Un problème de billard

DELAËT Alain, GARRIGUES Adrien,
PICHON Eric, THOMAS Jean

Collège Alain Fournier à Orsay
Enseignants : Mme FERRY et M. FOURNIER
Chercheur : Aurélien POIRET.

Sujet

On considère un billard rectangulaire et une boule lancée à une certaine vitesse selon un angle donné. On néglige les frottements. Que peut-on dire de la trajectoire de la boule ? Que se passe-t-il si le billard est triangulaire ?

Mots-clés

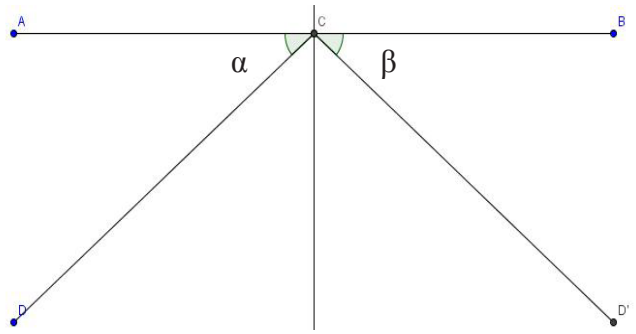
BILLARD, RECTANGULAIRE, ANGLE, PARALLÈLE, PARCOURS FERMÉ, QUADRILLAGE, TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Notre équipe a décidé d'étudier ce sujet car il nous était inconnu, et qu'il paraissait intéressant. Nous avons étudié plusieurs cas de billards, tel le billard rectangulaire, le billard carré, et les billards en forme de triangle équilatéral. [Note: dans tout l'article la boule sera assimilée à un point]

I. Premiers essais et notions utiles

On a d'abord utilisé une balle de babyfoot enduite de craie que nous avons fait rebondir contre un mur le long d'une règle pour avoir une idée de la trajectoire lors d'un rebond contre un des côtés du billard. Nous avons observé :

● que *l'angle de rebond restait le même que l'angle de départ*. Un de nos professeurs nous a confirmé cette propriété des rebonds, similaire à la loi de Descartes (trajectoire d'un rayon lumineux) : l'angle d'incidence d'un objet sur une surface plane est égal à l'angle de rebond. Voici une illustration de cette propriété :



On a ici : α = β

● *des parallèles après 2 rebonds*.

Il y a deux cas possibles pour un enchainement de deux rebonds :

a) Soit le deuxième rebond se fait sur *le côté opposé* au premier :

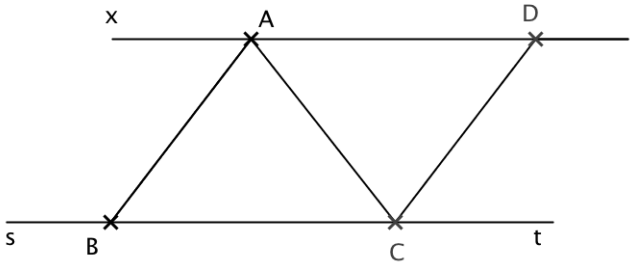


Figure 1

On démarre en B (fig. 1) ; d'après la propriété précédente on a : $\widehat{xAB} = \widehat{CAD}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DCt}$. Or (*st*)//(*xy*), donc $\widehat{CAD}$ et $\widehat{ACB}$, qui sont alternes-internes, sont égaux [(propriété)]. De même pour $\widehat{ADC}$ et $\widehat{DCt}$. On a donc :

$$\widehat{xAB} = \widehat{CAD} = \widehat{ACB} = \widehat{DCt} = \widehat{ADC} ;$$

Or $\widehat{xAB}$ et $\widehat{ADC}$ sont correspondants et égaux, donc [(propriété)] les droites qui les forment sont parallèles : (*AB*) // (*DC*).

