Une drôle de salle de bain

Année 2016 - 2017

Élèves de 4ème et 3ème : Idriss BENSAADA ; Benoît COEUGNET ; François DESLANDES ;
Océane DU LAURENT DE LA BARRE.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY et Claudie ASSELAIN.
Chercheur : Maxime INGREMEAU.

Le sujet :
Mr Exigeant a décidé de mettre du carrelage par terre dans sa salle de bain carrée ; mais il a néanmoins quelques contraintes :
- le long de chaque colonne et de chaque ligne, une couleur ne peut apparaître qu'une seule fois.

- les coins de chaque carré formé à l'intérieur de la salle de bain (quel que soit sa taille) sont soit tous de couleurs différentes soit de deux couleurs différentes.

Combien de couleurs différentes au minimum lui faudra-t-il pour carreler sa salle de bain ?

I – Quelques exemples

Dans la suite de cet article, on dira que le carrelage est « juste » si les règles sont respectées ; dans le cas contraire, il sera dit « faux ». Nous remplacerons aussi les couleurs par des nombres ; un même nombre représentera une même couleur. Enfin, on appellera un carré *n*x*n,* un carré possédant *n* carreaux sur une ligne (ou colonne).

1	2	3
2	1	4
3	4	1

Voici un carrelage juste avec 4 couleurs. Chaque colonne ou ligne contient bien des nombres différents et chaque carré formé a ses coins possédant 2 ou 4 nombres différents.

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2

Voici un carrelage faux utilisant 6 couleurs. Par exemple, les coins du carré encadré comportent 3 nombres différents.

Remarque : le nombre minimum de couleurs à utiliser est relié au nombre n de carreaux sur une ligne ou une colonne qui doit être composée de couleurs toutes différentes. Si le carré possède nxn carreaux, il faut au minimum n couleurs ; le maximum de couleurs correspond au nombre de carreaux sur la totalité du carré : $n \times n$.

II – Nombre de tests à effectuer

Après plusieurs exemples effectués nous nous sommes rendus compte que, pour des grands carrés, il était long de vérifier s'il était « juste ». Pour être sûrs de vérifier tous les carrés qui composent le carrelage, on a calculé le nombre de tests qu'il fallait faire pour un carré $n \times n$.

Pour un carrelage 2×2 : 1 carré à tester

Pour un carrelage 3×3 : 1 carré 3×3 et 4 carrés 2×2 à tester, donc au total 5 carrés à tester.

Pour un carrelage 4×4 : 1 carré 4×4 , 4 carrés 3×3 et 9 carrés 2×2 à tester, donc au total 14 carrés à tester.

Pour un carrelage 5×5 : 1 carré 5×5 , 4 carrés 4×4 , 9 carrés 3×3 et 16 carrés 2×2 à tester, donc au total 30 carrés à tester.

Généralisation : pour un carrelage de $n \times n$ carreaux, on aura :
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2$ tests à faire.

Le nombre de tests devient rapidement important.

Pour un carrelage 6×6 : 55 carrés à tester.

Pour un carrelage 7×7 : 91 carrés à tester.

Pour un carrelage 10×10 : 285 carrés à tester.

Nous recherchons maintenant des méthodes pour construire des carrelages justes avec un minimum de couleurs. Nous avons trouvé deux méthodes : par juxtaposition et par décalage.

III – Méthode par juxtaposition

Cette méthode consiste à poser des carrés justes les uns à côté des autres, soit en gardant le même positionnement des nombres, soit en les inversant.

1) Juxtapositions de carrés 2×2

On part d'un carré 2×2 juste : il n'y a qu'une seule possibilité.

1	2
2	1

On le duplique pour avoir un 4×4 .
On obtient un nouveau carré juste.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

ou

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2

Nous pouvons renouveler l'opération indéfiniment.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
4	3	2	1	7	8	5	6
3	4	1	2	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	4	3	2	1
8	7	6	5	3	4	1	2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
4	3	2	1	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14
3	4	1	2	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13
5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12
6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11
7	8	5	6	4	3	2	1	15	16	13	14	11	12	9	10
8	7	6	5	3	4	1	2	16	15	14	13	12	11	10	9
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7
11	12	9	10	15	16	13	14	4	3	2	1	7	8	5	6
12	11	10	9	16	15	14	13	3	4	1	2	8	7	6	5
13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4
14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3
15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	4	3	2	1
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	3	4	1	2

Nous pensons pouvoir ainsi construire tous les carrelages $2^n \times 2^n$ avec 2^n couleurs ce qui est le minimum possible.

