Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Un Nouvel Opérateur

Année 2017-2018

Marie DURIVAUX

Encadrée par Didier MISSENARD

Lycée Blaise Pascal, Orsay

1 Énoncé

Monsieur et madame Jonhson ont créé un nouvel opérateur noté $\circ$, défini par les trois relations suivantes, telles que pour tout entier a et b : [1]

$$a \circ a = a + 2 \tag{1}$$

$$a \circ b = b \circ a \tag{2}$$

$$\frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{b} \tag{3}$$

On cherche une formule qui nous permette de calculer tout $a \circ b$. On considérera a et b comme des entiers naturels, avec quelques incursions dans les entiers relatifs.

2 Calcul de premières valeurs

a) Premières valeurs de $a \circ a$, à l'aide de la relation (1) :

$$\begin{aligned} 0 \circ 0 &= 0 + 2 = 2 \\ 1 \circ 1 &= 1 + 2 = 3 \\ 2 \circ 2 &= 2 + 2 = 4 \\ 3 \circ 3 &= 3 + 2 = 5 \\ -2 \circ -2 &= -2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Il semble que : [2]

$$(a+1) \circ (a+1) = (a \circ a) + 1$$

Et que pour tout n entier :

$$(a+n) \circ (a+n) = (a \circ a) + n$$

b) Premières valeurs de $1 \circ b$, à l'aide de la relation (3) :
On a déjà calculé $1 \circ 1 = 3$.
On cherche $1 \circ 2$:

$$1 \circ 2 = 1 \circ (1+1) = (1 \circ (1+1)) * 1 = 1 \circ (1+1) * \frac{1 \circ 1}{1 \circ 1} = \frac{1 \circ (1+1)}{1 \circ 1}(1 \circ 1)$$

Or la relation (3) appliquée au couple $(a = 1, b = 1)$ nous permet de trouver que :

$$\frac{1 \circ (1+1)}{1 \circ 1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Donc en associant les deux résultats, on obtient :

$$1 \circ 2 = \frac{1 \circ (1+1)}{1 \circ 1}(1 \circ 1) = 2 * 3 = 6$$
$$\iff 1 \circ 2 = 6$$

On utilise le même raisonnement pour calculer $1 \circ 3$:

$$1 \circ 3 = 1 \circ (1+2) = \frac{1 \circ (1+2)}{1 \circ 2}(1 \circ 2)$$

On a calculé que $1 \circ 2 = 6$, la relation (3) appliquée au couple (a=1 ; b=2) nous permet de trouver que :

$$\frac{1 \circ (1+2)}{1 \circ 2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$
$$1 \circ 3 = \frac{1 \circ (1+2)}{1 \circ 2}(1 \circ 2) = \frac{3}{2} * 6 = 9$$
$$1 \circ 3 = 9$$

On cherche $1 \circ 4$:

$$1 \circ 4 = 1 \circ (1+3)$$
$$\frac{1 \circ (1+3)}{1 \circ 3} = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3}$$
$$1 \circ 4 = \frac{1 \circ (1+3)}{1 \circ 3}(1 \circ 3) = \frac{4}{3} * 9 = 12$$
$$1 \circ 4 = 12$$

Il semble que l'on puisse énoncer la proposition suivante :

Proposition 1 *Pour tout entier naturel non nul a,*

$$1 \circ a = 3a$$

3 Formule de calcul par soustraction successive

On a remarqué qu'afin de calculer $1 \circ 4$ on devait connaître $1 \circ 3$ et donc $1 \circ 2$. On cherche une formule qui généralise le procédé employé dans les exemples, on va voir qu'elle implique des calculs par soustractions successives proches de l'algorithme d'Euclide.