b) Soit le deuxième rebond se fait *sur un côté perpendiculaire* au premier

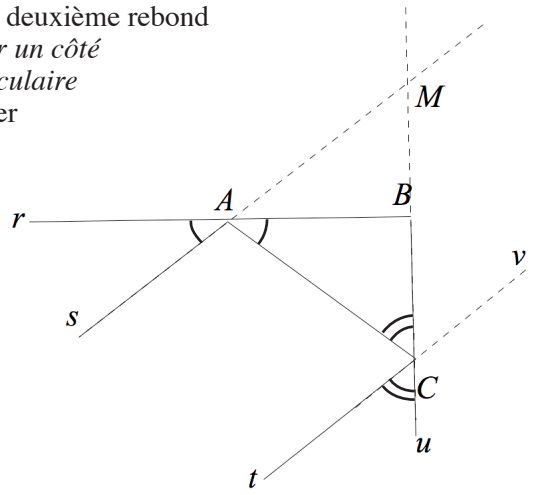


Figure 2

On prolonge les droites (BC) et (As) qui se coupent en M. On a : $\widehat{rAS} = \widehat{BAC}$ [d'après l'observation précédente] ; $\widehat{rAs}$ et $\widehat{MAB}$ sont opposés par le sommet donc égaux. $\widehat{MAB}$ et $\widehat{AMB}$ sont complémentaires de même que $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.

[Comme] $\widehat{MAB} = \widehat{BAC}$, alors $\widehat{AMB} = \widehat{BCA}$. De même on a : $\widehat{ACB} = \widehat{tCu} = \widehat{BCv}$ [voir figure].

Finalement les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{MCv}$ sont alternes-internes [par rapport aux droites (*As*) et (*Ct*)] et de même mesure, ils sont donc formés par deux droites parallèles : (*As*) *et* (*Ct*) *sont parallèles*. [CQFD]

II. Etude de cas particuliers dans un billard rectangulaire de dimensions *L×l*

[Dans les cas considérés, le point E sera au départ]

Cas n°1 : la boule est lancée d'un côté du billard avec un angle de 90°.

Dans *ABCD* on a: (*AB*)//(*CD*) et (*BA*)⊥(*EF*). Or, si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc : (*CD*)⊥(*EF*).

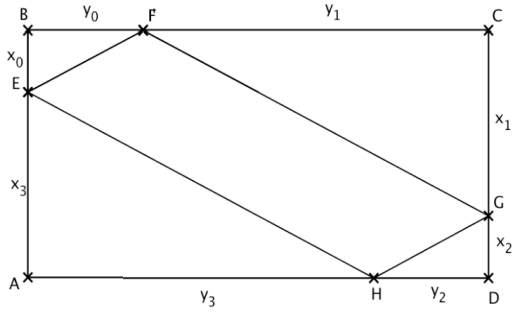
Conclusion : on peut dire que *la trajectoire est fermée*, la balle revient au point de départ après un rebond sur la bande opposée à celle de lancement.

Cas n°2 : Avec quel angle faut-il lancer la boule pour que la boule parte d'un coin du billard et y revienne après un seul rebond [en fait deux rebonds confondus, avec retour parallèle] dans le coin opposé ?

Considérons le triangle *ABC* rectangle en *B* :

tan x = *BC*/*AB*=*L*/*l* donc : $\boxed{x = \tan^{-1}(L/l)}$

Cas n°3 : le résultat démontré au I sur les parallèles, implique que, si l'on veut une trajectoire fermée avec un rebond sur chaque bande, on obtiendra nécessairement un parallélogramme puisque les côtés opposés sont parallèles. On peut se demander *comment lancer la boule pour qu'elle revienne au point de départ*.



EFGH est un parallélogramme, nous l'avons dit, donc : *EF* = *HG* et *FG* = *EH*.

$$\widehat{BEF} = 90° - \widehat{BFE} = 90° - \widehat{CFG} =$$
$$= \widehat{DGH} = 90° - \widehat{GHD} = 90° - \widehat{EHA} = \widehat{AEH}$$

On a aussi : $\widehat{BFE} = \widehat{CFG} = \widehat{GHD} = \widehat{EHA}$

Les triangles *EBF* et *HGD* sont donc superposables (un côté de même longueur et les angles de même mesure) et : $x_0 = x_2$ et $y_0 = y_2$. De même : $x_1 = x_3$ et $y_1 = y_3$.