Nous avons ensuite essayé de juxtaposer de plusieurs façons des carrelages justes 2×2 pour former un 6×6 mais nous n'avons pas trouvé de carrelage juste. En voici un exemple où les coins du carré encadré sont 3 nombres différents :

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
5	6	1	2	3	4
6	5	2	1	4	3
3	4	5	6	1	2
4	3	6	5	2	1

Pour le 6×6 nous n'avons pas réussi à le faire en moins de 7 couleurs. Le voici :

1	2	3	4	5	6
5	6	7	1	2	3
2	3	4	5	6	7
6	7	1	2	3	4
3	4	5	6	7	1
7	1	2	3	4	5

Nous avons ensuite essayé de juxtaposer d'autres carrelages que des 2×2 .

2) Juxtapositions de carrés 3×3

Le carré 3×3 ne peut pas se faire en 3 couleurs. Démontrons-le.

Etape 1 : on remplit la première ligne avec 3 couleurs	Etape 2 : 2 cas possibles pour la place du 1 sur la		Etape 3 : On remplit la deuxième et la	

<table>
<tr><td>différentes.</td><td>ligne 2.</td><td></td><td>troisième ligne sans avoir le choix.</td><td></td></tr>
<tr>
<td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

Aucun cas ne donne un carré juste.
Il nous faut minimum 4 couleurs pour faire un carrelage 3×3 juste ; nous avons un exemple dans le I.
En juxtaposant des carrelages 3×3 justes nous ne sommes pas arrivés à en trouver des justes.

3) Juxtapositions de carrés 5×5

Pour le 5×5 nous avons réussi à le faire en 5 couleurs, ce qui est le minimum, ainsi que le 10×10 en 10 couleurs, le 20×20 en 20 couleurs et le 25×25 en 25 couleurs, par juxtaposition de carrés 5×5 justes en procédant de même que le 2×2 . Nous pensons que cette méthode peut nous faire construire des $5^n\times5^n$ en 5^n couleurs minimum ; par contre nous ne sommes pas arrivés à former le 15×15 Voici un exemple :

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	1	2	3	9	10	6	7	8
2	3	4	5	1	7	8	9	10	6
5	1	2	3	4	10	6	7	8	9
3	4	5	1	2	8	9	10	6	7
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
9	10	6	7	8	4	5	1	2	3
7	8	9	10	6	2	3	4	5	1
10	6	7	8	9	5	1	2	3	4
8	9	10	6	7	3	4	5	1	2

10 couleurs minimum pour le 10×10

Après de nombreux essais, nous pensons que si on peut construire un carré $n\times n$ en n couleurs et un carré $m\times m$ en m couleurs alors on pourra fabriquer un carré $nm\times nm$ en nm couleurs ; nous n'avons pas réussi à le démontrer.
Voici aussi d'autres conjectures :
- les carrés $5^n\times5^n$ ainsi que les $5\times2^n\times5\times2^n$ se font en un minimum de couleurs par juxtapositions.
- Pour n premier sauf 3 : le carré $n\times n$ se fait en n couleurs minimum, $n^k\times n^k$ se fait en n^k couleurs minimum par juxtaposition de carrés $n\times n$ ainsi que les carrés $n\times2^k\times n\times2^k$ qui se font en $n\times2^k$ couleurs minimum.

III – Méthode par décalage

Nous avons réussi à obtenir des carrés avec un minimum de couleurs, simplement en décalant les couleurs de la première ligne pour obtenir les lignes suivantes.
Voici un exemple :

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

On commence par remplir la première ligne avec les 5 nombres différents, puis on décale le 1 de deux cases vers la droite et on descend d'une ligne. On complète la suite de nombres sur la deuxième ligne ; ainsi tous les nombres de la première ligne sont décalés de 2 rangs vers la droite pour obtenir la deuxième ligne ; on continue à décaler le 1 de deux cases et on complète la ligne suivante et ainsi de suite jusqu'à ce que le carrelage soit fini.
Nous obtenons ici un carrelage juste.

Etudions maintenant différents décalages.

