Une suite de chiffres

2017-2018

Nom, prénom et niveaux des élèves : Bernas Raphaël, Coeugnet Benoit et Bensaada Idriss, classe de 2nde

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignant(s) : Didier Missenard, Helène Cochard, Denis Julliot

Chercheur(s) : Romain Deseine

Sommaire

1 Presentation du sujet

On nous a soumis une liste de sujets et parmi ceux-là, un nous a interressé par sa simplicité visuelle mais sa complexité mathématique.
Notre sujet :
Pouvez-vous expliquer pourquoi $\frac{1}{81} = 0,12345679012345679\ldots$?
Nous nous sommes d'abord demandés si cette suite est infinie ?

2 Dans un sens : la division euclidienne

Nous avons voulu montrer avec la division euclidienne que la suite était infinie. On fait la division euclidienne de deux entiers naturels m et n, on va alors avoir possiblement autant de restes, donc d'étapes que de nombres compris entre 0 et n. Donc, on va retrouver un même reste au bout de maximum $n+2$ étape. Donc en principe, si un reste se répète, on sait alors qu'on va retrouver tous les suivants. Ici on prend $n = 81$: on retrouve 19 après 9 étapes.

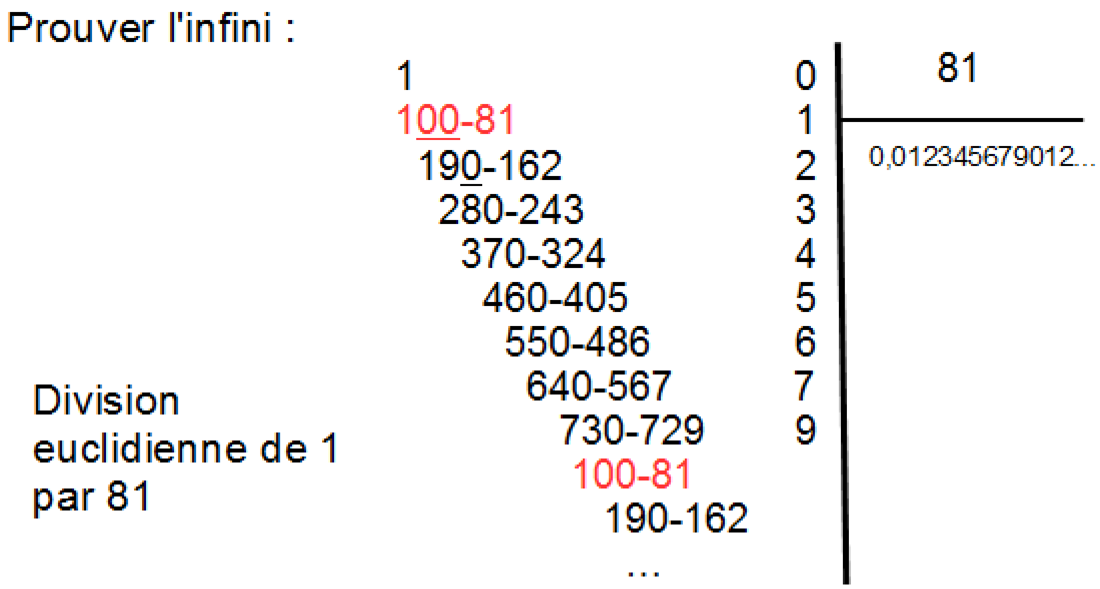

FIGURE 1 – Division Euclidienne

0, 12345679012345679012345679... et cela continue donc infiniment.

3 Dans l'autre sens : créer ses propres suites

Nous avons voulu essayer de résoudre cette équation qui nous avait traversé l'esprit :

$$\frac{1}{81} = 12345679x$$

$$\frac{1}{81} * \frac{1}{12345679} = x$$

$$x = \frac{1}{999999999}$$

On a donc découvert le quotient x présenté ci-dessus et nous avons voulu l'utiliser pour créer nos propres suites.
On a voulu créer la suite 0,121212121212...

$$\frac{1}{999999999} * 12 = 0,0000000012...$$

On observe donc que ce quotient ne nous conduit pas au résultat recherché pour créer nos propres fractions.
Si on prend 12, on compte 2 chiffres, ce qui nous donne la fraction

$$\frac{12}{99} = 0,121212...$$

C'est bien ce que nous cherchions à obtenir.
Nous avons décidé d'inventer un algorithme pour créer ses propres fractions. [1]

— Etape 1 : Choisir un nombre.
— Etape 2 : Compter le nombre de chiffres présent dans votre nombre.
— Etape 3 : Mettre votre nombre sur autant de 9 qu'il y avait de chiffres dans votre nombre.