On a :

$$\tan(\widehat{BEF}) = \frac{y_0}{x_0} = \tan(\widehat{CGF}) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{(L-y_0)}{(l-x_0)}$$

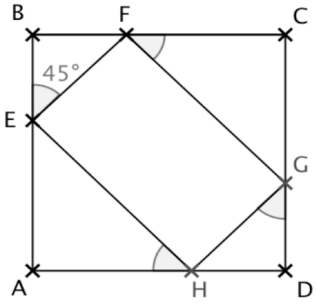
d'où : $y_0(l - x_0) = x_0(L - y_0)$

d'où : $y_0 l - y_0 x_0 = x_0 L - x_0 y_0$

Donc : $\frac{y_0}{x_0} = \frac{L}{l}$ et $\boxed{\widehat{BEF} = \tan^{-1}(\frac{L}{l})}$

[L'angle qui assure la trajectoire fermée est le même que dans le cas n°2]

Cas n°4 : étude du billard carré, lancement de la boule à 45°.



On part du point *E* à 45°. *EBF* rectangle en *B* ; or la somme des angles dans un triangle vaut 180°. Donc :

$\widehat{BFE} = 180° - 90° - 45° = 45°$ et $BE = BF$

de plus $\widehat{BFE} = \widehat{CFG}$ donc on a de même :

$\widehat{CFG} = \widehat{CGF}$ et $FC = CG$.

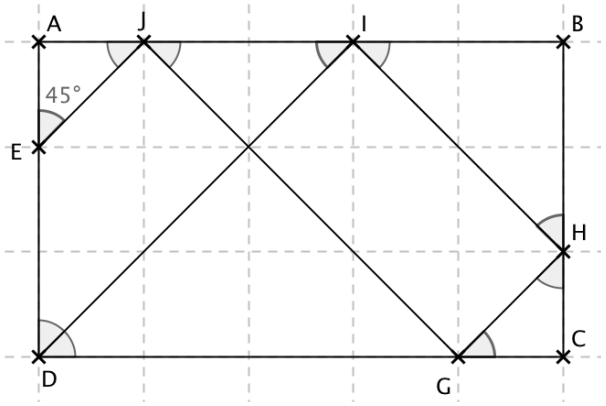
En répétant ce raisonnement on a : $GD = DH$

on a alors : $GD=CD-CG=BC-FC=BF=BE$

et de même $AH=CG=CF=AE$.

Conclusion : lancée à 45° d'un côté du billard, la trajectoire est fermée, elle revient au point de départ en un seul aller-retour.
[Ce cas est en fait un cas particulier du cas n°3]

Cas n°5 : revenons au billard rectangulaire, lancement à 45°.



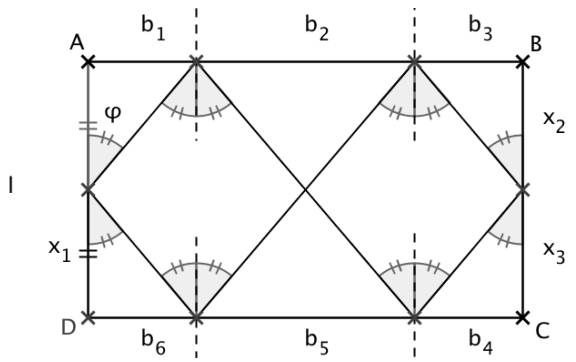
En simulant avec le programme (cf. annexe) *pour des billards rectangulaires dont les dimensions sont des nombres entiers* et *avec un angle de départ de 45°* entre la trajectoire et le bord, il nous a semblé que [**Conjecture**] *la trajectoire était toujours fermée* (parfois après de nombreux de rebonds).

Dans l'exemple que nous avons tracé, la boule part de *E*, arrive en *D* avec un angle de 45°, puis repart dans le sens inverse pour revenir en *E*. (En découpant le rectangle en carrés (la longueur et la largeur sont des nombres entiers), la boule parcourt les diagonales de ces carrés).

Cas n°6 : on démarre du milieu d'un côté et on veut que la boule: 1) revienne au point de départ 2) fasse un rebond par face. Quel angle doit-on choisir au départ ? [...] [ce cas est un cas particulier du cas n°2]

Cas n°7 : même problématique qu'au cas précédent avec 2 rebonds sur les faces horizontales lors du trajet aller et un rebond sur les faces verticales.