1) Diviseurs
Tout d'abord, le décalage avec un diviseur du nombre *n* de carreaux sur un côté donne un carrelage faux. En effet, le 1 se retrouvera sur une certaine ligne dans sa colonne de la ligne de départ.
Exemple : On prend un carrelage 9×9 et on essaie de décaler de 3 rangs.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9	1	2	3

Le 1 de la première ligne est revenu à sa position initiale 3 lignes plus loin.

2) Décalage de 1 ou – 1
Les carrelages formés avec un décalage de 1 ou de – 1 donneront un carrelage faux car les coins en haut à gauche et en bas à droite seront de la même couleur alors que les deux autres coins seront de couleurs différentes (excepté le 2×2) :

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Après avoir fait beaucoup de tests, nous avons remarqué que pour les carrelages avec un nombre de carreaux *n* impair, le décalage de 2 permettait toujours d'obtenir un carrelage juste en *n* couleurs sauf pour les carrelages où n est multiple de 3, ils ne sont pas réalisables en n couleurs par une méthode de décalage.
3) Nous avons fait une démonstration pour le 5×5 avec un décalage de 2.

1	2	3	4	5	1
4	5	1	2	3	2
2	3	4	5	1	3

On numérote les lignes

5	1	2	3	4	4
3	4	5	1	2	

1 2 3 4 5 ⟸ On numérote les colonnes

Contrainte sur les lignes :
Chaque couleur est représentée sur la ligne 1 ; on décale les couleurs de 2 colonnes à chaque ligne, il y a toujours les 5 couleurs différentes sur chaque ligne.

Contrainte sur les colonnes :
Prenons par exemple le 1, il se trouve dans la première colonne en décalant la suite, le 1 va se retrouver dans la 3 colonne, puis dans la 5, la 2, et la 4.
Avec un schéma :
colonne 1 → colonne 3 → colonne 5 → colonne 2 → colonne 4

On se rend compte que peut importe la couleur que l'on prend sur la première ligne, en décalant de 2 à chaque fois, il n'y aura jamais deux couleurs identiques dans une même colonne.

La première contrainte est respectée, il faut maintenant regarder les coins des carrés.
Carrés 2×2 : Les coins opposés de ces carrés n'ont un décalage que de 1 colonne ; or, on décale de 2 donc les coins de ces carrés sont tous de couleurs différentes.
Carrés 3×3 : Les coins opposés de ces carrés n'ont un décalage que de 2 colonnes, le bas du carré se trouve 3 lignes plus bas que le haut donc il faut décaler de 4 colonnes. Les coins seront donc tous différents.
Carrés 4×4 : Les coins opposés de ces carrés n'ont un décalage que de 3 colonnes, le bas du carré se trouve 4 lignes plus bas que le haut donc il faut décaler de 6 colonnes c'est à dire de 1. Les coins seront donc tous différents.
Il reste les 4 coins du grand carré à vérifier : ils sont également tous différents.
Toutes les contraintes sont respectées donc notre décalage de 2 sur le carrelage 5×5 nous donne un carrelage juste avec un minimum de couleurs.

4) Carrelage $n\times n$ avec n pair
Nous pensions que le décalage serait possible aussi avec un nombre pair de carreaux sur une ligne mais nous n'en avons réussi aucun.

5) Autres résultats et conjectures

Pour les carrelages de 9×9 aucun décalage inférieur à 9 ne donne de solution même si le décalage n'est pas un diviseur de 9.

Voici un tableau récapitulatif de nos essais avec décalages. Lorsque le décalage donne un carrelage juste, on met « oui », sinon on met « non ».

Décalage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3×3	Non	Non	x	x	x	x	x	x	x	x	x

5×5	Non	**Oui**	**Oui**	Non	x	x	x	x	x	x	x
7×7	Non	**Oui**	**Oui**	**Oui**	Non	Non	x	x	x	x	x
9×9	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	x	x	x
11×11	Non	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**	Non	x

Il semble que les multiples de 3 ne soient pas faisables par décalage. Un résultat est surprenant c'est le « non » pour le décalage de 5 du 7×7 .

Conclusion
Nous avons suivi deux pistes : celles des juxtapositions et celles du décalage. Elles nous ont fourni quelques résultats (nous pouvons carreler la salle de bains de M. Exigeant dans beaucoup de cas) mais aussi beaucoup de conjectures, sur lesquelles il nous faudrait travailler encore : le sujet est riche !