On pose : $b \neq 0$, $a \neq 0$, $b - a \neq 0$, $b > a$. On suppose $a \circ (b - a) \neq 0$.

$$a \circ b = a \circ (a + b - a) = a \circ (a + b - a) * \frac{a \circ (b-a)}{a \circ (b-a)} = \frac{a \circ (a+b-a)}{a \circ (b-a)}(a \circ (b-a))$$

On utilise la relation (3) : $\frac{a\circ(a+b)}{a\circ b}=\frac{a+b}{b}$ sur le couple $(a,b-a)$, ce qui permet de "simplifier" par a :

$$a\circ b=\frac{a\circ(a+b-a)}{a\circ(b-a)}(a\circ(b-a))=\frac{a+b-a}{b-a}(a\circ(b-a))=\frac{b}{b-a}(a\circ(b-a))$$

$$a\circ b=\frac{b}{b-a}(a\circ(b-a))$$

Cette formule est applicable sur tout couple (a,b) (avec b et $b-a$ différents de 0), ainsi on différencie plusieurs cas :

Si b est multiple de a, alors en répétant l'utilisation de la formule (d'abord sur le couple (a ; b), puis sur (a ; b-a), puis sur (a ; (b-a)-a) et ainsi de suite) on obtient le produit de plusieurs fractions avec $a\circ a$, on trouve donc $a\circ b$ en résolvant le produit.

Si $b-na$ devient inférieur à a, alors on utilise la commutativité de l'opérateur (qui est fournie par la relation (2)), ce qui permet d'inverser les éléments du couple $(a;b-na)$ pour obtenir $(b-na;a)$ et on applique la formule sur le nouveau couple.

Si a est négatif [3] , la formule ne permet pas de trouver $a\circ b$, car on ne fait que s'enfoncer de plus en plus loin des valeurs connues. Exemple sur le couple $(a=-2,\ b=1)$

$$-2\circ 1=\frac{1}{1-(-2)}(-2\circ(1-(-2))=\frac{1}{3}(-2\circ 3)$$

Si on applique la formule sur $(-2,3)$, on trouve $-2\circ 3=\frac{3}{5}(-2\circ 5)$. Ainsi l'élément b du couple va devenir indéfiniment de plus en plus grand ce qui ne permet pas de retomber sur une valeur de $a\circ(b-a)$ connue comme c'est le cas si a est positif.

Si $b-a=1$, alors on utilise $a\circ 1$.

La formule

$$\boxed{a\circ b=\frac{b}{b-a}(a\circ(b-a))}$$

permet donc de trouver toutes les valeurs de $a\circ b$ pour a et b des entiers naturels, mais elle demande de calculer des valeurs intermédiaires ce qui peut s'avérer gênant dans des calcul de a et b très grand, par exemple $275\circ 3607$. Il s'agit donc maintenant de trouver un moyen de calculer plus directement $a\circ b$, néanmoins cette formule nous servira de base pour toutes les autres démonstrations. On remarque d'ailleurs sa ressemblance avec l'algorithme d'Euclide.

4 $1\circ a$

On cherche à calculer $1\circ a$ pour tout $a>1$. On utilisera la formule de calcul par soustraction successives évoquée précédemment, sur le couple (1 ; a).

Démonstration :

$$1\circ a=\frac{a}{a-1}(1\circ(a-1))$$
$$1\circ a=\frac{a}{a-1}\frac{a-1}{a-2}(1\circ(a-2))$$
$$1\circ a=\frac{a}{a-1}\frac{a-1}{a-2}\frac{a-2}{a-3}(1\circ(a-3))$$
$$1\circ a=\frac{a}{a-1}\frac{a-1}{a-2}\frac{a-2}{a-3}\frac{a-3}{a-4}(1\circ(a-4))$$
$$1\circ a=\frac{a}{a-4}(1\circ(a-4))$$

Dans ces étapes, on a considéré que $a - 4 > 0$, ce qui nous a permis de répéter 4 fois l'utilisation de la formule. Considérons que l'on répète n fois l'opération, jusqu'à obtenir le terme $(1 \circ (a-n))$ tel que $a - n = 1$. Rappelons que $1 \circ 1 = 3$. On a alors :

$$1 \circ a = \frac{a}{a-n}(1 \circ (a-n)) = \frac{a}{1}(1 \circ 1) = \frac{a}{1}(3) = 3a$$

Nous venons ainsi de prouver le résultat suivant :

Proposition 2 *Pour tout $a > 1$,*

$$\boxed{a \circ 1 = 3a}$$

5 Tableau

A l'aide des précédentes formules, on a construit un tableau des différentes valeurs de $a \circ b$ en fonction de a et de b.

b \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	6	4	18	8	30	12	42	16	54	20
3	9	18	5	36	45	10	63	72	81	90
4	12	8	36	6	60	24	84	12	108	40
5	15	30	45	60	7	90	105	120	135	14
6	18	12	10	24	90	8	126	48	162	60
7	21	42	63	84	105	126	9	168	189	210
8	24	16	72	12	120	48	168	10	216	80
9	27	54	15	108	135	30	189	216	11	270
10	30	20	90	40	14	60	210	80	270	12

