l'article.

(2) Ces résultats n'ont pas été démontrés pour plus de cinq étapes, mais les idées développées pour les petits cas peuvent peut-être se généraliser ?