Un peu de combinatoire

Année 2008 – 2009

Jeanne FABRY, Adeline FAURE, Marion FAUVE ,Marie FRESIA, Mathilde GIROUSSE, Sarah LAMALSA, Elise MILLOU, Claire TRICAR, élèves de troisième.

Encadrées par Thomas Garcia et Emanuel Auclair

Établissement : Collège de Fontreyne (Gap)

Chercheurs : Stéphane Labbé (Université J. Fourier, Grenoble) et Pierre Damphousse (Université F. Rabelais, Tours)

Introduction

Pierre Damphousse nous a proposé de réfléchir sur la combinatoire en partant d'un problème simple.

Roméo et Juliette sont amoureux.

I. *Problème du collier*

Roméo veut offrir un collier à Juliette.

a) Roméo a trois perles blanches identiques et quatre perles noires identiques. Combien peut-il faire de modèles de colliers différents ?

b) Roméo a quatre perles blanches et cinq perles noires. Combien peut-il faire de modèles de colliers différents ?

Nous avons répondu à ces deux questions de plusieurs façons, et nous présentons une de nos solutions dans la partie I. Nous avons tenté ensuite de répondre de façon plus générale au « problème du collier » en nous demandant combien on pouvait faire de colliers avec un nombre donné de boules blanches et de boules noires. Nous n'avons pas réussi à trouver une solution complète à ce problème, mais nous présentons une stratégie qui consiste à relier les colliers à une décomposition de nombre(1), ce qui nous donne une méthode de recherche pour répondre au problème.

Nous avons ensuite étudié le problème suivant.

II. *Problème des brochettes*

Roméo veut préparer des brochettes à Juliette.

A) Il a trois cubes d'agneau identiques et quatre morceaux de merguez identiques.

Combien peut-il faire de modèles de brochettes différents ?
B) Il a quatre cubes d'agneau et cinq morceaux de merguez. Combien peut-il faire de modèles de brochettes différents ?

Nous avons également trouvé plusieurs façons de répondre à ce problème, et nous avons réussi à établir un lien avec le problème précédent. Nous présentons notre solution à la question II) A) dans la partie II. Puis nous avons cherché une solution générale au « problème des brochettes ». Nous avons cette fois réussi à en donner une solution complète : si **x** est le nombre de cubes d'agneau, et si **y** est le nombre de morceaux de merguez, on peut obtenir

$$N=\frac{(x+y)!}{x!\,y!}$$

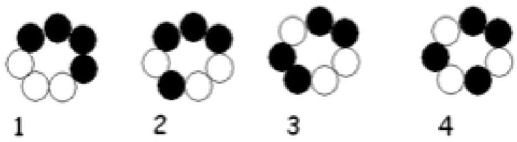
brochettes différentes, où « n! » désigne la factorielle de l'entier n. On trouvera une preuve de cette formule dans la partie II. Nous appliquons ensuite cette formule pour répondre à la question II) B).

Enfin, nous nous sommes intéressées au problème suivant.
III Problème du damier Roméo et Juliette ont un damier 3*3 (9 cases). Roméo doit peindre quatre positions en bleu et Juliette doit peindre cinq positions en rouge. Combien de damiers différents peuvent-ils obtenir ?
Là encore, nous avons trouvé plusieurs approches à ce problème, que nous présentons dans la partie III.

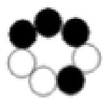
I. Problème du collier

1) Réponse à la question I) a)

Avec quatre perles noires et trois perles blanches, nous avons trouvé **quatre solutions** en utilisant la technique suivante : on a groupé les perles par couleur (**cas 1**) puis on a cherché toutes les solutions avec trois perles noires groupées (**cas 2**), puis celles avec deux perles blanches groupées (**cas 3 et 4**). Il n'y a aucune autre solution que les cas 2 et 4 avec 1 perle noire isolée.



Il y a pour certains cas des colliers symétriques ou retournés : l'exemple 5 représenté ci-dessous correspond au cas 2 que l'on a déjà trouvé, une fois qu'on l'a retourné.



