Un marchand intelligent

Emeline CÉLO, Eugénie CUNY, Lucie PERNÉE, Nathanaël ROGNON, Aurélie VICHOT,
et
Dimitri ALAMANOS, Etienne LANDRAGIN, Antoine LECOEUR, Erwan MARTIN, Rémi VELLARD.

élèves de 4ème et de 3ème, Collège Alain Fournier, ORSAY (91)

Enseignants : Mme Ferry et M. Fournier.

Chercheurs: Aurélien Poiret.

Sujet

Un marchand dispose du jeu suivant auquel tout individu peut jouer pour la somme de 10€. On dispose d'un sac rempli de 50 pièces jaunes et d'une pièce rouge indiscernables au toucher, seule la couleur diffère.

Le joueur suit le principe suivant :

(1) il tire une pièce, note sa couleur et la met de côté.

(2) il tire une pièce, si elle est de la même couleur que la précédente, il la met de côté et recommence en (1), si elle est de couleur différente, il la remet dans le sac et recommence en (1).

Le joueur est considéré gagnant si la dernière pièce tirée est jaune, il repart dans ce cas avec la somme de 15€ (il gagne donc 5€).

Que dire de la stratégie du marchand ? Que se passe-t-il si on change le nombre de pièces jaunes et rouges ?

Mots-clés

PROBABILITÉ, ARBRE, URNE, PIÈCE, CHAÎNE DE MARKOV

Nos premières séances

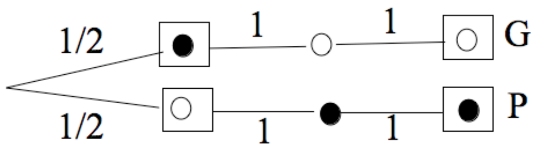
Nous pensions que le joueur gagnerait plus souvent que le marchand, étant donné que le nombre de pièces jaunes était beaucoup plus élevé que le nombre de pièces rouges, et donc que le marchand allait perdre de l'argent. Nous avons commencé par jouer avec quelques jetons jaunes et un rouge pour faciliter le jeu. Nous avons fait 18 parties et voici les résultats : 8 parties gagnantes et 10 perdantes. Le marchand était donc gagnant . Surprenant...

Les arbres de probabilité

Etudions précisément le nombre de chances de gagner ou de perdre en traçant des arbres de probabilité. La pièce rouge est représentée par ● et les jaunes par O

Les pièces gardées sont encadrées et les probabilités de tirer la pièce est inscrite sur la branche correspondante. (P : perdu, G : gagné)

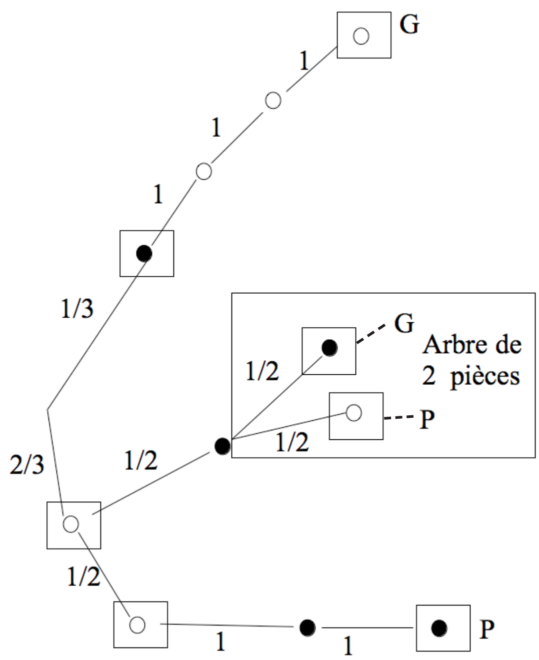
a) *1 pièce jaune et 1 rouge*



Pour la branche 1, la probabilité de gagner est :
$1/2 \times 1 \times 1 = 1/2$

Pour la branche 2, la probabilité de perdre est :
$1/2 \times 1 \times 1 = 1/2$

b) *2 pièces jaunes et 1 rouge*

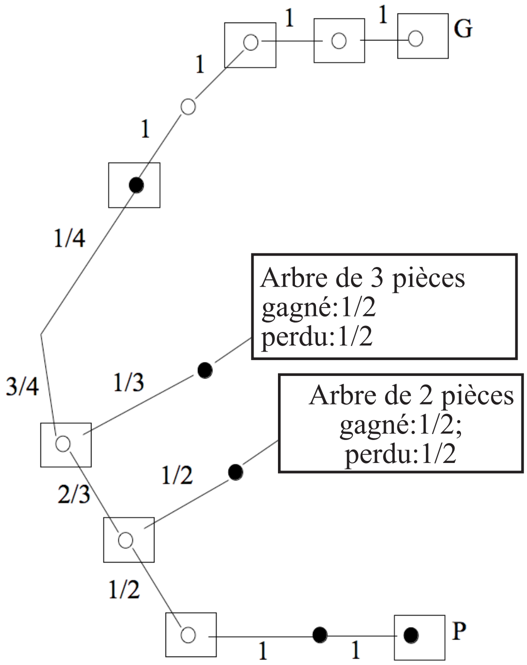


Probabilité de gagner :

$1/3 \times 1 \times 1 \times 1 + 2/3 \times 1/2 \times 1/2 = 1/3 + 1/6 = 3/6 = 1/2$