En généralisant, on peut obtenir la fraction explicite suivante :

$$\frac{10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + ... + a_0}{10^n * 9 + 10^{n-1} * 9 + 10^{n-2} * 9 + ... + 9} = 0, a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0 a_n ...$$

-> Voir "démonstration" partie 4.2

4 Extension du sujet

Nous avons pu faire plusieurs remarques que nous n'avons pas pu démontrer :

— 1ère remarque :
Dans la division 1/81, la différence entre deux restes est de 9. Les restes obtenus sont : 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64 et 73.
C'est à dire que sur tous nos restes obtenus après la division euclidienne, lorsque l'on soustrait le nouveau reste au précédent, on a une différence de 9. On peut donc dire que chaque reste se représente par la formule : $1+9z$. Pourquoi 1 ? Car le premier reste est 1.
— 2ème remarque : [2]
On a $10r = 81q + r'$ alors selon cette remarque :

$$q = \frac{12345679}{999999999} + \frac{1}{9}x$$

Avec x l'étape, r et r' deux restes successifs.

4.1 Observation sur les suites de restes (voir 1ère remarque)

On a voulu montrer que $R_2 - R_1$ soit un nouveau reste à qui on soustrait le précédent = 9 Sauf que dans les équations que l'on a observé R_2 s'exprimait en fonction de R_3, qui lui-même s'exprimait en fonction de R_4 et ainsi de suite. Nous avons donc déduit qu'il s'agissait de la mauvaise voie pour démontrer.
Peut-on vraiment démontrer cette remarque ?
En principe non, car le reste 1 que l'on obtient est précédé par 73, or 1 - 73 n'est pas égal à 9. On observe que la remarque d'origine est faussée, mais on pourrait exploiter une autre remarque se basant sur le fait que $73 + 9 - 81 = 1$, donc on aurait toujours notre +9.

4.2 Explication des raisons d'une suite par des sommes infinies

Pour démontrer la fraction et l'algorithme vus dans la partie 3, nous prenons l'exemple d'un nombre à 3 chiffres : abc. On veut donc montrer que

$$0, abcabc... = \frac{abc}{999}$$

Intéressons-nous dans un premier temps à 0,001001... avec n fois le 1 qui peut s'écrire aussi :

$$\sum_{i=1}^{n} 10^{-3i}$$

$$\begin{aligned} a^{n+1} - 1 &= a^{n+1} - a^n + a^n - a^{n-1} - \ldots - a - 1 \\ &= (a^{n+1} - a^n) + (a^n - a^{n-1}) + \ldots + (a - 1) \\ &= (a–1)(a^n + 1 + a^{n-1} + \ldots + 1) \end{aligned}$$

$$(a^{n+1} - 1)/(a - 1) = a^n + a^{n-1} + \ldots + 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Utilisons notre exemple :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} 10^{-3i} &= \sum_{i=0}^{n} 10^{-3i} - 1\\ &= \frac{10^{-3(n+1)} - 1}{10^{-3} - 1} - 1\\ &= \frac{10^{-3(n+1)} - 1 - (10^{-3} - 1)}{10^{-3} - 1}\\ &= \frac{10^{-3}(10^{-3n} - 1)}{10^{-3} - 1}\\ &= \frac{10^{-3n} - 1}{1 - 10^{3}}\\ &= \frac{1 - 10^{-3n}}{10^{3} - 1}\\ &= \frac{1 - 10^{-3n}}{999}\end{aligned}$$

Si n tend vers l'infini, on a $\frac{1}{999}$
Or nos suites sont infinies, on avait donc : $\sum_{i=1}^{n} 10^{-3i} - > \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-3i}$.
On peut multiplier par abc afin d'obtenir la suite 0, $abcabc$...

On peut donc conclure que la façon de créer une suite est justifiée.

5 Conclusion

On a donc réussi à trouver une façon de créer des fractions et on l'a justifié. On a aussi réussi à valider l'écriture décimale infinie de $\frac{1}{81}$. Mais il est encore possible d'essayer de démontrer les remarques que l'on a faites et il est fort probable que en démontrant ces remarques, on puisse trouver la liaison entre 9 et l'entièreté du sujet.

6 Notes d'édition

[1] Plus qu'un algorithme, c'est une énoncé qu'expriment les auteurs : Un nombre réel qui s'écrit par un développement infini périodique $0, a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \ldots$ peut être réalisé comme une fraction de deux entiers : $\dfrac{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}{99 \ldots 9}$ $(n+1$ chifres 9).
Ce résultat sera prouvé en 4.2 dans un cas particulier.

[2] Le relecteur confesse ne pas avoir compris cette remarque.