Pour construire le tableau, on commence par remplir la diagonale qui correspond à $a \circ a = a + 2$, avant de remplir le tableau : comme on l'a vu précédemment, le calcul de $a \circ b$ nécessite le calcul de $a \circ (b - a)$, on commence donc avec $1 \circ 1 = 3$, puis on trouve $2 \circ 1 = 6$, puis $3 \circ 1 = 9$ et ainsi de suite ; on procède ligne par ligne, de la gauche vers la droite.

On remarque différentes caractéristiques du tableau :
- les valeurs présentent une symétrie par rapport à la la diagonale surlignée en rouge, ce qui illustre la commutativité de l'opérateur (relation (2) :$a \circ b = b \circ a$).
- les premières lignes et colonnes présentent des croissances cycliques aisément repérables :

$1 \circ a = 3a$, $2 \circ a = 2a$ ou $6a$. Néanmoins, ces cycles se répètent sur chaque ligne et colonne, modulo b. On a ainsi (k entier naturel) :

$1 \circ a = 3a$

$2 \circ a =$ 2a [pour a=2k] ou 6a [pour a=2k+1]
$3 \circ a =$ 9a [a=3k] , 9a [a=3k+1] ou $\frac{5a}{3}$ [a=3k +2]
$4 \circ a =$ 12a [a=4k] , 4a [a=4k+1] , 12a [a=4k+2] ou $\frac{3a}{2}$ [a=4k+3]
$5 \circ a =$ 15a [a=5k] , 15a [a=5k+1] , 15a [a=5k+2] , 15a [a=5k+3] ou $\frac{7a}{5}$ [a=5k+4]

On peut voir que les nombres permettant de trouver $a \circ b$ en multipliant a sont surtout des multiples de b. [4]

6 Conjectures

Après avoir étudié les valeurs du tableau, on peut émettre certaines conjectures :
- Pour a et b entiers, $a \circ b$ est entier.
Concernant le signe de $a \circ b$:
- Pour a et b positifs, $a \circ b$ est positif.
- Pour a ou b négatif, $a \circ b$ peut être positif ou négatif.

Ensuite sur des formules exprimant $a \circ b$ en fonction de certaines caractéristiques de a et b. Au premier abord, les résultats trouvés semblent suivre une progression incohérente, néanmoins on s'aperçoit que :
1- $1 \circ a = 3a$, cette conjecture à été démontrée plus haut ;
2- Si a et b ont pour seul diviseur commun 2 : $a \circ b = ab$
3- Si b est un multiple de a, tel que $b = ka$ (avec k entier naturel) : $a \circ ka = k(a \circ a) = k(a + 2)$
4- Si a et b sont premiers entre eux : $a \circ b = 3ab$

Mais ces conjectures ne couvrent pas le tableau entier, et ne sont donc pas assimilables à une formule générale : par exemple, elles ne permettent pas de trouver $6 \circ 9$.

7 Démonstration d'une formule universelle

L'étude du tableau nous a poussé à formuler plusieurs conjectures, qui ont comme points communs l'utilisation de a, b et de leurs diviseurs ou multiples communs. L'étude de l'opérateur et d'une formule de base (calcul par soustraction successives) a mis en évidence un système de calcul apparenté à l'algorithme d'Euclide. On a donc poursuivi le raisonnement dans ce sens, dans le but de mettre au point une formule générale.

Le raisonnement s'effectue en utilisant la formule :

$$a \circ b = \frac{b}{b-a}(a \circ (b-a))$$

On considère à chaque étape un couple de nombres entiers : X et Y, avec X et Y différents de 0, $Y - X \neq 0$ et $Y > X$. On commence avec $X = a$ et $Y = b$.