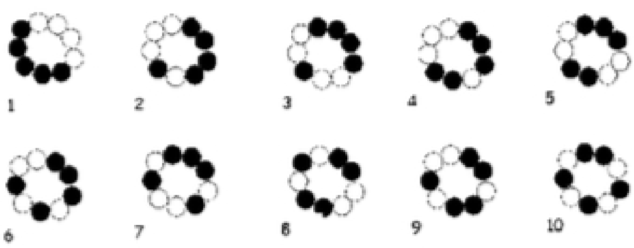
Exemple 5 = Cas 2

2) Réponse à la question I) b)

Avec quatre perles blanches et cinq perles noires, nous avons trouvé **dix solutions**. Nous avons utilisé la même technique que précédemment. Nous obtenons : – un collier avec cinq billes noires groupées (**cas1**)

- – deux colliers avec quatre billes noires groupées (**cas2et3**+un collier symétrique

  au cas 2)
- – deux colliers avec un groupe de 3 billes noires et un groupe de deux billes noires (**cas 4 et 5** + un collier symétrique au cas 4)
- – deux colliers avec trois billes noires etd eux billesi solées (**cas 6 et 7**+un symétrique au cas 6)
- – deux colliers avec deux groupes ded eux, et une bille isolée (**cas 8 et 9**+un symétrique au cas 9)
- – un collier avec un groupe de deux, et trois billes isolées (**cas 10**)



3) Lien avec les décompositions de nombres entiers

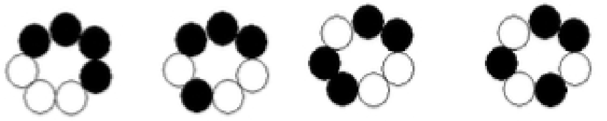
La méthode que l'on a utilisée consiste à compter les colliers suivant les groupements de billes noires (un groupe de 5, un groupe de 4 et une bille isolée, etc). Pour répondre au problème du collier de façon générale, on a ensuite essayé de mettre en relation les nombres de colliers de perles et les décompositions décroissantes de nombres entiers, c'est-à-dire toutes les façons de décomposer un nombre entier en somme de nombres plus petits.

Exemple : **décomposition du nombre 4**

[4] → [3+1] → [2+2] → [2+1+1] → [1+1+1+1] il y a donc 5 décompositions du nombre 4.

Pour chacune de ces décompositions, on peut associer des colliers : si on revient sur l'exemple des colliers avec **quatre billes noires et trois billes blanches,**

- – la décomposition[4]correspond au seul collier avec un groupe de quatre billes noires (cas 1)
- – la décomposition[3+1]correspond au collier avec un groupe de trois noires et une bille noire isolée (cas 2)
- – la décomposition[2+2]correspond au collier avec deux groupes de deux (cas3)
- – la décomposition[2+1+1]correspond au cas 4
- – la décomposition[1+1+1+1]ne correspond à aucun collier.



1 [4]   2 [3+1]   3 [2+2]   4 [2+1+1]

Ceci nous a amené à faire un tableau où l'on résume le nombre de décompositions pour tous les nombres jusqu'à 10.

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Décompositions	*1*	*2*	*3*	*5*	*7*	*11*	*15*	*21*	*28*	*40*

Par exemple, pour le nombre 4, on a trouvé 5 décompositions différentes. Pour le nombre 5, on en a trouvé 7.

On n'a pas trouvé de formule qui nous permette de relier le nombre de colliers de perles au nombre de décompositions de nombres entiers. Par exemple, la décomposition du chiffre 4 ne nous donne pas le nombre de colliers contenant 4 perles noires. Cela dépend aussi du nombre de perles blanches.

Malgré tout, ces décompositions donnent une **méthode** pour classer les colliers en groupant les perles de même couleur de toutes les façons possibles. Par exemple, si on cherche le nombre de colliers avec 3 boules noires et 6 boules blanches, il suffit d'étudier les décompositions du nombre 3. On trouve

[3], [2+1] et [1+1+1].