Quel angle φ doit-on choisir au départ ?



Avec la propriété des rebonds étudiée au début et les angles alternes-internes, nous obtenons des angles de même mesure que φ (codés sur la figure).

On a : $\tan\varphi = b_1/x_1$ et $\tan\varphi = b_6/x_1$, donc : $b_1 = b_6$;

On a : $\tan\varphi = b_5/l$ et $\tan\varphi = b_2/l$, donc : $b_5 = b_2$.

Donc $b_3=b_4$, ce qui nous donne $x_2 = x_3$ et donc $x_2=x_3=x_1$ et $b_3 = b_4 = b_1$.

De plus : $\tan\varphi = b_1/x_1 = b_5/l = b_5/2x_1$

$b_1/x_1 = b_5/2x_1$ donne : $b_5 = 2b_1 = b_2$

Finalement, on a : $4b_1 = L$ donc $b_1 = L/4$.

Donc :

$$\tan\varphi = b_1/x_1 = \frac{L/4}{l/2} = \frac{L}{4} \times \frac{2}{l} = \frac{2L}{4l} = \frac{L}{2l}$$

Donc : $\boxed{\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L}{2l}\right)}$

Conjecture

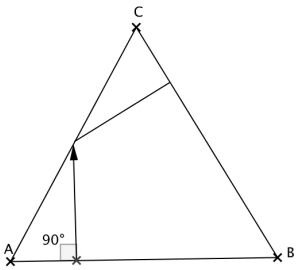
On remarque que lorsque l'on veut un rebond sur chaque côté horizontal, on doit partir avec un angle de $\tan^{-1}(L/(1\times l))$. Lorsque on en veut deux, il faut un angle de $\tan^{-1}(L/(2\times l))$; nous avons également trouvé que pour avoir trois rebonds sur chaque côté horizontal, il fallait partir avec un angle de $\tan^{-1}(L/(3\times l))$.

On peut donc conjecturer :

Lorsqu'on veut une trajectoire fermée composée d'un seul aller-retour avec n rebonds sur chaque côté horizontal, , on doit partir avec un angle de $\tan^{-1}\left(\frac{L}{nl}\right)$.

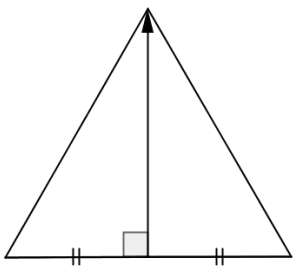
III. Etude de cas particuliers dans un billard triangle équilatéral

Cas n°1 : départ à 90° en dehors du milieu d'un côté.



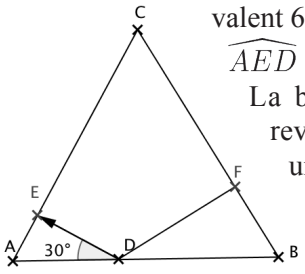
La boule est lancée à 90° à partir d'un côté du triangle, elle tape à 30° (180°-60°-90°) sur un deuxième côté, repart à 30° pour aller taper le troisième à 90° (180°-60°-30°) ; *elle revient donc à son point de départ par le même chemin.*

Cas n°2 : départ à 90° du milieu d'un côté.



La trajectoire étant axe de symétrie du triangle, la boule revient au point de départ.

Cas n°3 : départ avec un angle de 30°.

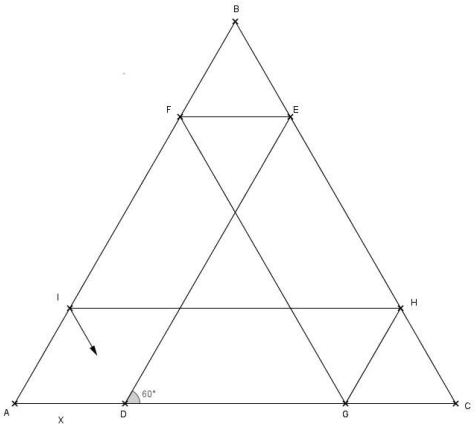


ABC étant équilatéral, ses angles valent 60°, on a donc :

$\widehat{AED} = 180° - 60° - 30° = 90°$

La boule, partie de *D* vers *E*, revient donc en *D*, repart avec un angle de 30° et donc tape en *F* avec un angle de 90° ; *elle revient donc en D et ainsi de suite.*

Cas n°4 : départ avec un angle de 60°.