$$a \circ b = \frac{b}{b-a}(a \circ (b-a))$$

Puis on continue le raisonnement, on réutilise la formule sur $X = a$; $Y = (b - a)$:

$$a \circ b = \frac{b}{b-a}\frac{b-a}{b-2a}(a \circ (b-2a))$$

$$a \circ b = \frac{b}{b-a}\frac{b-a}{b-2a}\frac{b-2a}{b-3a}(a \circ (b-3a)$$

Et ainsi de suite, on répète l'opération n fois, avec $n = Q_1$ tel que $(b - Q_1 a) < a$, on obtient donc une formule :

$$\boxed{a \circ b = \frac{b}{b-Q_1 a}(a \circ (b-Q_1 a))}$$

La formule présente une ressemblance avec l'algorithme d'Euclide, avec Q_1 le quotient et $R_1 = (b - Q_1 a)$ le reste de la division euclidienne de b par a. Si R est nul, alors b est multiple de a et on sait trouver $a \circ b$.

$$\boxed{a \circ b = \frac{b}{R_1}(a \circ R_1)}$$

On définit ainsi un nouveau couple $X = a$ et $Y = R_1$ tel que $R_1 = (b - Q_1 a)$, sur lequel on applique directement la formule que l'on vient de démontrer :

$$R_1 \circ a = \frac{a}{R_2}(R_1 \circ R_2)$$

Avec Q_2 le quotient et $R_2 = a - Q_2 R_1$ le reste de la division euclidienne de R_1 par a, on a donc en combinant les deux résultats :

$$a \circ b = \frac{b}{R_1}\frac{a}{R_2}(R_1 \circ R_2)$$

On définit à nouveau un couple $X = R_2$ et $Y = R_1$ ($R_1 > R_2$, avec $R_2 = (a - Q_2 R_1)$), sur lequel on applique la formule :

$$R_2 \circ R_1 = \frac{R_1}{R_3}(R_2 \circ R_3)$$

On a Q_3 le quotient et $R_3 = R_1 - Q_3 R_2$:

$$a \circ b = \frac{b}{R_1}\frac{a}{R_2}\frac{R_1}{R_3}(R_2 \circ R_3)$$

L'étape suivante nous donnera : un quotient Q_4, un reste $R_4 = R_2 - Q_4 R_3$:

$$a \circ b = \frac{b}{R_1}\frac{a}{R_2}\frac{R_1}{R_3}\frac{R_2}{R_4}(R_3 \circ R_4)$$

Dans ces calculs, les fractions peuvent se simplifier :

$$a \circ b = \frac{ba}{R_3 R_4}(R_3 \circ R_4)$$

On peut donc généraliser la formule, pour obtenir un théorème :

$$a \circ b = \frac{ba}{R_{n-1} * R_n}(R_{n-1} \circ R_n) = (ba)\frac{R_{n-1} \circ R_n}{R_{n-1} * R_n}$$

Avec $R_n = R_{n-1} - (Q_n * R_{n-1})$ et n le nombre d'étapes nécessaires au calcul, c'est-à-dire le nombre de couples (X ;Y) qu'on a défini.

Comme nous l'avons souligné dans la démonstration de la formule de base, puis le long de ce raisonnement, la méthode de calcul s'apparente à celle de l'algorithme d'Euclide qui permet de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

En effet, on a défini $R_n = R_{n-1} - (Q_n * R_{n-1})$ Or cette égalité est équivalente à : $R_{n-2} = (Q_n * R_{n-1}) + R_n$, Ce qui est exactement la définition du reste dans les étapes de l'algorithme d'Euclide.

Cela parait plus clair en modifiant l'ordre des indices : on pose $m = n - 2$, On a : $R_m = (Q_{m+2} * R_{m+1}) + R_{m+2}$

On est donc en mesure de comprendre le fonctionnement de l'opérateur $\circ$ et donc de l'utiliser : dans la formule

$$a \circ b = (ba)\frac{R_{n-1} \circ R_n}{R_{n-1} * R_n}$$

R_{n-1} et R_n sont en fait tous deux égaux au PGCD de a et b. En se souvenant que $\mathrm{PGCD}(a,b) \circ \mathrm{PGCD}(a;b) = \mathrm{PGCD}(a,b) + 2$, on a donc établi le théorème suivant : [5]

Théorème 3 *Pour tout couple (a,b) d'entiers non nuls on a :*

$$\boxed{a \circ b = (ab)\frac{PGCD(a,b)+2}{PGCD(a,b)^2}}$$

8 Correspondance et conclusion

Comme on l'a démontré, $a \circ b = (ab)\frac{\text{PGCD}(a,b)+2}{\text{PGCD}(a,b)^2}$
Et cette formule coïncide avec les conjectures précédemment évoquées grâce au tableau :