Il ne nous reste plus qu'à chercher les colliers avec un groupe de 3 boules noires (il n'y en a qu'un seul) ; puis avec un groupe de 2 boules noires et 1 boule noire isolée ; puis avec 3 boules noires isolées.

II. Problème des brochettes

1) Réponse à la question II) A)

On veut trouver combien il existe de brochettes avec **quatre morceaux de merguez et trois morceaux d'agneau.** On montre ici qu'il existe **35 brochettes**

On remarque tout d'abord qu'il y a un lien avec la question I) a), où on cherchait le nombre de colliers avec **quatre boules noires, et trois boules blanches.** Si les boules noires correspondent aux morceaux de merguez, et si les boules blanches correspondent aux morceaux d'agneau, il suffit de couper un collier à un endroit pour obtenir une brochette :

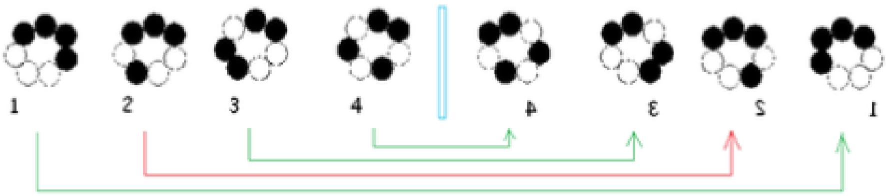
 

On peut ensuite remarquer qu'il est possible de couper le collier en 7 endroits différents, ce qui nous donne jusqu'à 7 brochettes différentes pour un collier. Ainsi, pour le collier 1 (celui représenté sur la photo ci-dessus), on obtient les sept brochettes suivantes (**N** désigne une bille noire, désigne une bille blanche) :

BBBNNNN
NBBBNNN
NNBBBNN
NNNBBBN
NNNNBBB
BNNNNBB
BBNNNNB

De la même façon, avec chacun des trois autres colliers, on obtient 7 brochettes différentes. On obtient dont 4x7=28 brochettes différentes. Cependant, on n'a pas tenu compte des symétries des colliers, et d'autres solutions sont possibles.

Ainsi, on a déjà remarqué dans la partie I que si on retourne un collier, le dessin qu'on obtient peut changer. Cela arrive quand le collier n'a pas d'axe de symétrie. On représente ci-dessous nos quatre colliers et leur symétrique (ce qui revient à les regarder dans un miroir).



On s'aperçoit que trois colliers ont un axe de symétrie (cas 1, 3 et 4), et un collier n'en a pas (cas 2). Lorsqu'on découpe le symétrique du collier 2, on obtient encore 7 brochettes de plus que ce qu'on avait déjà trouvé.

Donc on a obtenu en tout 35 brochettes (28+7). Comme toute brochette doit provenir d'un collier découpé, on n'a pas oublié de brochettes.

Il y a donc 35 brochettes en tout.

2) Formule générale

Rappel : La fonction factorielle est désignée par le symbole « ! » Cette fonction est définie ainsi : Si n est un entier positif, alors

n!=nx(n-1)x(n–2)x(n–3)x...x 1.

Par exemple: si n=5, 5!=5x4x3x2x1=120.
La factorielle de 5 vaut 120.

Dans ce paragraphe, on va montrer que **si on dispose de x perles blanches et de y perles noires (où x et y sont des entiers), alors on peut faire**