Pour calculer la probabilité de perdre, le calcul est identique et aboutit également à 1/2.

c) *3 pièces jaunes et 1 rouge*

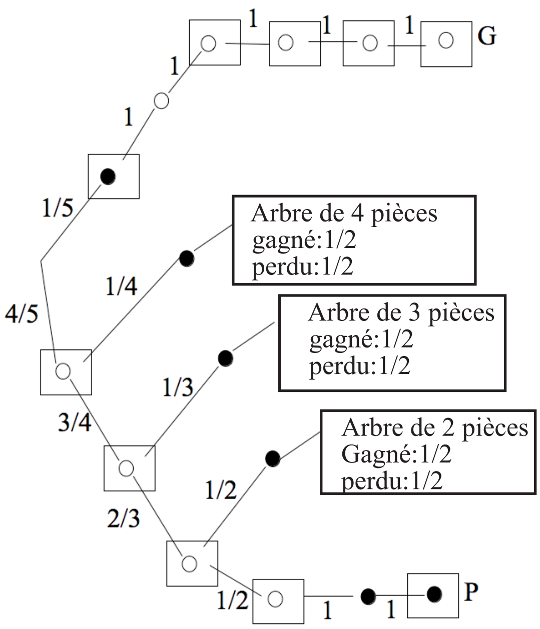


Probabilité de gagner :

1/4×1×1×1×1+3/4×1/3×1/2+3/4×2/3×1/2×1/2+ 3/4×2/3×1/2×1×1 = 1/4+1/8+1/8 = 4/8 = 1/2

Pour calculer la probabilité de perdre, le calcul est identique et aboutit également à 1/2.

d) *4 pièces jaunes et 1 rouge*



Probabilité de gagner :

1/5×1×1×1×1×1+4/5×1/4×1/2+4/5×3/4×1/3×1/2 +4/5×3/4×2/3×1/2×1/2 = 1/5+1/10+1/10+1/10 = 5/10 = 1/2

Pour calculer la probabilité de perdre, le calcul est identique et aboutit également à 1/2.

Conjecture

Nous avons été surpris de constater que [lorsqu'il n'y a qu'un pièce rouge], quel que soit le nombre de pièces jaunes, *les chances de gagner ou de perdre sont toujours de* 1/2.

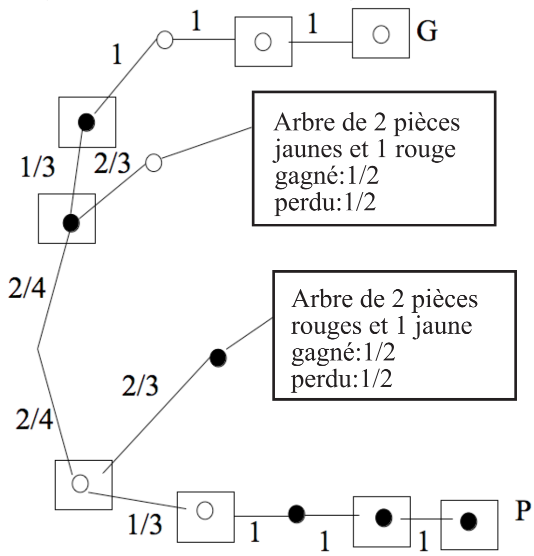
Les arbres deviennent très rapidement grands. Dans chaque arbre deux branches [extrêmes] se dégagent : l'une où la pièce rouge est tirée dès le début [(ensuite on ne tire plus que les blanches)] et l'autre où l'on tire toutes les pièces jaunes au début et on termine par la rouge ; chacune de ces branches (l'une gagnée, l'autre perdue) a une probabilité de $1/n$ où n est le nombre total de pièces. Ensuite, [pour les autres branches,] on retrouve les arbres précédents, avec un nombre de pièces inférieur.

Conclusion. Nous pouvons donc maintenant comprendre le marchand qui propose ce jeu : il a autant de chance de gagner que de perdre; or, *lorsqu'il gagne, il reçoit* 10€ (mise de départ du joueur) et *lorsqu'il perd il donne au joueur* 15€ (dont la mise de 10€) mais en fait lui ne donne que 5€. *Le marchand est donc au final gagnant*.

Extension du problème

Nous avons ensuite réfléchi à se qui se passerait si nous rajoutions des pièces rouges : Nous n'étions pas d'accord, certains pensaient que nous perdrions plus que nous gagnerions, d'autres pensaient le contraire. Nous avons donc recommencé l'étude.

2 pièces jaunes et deux pièces rouges :



Probabilité de gagner [2 rouges 1 jaune se traite comme 2 jaunes 1 rouge] :

2/4×1/3×1×1×1+2/4×2/3×1/2+2/4×2/3×1/2 = 1/6+1/6+1/6 = 1/2.

Pour calculer la probabilité de perdre, le calcul est identique et aboutit également à 1/2.

En rajoutant des pièces rouges et en ne prenant qu'une seule pièce jaune, les chances de gagner et de perdre sont toujours de ½, les couleurs sont seulement inversées. Mais en étudiant, à l'aide des arbres où le nombre de pièces rouges et jaunes variait, les chances de gagner et de perdre, comme ci-dessus, chaque fois nous sommes arrivés au même résultat : les chances de gagner et de perdre étaient toujours de ½.

Conjecture

Quels que soient le nombre de pièces rouges et jaunes, les chances de gagner et de perdre sont les mêmes (et donc le marchand reste gagnant).

***