1- $1 \circ a = 3a$
$\text{PGCD}(1,a) = 1$ donc :

$$1 \circ a = \frac{1a}{\text{PGCD}(1,a)^2}(\text{PGCD}(1,a)+2) = \frac{a}{1}(3) = 3a$$

2- Si a et b ont pour seul diviseur commun 2 : $a \circ b = ab$
$\text{PGCD}(a,b) = 2$

$$a \circ b = \frac{ab}{\text{PGCD}(a,b)^2}(\text{PGCD}(a,b)+2) = \frac{ab}{2^2}(2+2) = 4\frac{ab}{4} = ab$$

3- Si b est un multiple de a, tel que $b = ka$ (avec k entier naturel) : $a \circ ka = k(a \circ a) = k(a+2)$
$\text{PGCD}(a,ka) = a$

$$a \circ ka = \frac{aka}{\text{PGCD}(a,ka)^2}(\text{PGCD}(a,ka)+2) = \frac{ka^2}{a^2}(a+2) = k(a+2)$$

4- Si a et b sont premiers entre eux : $a \circ b = 3ab$
$\text{PGCD}(a,b) = 1$

$$a \circ b = \frac{ab}{\text{PGCD}(a,b)^2}(\text{PGCD}(a,b)+2) = ab(1+2) = 3ab$$

[6]

Cette formule finale permet de répondre à certaines questions :

a) $a \circ b$ est-il toujours entier ? Un PGCD est par définition toujours entier, donc pour a et b entiers, $a \circ b$ est entier. [7]

b) $a \circ b$ est-il toujours positif ? Un PGCD est par définition toujours positif, on différencie donc deux cas en s'intéressant uniquement au produit de a et b dans la formule $a \circ b = \frac{ab}{\text{PGCD}(a,b)^2}(\text{PGCD}(a,b)+2)$: 1- Si a et b sont de même signe, alors leur produit et donc le résultat seront positifs. 2- Si a et b sont de signes différents, alors leur produit sera négatif, et $a \circ b$ sera négatif.

Cette formule permet de calculer $a \circ b$ pour tout a et b entiers.

On pourrait tenter de comprendre et démontrer comment la troisième formule de l'énoncé ($\frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{b}$) lie l'opérateur à l'algorithme d'Euclide.

9 Notes d'édition

[1] Dans la formule (1) ci-dessous on peut se demander pourquoi 2 et pas un entier quelconque ? Dans la formule (3) il a été oublié de préciser que b est non nul.

[2] *Il semble...* et c'est bien vrai, par exemple pour la seconde formule, en vertu de la commutativité de l'addition : $(a+n) \circ (a+n) = a+n+2 = a+2+n = (a \circ a) + n$.

[3] L'opérateur est défini au départ comme agissant sur les entiers naturels, donc positifs ou nuls ; l'apparition d'entiers négatifs n'est pas très cohérente.

[4] Ces diverses formules mériteraient quelques explications.

[5] La preuve est mal présentée. L'auteur semble écrire : $b = qxa + r$ donc $a \circ b = [b/((q-1)a+r] * (a \circ ((q-1)a+r))$. On a en fait pour tout $j \leq q$, $(a \circ (q-j+1)a+r) = [b/((q-j)a+r] * (a \circ ((q-j)a+r))$. On en déduit par récurrence ou « par tâtonnements » que $a \circ b = (a/r)x(b \circ r) = (ba/br) * (b \circ r)$. On utilise ce résultat à chaque tour de l'algorithme d'Euclide. Pour le dernier tour, les deux opérandes valent $\mathrm{PGCD}(a, b)$.

[6] A-t-on une formule qui dépend de la manière dont on définit $a \circ a$ c'est-à-dire si par exemple on avait choisi au départ $a \circ a = a + 3$ alors le 2 de la formule deviendrait-il un 3 ?

[7] L'argument donné n'est pas suffisant. Ce n'est pas le fait que le PGCD soit entier qui fait marcher les choses mais celui que $a/\mathrm{PGCD}(a, b)$ et $b/\mathrm{PGCD}(a, b)$ le soient (puisque $\mathrm{PGCD}(a, b)$ divise a et b) ; compte tenu de la formule donnant $a \circ b$), le caractère entier de $a \circ b$ est alors clair.