$$N=\frac{(x+y)!}{x!\,y!}$$

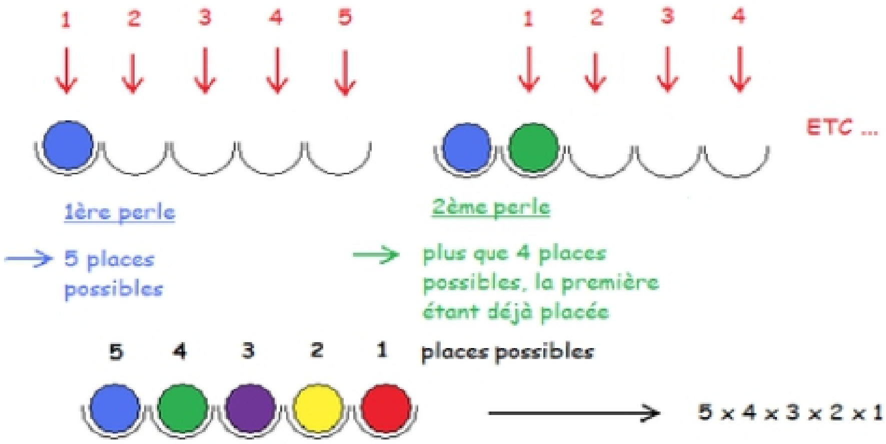
brochettes différentes avec ces perles.

Remarque : $(x+y)$ correspond au nombre total de perles dans la brochette.

a) Résultat intermédiaire

Pour trouver cette formule, on nous a conseillé de commencer par étudier le cas des brochettes avec des perles de couleurs toutes différentes. Par exemple, sur le dessin ci-dessous, on cherche à trouver combien on peut faire de brochettes avec une perle **bleue**, une **verte**, une **violette**, une jaune et une **rouge**, c'est-à-dire avec cinq perles de couleurs différentes.

On s'aperçoit qu'on a 5 places possibles pour la première perle. Une fois qu'elle est placée, il ne reste que 4 possibilités pour le deuxième perle; puis il ne reste que 3 places pour la troisième perle, 2 pour la quatrième, et plus qu'une place disponible pour la cinquième perle.



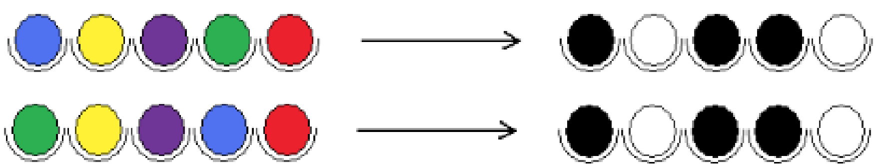
En tout, il y a donc 5 x 4 x 3 x 2 x 1 brochettes différentes, c'est-à-dire 5! brochettes.

De même, on peut montrer qu'**avec n perles de couleurs toutes différentes, on peut réaliser n! brochettes.** En effet, la première perle aura cette fois n places, la deuxième (n-1), etc ... et au bout du compte, on aura

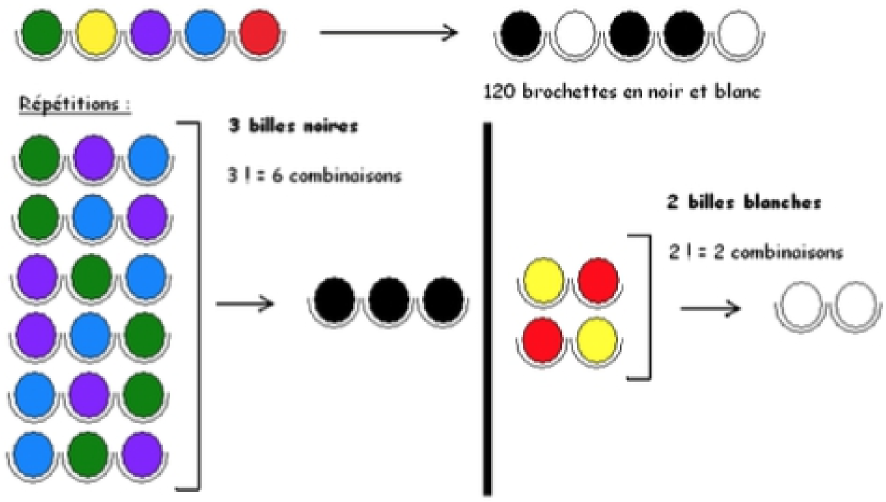
$$n.(n-1).....2.1=n! \quad \text{possibilités.}$$