On part de *D* à 60° et on note : *AD=x.* On notera également *D'*, le point de rebond sur [*AC*] lorsque la boule part de *I*. $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EDC}$ sont correspondants [relativement à (*AB*) et (*DE*)] et égaux à 60°, donc (AB) // (DE).

Le triangle *EDC* a 2 angles de 60° ($\widehat{EDC}$ et $\widehat{ECD}$), donc il est équilateral et $\widehat{DEC} = 60°$. On a alors : $\widehat{BEF} = 60°$ et donc (EF) //(AC) (car $\widehat{BEF}$ et $\widehat{ECD}$ sont, [relativement à (*AB*) et (*DE*)], correspondants égaux).

ADEF a ses côtés opposés parallèles donc c'est un parallélogramme et donc : *EF=AD=x*.

En répétant ce raisonnement plusieurs fois, on arrive à :

• (*FG*) // (*EC*), ce qui nous montre que *EFGC* est un parallélogramme et donc que : *GC=EF=x*. Comme *GHC* est équilatéral : *HG=GC=x*.

• (*GH*) // (*AB*) et (*HI*) // (*AC*).

AIHG est donc un parallélogramme et *AI=GH=x*.

Au rebond en I, on a : $\widehat{AID'} = 60°$, $\widehat{IAD} = 60°$ et *AID'* est équilatéral donc : *AD'=ID'=AI=x*. Or : *AD=x* donc *D* et *D'* sont confondus.

La boule revient donc au point de départ.

***

Annexe : Programmation en Scilab

```
// Déclaration de la méthode  avec  comme paramètres :
// la longueur (L),  la hauteur (H), le diamètre de la boule (D)
// la position initiale (pO), l'angle de départ (alpha) et
// le nombre de rebonds (R)

function billardrect(L,H,D,pO,alpha,R)
my_handle = scf(100001);
clf(my_handle,»reset»);

// On teste la validité des paramètres
test1=0,
test2=0,
test3=0,
test4=0,
test5=0,
test6=0,
test7=0,
if (D<L) then
   test1=1,
end
if (D<H) then
   test2=1,
end
if (alpha>0) then
   test3=1,
end
if (alpha<90) then
   test4=1,
end
if (R>0) then
   test5=1,
end
if (p0>=D) then
   test6=1,
end
if (p0<=H-D) then
   test7=1,
end
test=test1*test2*test3*test4*test5*test6*test7,
if test==1 then
   LR=L-D,HR=H-D,
   theta = alpha*%pi/180,
   i=1,
   r=0,
   x=0,y=p0,
   xt=0,yt=p0,
// On place toutes les positions des points du
// trajet et on calcule les points de rebonds le
// long du trajet
   while (r < R)
      r = r + 1,
      select i,
        case 1 then
        tanb=(LR-x)/(HR-y),
        if (tan(theta)<=tanb) then
           x=x+(HR-y)*tan(theta),
           y=HR,
           i=2,
        else
           y=y+(LR-x)/tan(theta),
           x=LR,
           i=4,
        end
        case 2 then
        tanb=(LR-x)/y,
        if (tan(theta)<=tanb) then
           x=x+y*tan(theta),
           y=0,
           i=1,
        else
           y=y-(LR-x)/tan(theta),
           x=LR,
           i=3,
        end
        case 3
        tanb=x/y,
        if (tan(theta)<=tanb) then
           x=x-y*tan(theta),
           y=0,
           i=4,
        else
           y=y-x/tan(theta),
           x=0,
           i=2,
        end
        case 4
        tanb=x/(HR-y),
        if (tan(theta)<=tanb) then
           x=x-(HR-y)*tan(theta),
        y=HR,
           i=3,
        else
           y=y+x/tan(theta),
           x=0,
           i=1,
        end
      end
      u=[r,i,x,y],
      xt=[xt,x],yt=[yt,y],
   end*
// Enfin on trace le trajet
   plot2d(xt,yt)
end
endfunction
```