b) Fin de la preuve

Pour terminer la preuve, nous allons encore commencer par présenter un exemple. Supposons que nous cherchions le nombre de brochettes possibles avec trois perles noires, et deux perles blanches. Pour cela, on va prendre les brochettes que l'on a trouvées juste au-dessus (avec des perles de couleur **bleue**, **verte**, **violette**, **rouge** et jaune). On va ensuite peindre les perles **bleue, verte** et **violette** en **noir,** et peindre les perles **rouge** et jaune en . On obtient ainsi toutes les brochettes avec trois perles noires et deux perles blanches. Mais elles se répètent plusieurs fois. Par exemple, les deux brochettes suivantes donnent la même brochette en noir et blanc, car seules les perles **bleue** et **verte** sont échangées, alors qu'elles sont toutes les deux peintes en **noir**.



On obtient ainsi 120 brochettes en noir et blanc. Il faut maintenant savoir combien de fois chaque brochette se répète. Sur la figure ci-dessous, on voit qu'on peut intervertir les perles bleue, verte et violette sans changer les perles noires, et il y a exactement 6 façons de les intervertir (factorielle de 3). De même, on peut intervertir les perles jaune et rouge sans changer les perles blanches, et il y a cette fois 2 façons de le faire (factorielle de 2).



Chaque brochette en noir et blanc se répète donc 2x6=12 fois. Comme on a 120 brochettes en tout, qui se répètent toutes douze fois, **il y a 120/12=10 brochettes différentes avec trois perles noires et deux perles blanches.**

De même, pour calculer le nombre de brochettes avec **x** perles noires et **y** perles blanches, on commence par calculer le nombre de brochettes avec (x+y) perles de couleurs différentes. D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, on obtient ainsi (x+y)! brochettes différentes. On peint ensuite x perles en noir, et y perles en blanc, en définissant à l'avance les couleurs qui donneront respectivement du blanc et du noir. **On obtient ainsi (x+y)! brochettes en noir et blanc**, avec des répétitions. Il y a x! façons d'intervertir les perles noires, et y! façons d'intervertir les perles blanches. **Chaque brochette se répète donc x!.y! fois.**

Finalement, on trouve $(x+y)!/(x!.y!)$ ***brochettes différentes avec x perles noires et y perles blanches***, comme annoncé en introduction.

3) Application de la formule aux questions II) A) et II) B)

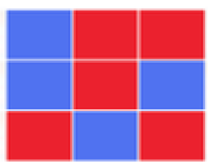
Dans ce paragraphe, on utilise notre formule pour répondre aux questions posées. Par exemple, pour la question II) A), on avait **quatre morceaux de merguez et trois morceaux d'agneau**, ce qui revient à compter les brochettes avec quatre boules noires **(x=4)**, et trois boules blanches **(y=3)**. En particulier, **x+y=7**. Notre formule dit alors qu'il existe 7!/(4! x 3!) brochettes. Or 7!=5040, 4!=24, 3!=6, et 5040/(24 x 6)=35. **On retrouve les 35 brochettes qu'on avait trouvées au a).**

De même, pour la question II) B), on avait **cinq morceaux de merguez et quatre morceaux d'agneau**, ce qui revient à compter les brochettes avec cinq perles noires **(x=5)**, et quatre perles blanches **(y=4)**. Cette fois, **x+y=9**. Donc il existe 9!/(5! x 4!) brochettes, avec 9!=362880, 4!=24, et 5!=120.

Dans ce cas, on obtient donc 362880/(120 x 24)=126 brochettes.

III. Problème des damiers

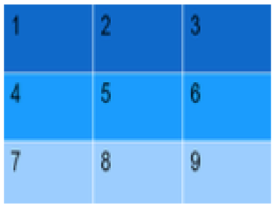
Ici, Roméo et Juliette ont un damier de trois cases sur trois. Roméo doit peindre quatre positions en bleu et Juliette doit peindre cinq positions en rouge. Par exemple, ils peuvent obtenir le damier suivant.



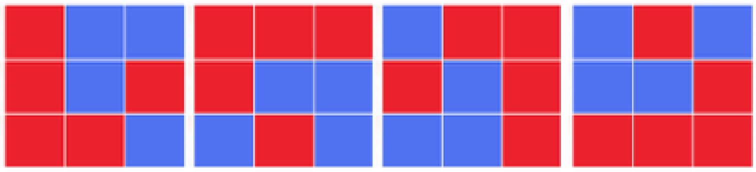
Combien peuvent-ils faire de modèles de damiers bicolores différents?

1) Première méthode : rapport avec les brochettes

On a remarqué que les damiers peuvent être représentés en brochettes :



Pour des brochettes avec 4 morceaux d'une sorte, et 5 d'une autre (question II) B)), on avait trouvé 126 brochettes. Donc, si on transforme ces 126 brochettes en damiers, on obtient 126 damiers. Cependant, on n'aura pas forcément 126 damiers différents : par rotation autour de la case centrale, certains damiers sont identiques. Par exemple, les quatre damiers suivants sont identiques. Il suffit d'en tourner un dans le sens des aiguilles d'une montre pour obtenir le suivant.



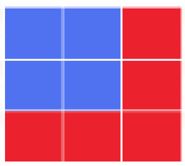
Pour trouver les damiers, on a donc dessiné les 126 damiers qui nous étaient donnés par les brochettes, et on a enlevé ceux qui se répétaient.

A la fin, on a trouvé 34 damiers différents. (on en donne une liste complète au paragraphe suivant).

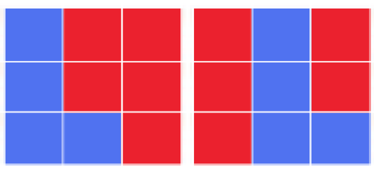
2) Deuxième méthode

Pour trouver tous les damiers différents, on les a regroupés suivant le nombre de cases bleues qui se touchent.

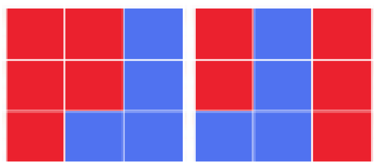
1er étape : 4 cases bleues collées.
On cherche les damiers avec quatre cases bleues collées.
On s'aperçoit que ces cases bleues peuvent faire plusieurs motifs: un carré, un L, un L à l'envers, un Z, un S et un T. Pour être sûres de ne pas en oublier, on regroupe les damiers suivant ce motif, et on fait attention d'avoir toutes les configurations possibles.



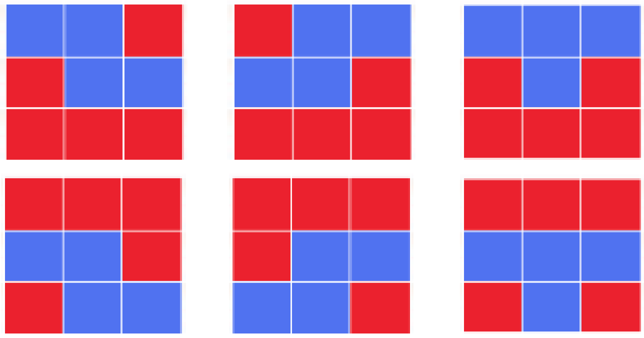
Le motif carré ne se retrouve que dans un seul damier.



Le motif "L" peut se placer de deux façons différentes dans un damier.



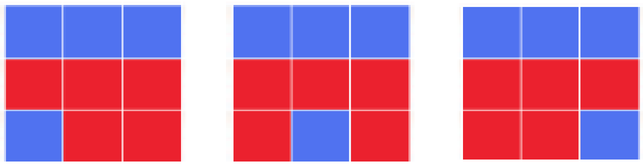
idem pour le motif "L à l'envers"



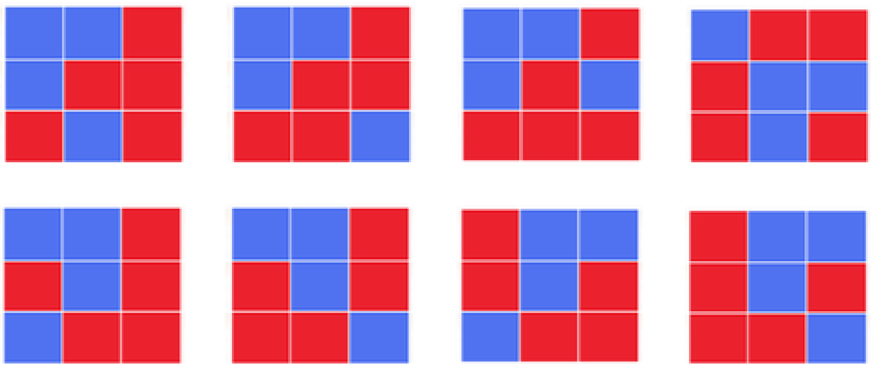
motif "Z" motif "S" motif "T"

Au total, *on trouve donc 11 damiers avec quatre cases bleues collées.*

2ème étape : 3 cases bleues collées.
On cherche ensuite les damiers avec trois cases bleues collées, et une case isolée. Les motifs avec trois cases peuvent être une ligne, ou une ligne brisée.



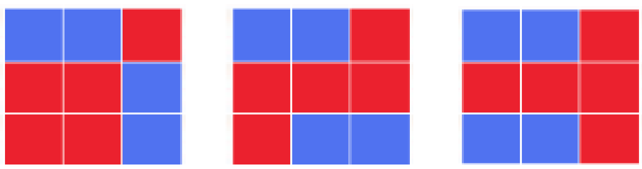
3 damiers possibles avec une ligne



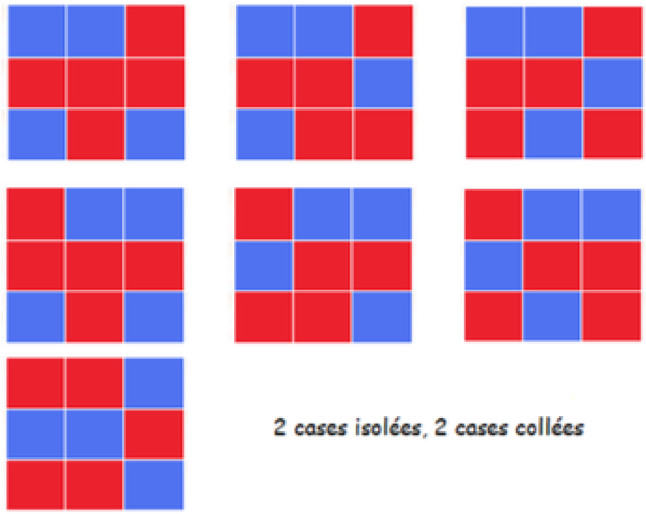
8 damiers possibles avec une ligne brisée

Au total, *on trouve donc 11 damiers avec trois cases bleues collées.*

3ème étape : 2 cases bleues collées.
On a soit deux groupes de 2 cases bleues, soit 2 cases bleues collées et deux isolées.



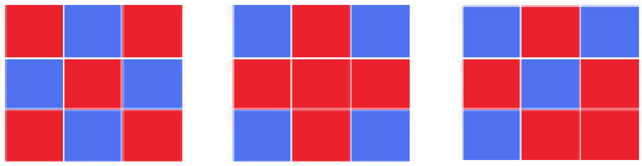
2 groupes de 2 cases collées



Au total, *on trouve donc 10 damiers avec deux cases bleues collées.*

4ème étape : cases bleues isolées.

On trouve 3 damiers avec des cases bleues isolées.



Conclusion.

Roméo et Juliette peuvent faire au total 11+11+10+3=34 modèles de damiers différents. (2)

Notes d'éditions
(1) Les mathématiciens parlent, pour ces décompositions d'un nombre entier, de partition d'un nombre entier
(2) On peut se demander pourquoi on ne considère pas le motif représenté par un T à l'envers : c'est parce que le « T à envers »s'obtient par une rotation autour de la case centrale.