Les triangles équilibrés

Année 2014 - 2015

Elèves de 3è : Adrien LOUINEAU, Guillaume GOMEZ, Yanis MISSENARD, Martin et Thomas COLLIGNON.
Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.
Chercheur : Céline ABRAHAM, Université Paris-Sud Orsay.

Le sujet

On regarde un triangle constitué de + et de – construit de cette façon :

- **Sur la première ligne, on écrit un certain nombre *n*, entier supérieur ou égal à 2, de signes + et – ; *n* est la taille du triangle.**
- **La ligne suivante : on place en dessous de chaque paire de signes, le signe de leur produit.**
- **Le triangle est entièrement construit lorsqu'on arrive à un seul signe.**

On dit qu'un triangle est équilibré quand il y a autant de signes + que de signes – .

Nos résultats : Nous avons trouvé une condition nécessaire pour qu'un triangle soit équilibré. Quand cette condition est respectée, il semble que l'on peut toujours trouver une suite de signes au départ, donnant un triangle équilibré.

I – Premiers exemples

Première ligne de signes : + + – + – – + + Ce triangle est dit de taille 8 (n = 8).
La deuxième ligne : + – – – + – +
En poursuivant, on obtient un triangle :

```
+ + – + – – + +
 + – – – + – +
  – + + – – –
   – + – + +
    – – – +
     + + –
      + –
       –
```

Ici, le triangle est formé de 17 signes + et de 19 signes – , il n'est donc pas équilibré.

Voici un autre exemple avec n = 4 :

```
+ + – +
 + – –
  – +
   –
```

Ici, le triangle est formé de 5 signes + et de 5 signes –, ce triangle est donc équilibré.

II – Conditions pour qu'un triangle soit équilibré

1 – Nombre total de signes

Nous avons d'abord pensé à calculer le nombre de signes d'un triangle en fonction de sa taille *n.*
La première ligne content n signes, la deuxième, $n - 1$, la troisième, $n - 2$, etc...
Appelons S le nombre total de signes, on a :
$S = n + n - 1 + \ldots + 2 + 1$. On a aussi : $S = 1 + 2 + \ldots\ n - 1 + n$.
En ajoutant membre à membre ces deux égalités :
$S + S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 1 + 2) + (n + 1)$.
D'où : $2S = (1 + n) + (1 + n) + \ldots + (1 + n)$
D'où : $2S = n(1 + n)$

$$\boxed{\textit{Donc : } S = n(1 + n)/2}$$

2 – Conditions

Un triangle équilibré de taille n a autant de signes + que de signes – ; il faut donc nécessairement un nombre pair de signes :
S doit être pair : $n(1 + n)/2$ doit être divisible par 2 et donc $n(1 + n)$ doit être divisible par 4.
n et $1 + n$ ne peuvent être pairs en même temps : en effet, si n est pair alors $n + 1$ est impair et si n est impair alors $n + 1$ sera pair. Ceci implique que soit n, soit $n + 1$ est divisible par 4.

Voici donc une condition de départ pour avoir un triangle équilibré : n *e*st un multiple de 4 ou le nombre entier suivant est un multiple de 4.
Les premiers triangles pouvant être équilibrés sont ceux de taille : 3 ; 4 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 15 ; 16 ; 19 ; 20 ; 23 ; 24 ; … Les autres ne pourront jamais être équilibrés.

III – Dans ces conditions, existe-t-il toujours un triangle équilibrés ?

Pour n = 3 : 8 cas

8 cas	+ + +	$\underline{+ + -}$	+ – +	$\overline{+ - -}$	$\underline{- + +}$	– + –	$\overline{- - +}$	– – –

Les rôles joués par + et – ne sont pas équivalents :

Si on fait permuter la place de deux signes, le résultat de la 2è ligne change : + – + et + + – ne vont pas donner des triangles identiques.

Par contre certains cas (surlignés et soulignés) sont identiques : lorsqu'on « retourne » toute la suite de signes. Par exemple, pour les cas soulignés on obtient deux triangles renversés l'un par rapport à l'autre mais qui contiennent le même nombre de signes + et – :

+ + –	et	– + +
+ –		– +
–		–

Pour n = 3, Il existe donc 6 cas différents dont 4 sont équilibrés, ceux indiqués ci-dessous auxquels il faut rajouter le triangle inversé :

6 cas	+ + + + + +	+ + – + – –	+ – + – – +	– – + + – –	– + – – – +	– – – + + +

Dans ce cas le triangle ne sera jamais équilibré.

Ces cas sont équilibrés.

6 cas	+ + +	– – –	+ + –	– – +	+ – +	– + –
	+ + +	+ + +	+ – –	+ – –	– – +	– – +

Nous avons pu remarquer également que lorsque deux triangles ont des lignes de départ avec des signes opposés, les lignes suivantes sont identiques dans les deux triangles.
En effet le produit de deux mêmes signes est positif ; si on prend leur opposé, ils sont toujours de même signe et leur produit est encore positif. Le produit de deux signes contraires est négatif, si on prend leur opposé, ils restent contraires et leur produit reste négatif.

Nous pouvons donc affirmer deux résultats :
– Si on trouve un triangle équilibré avec autant de signes + que de – sur la première ligne, on en a un deuxième en prenant l'opposé des signes de la première ligne.
– Si on trouve un triangle équilibré n'ayant pas autant de + que de – sur la première ligne, on sait que, en prenant l'opposé des signes de la première ligne, le triangle ne pourra pas être équilibré.

Pour n = 4, nous avons 16 cas à étudier : 6 cas donnent des triangles équilibrés.

+ – + + – – + + – – ou + + – +	+ + – – + – + – – + ou – – + +	+ – + – – – – + + + ou – + – +

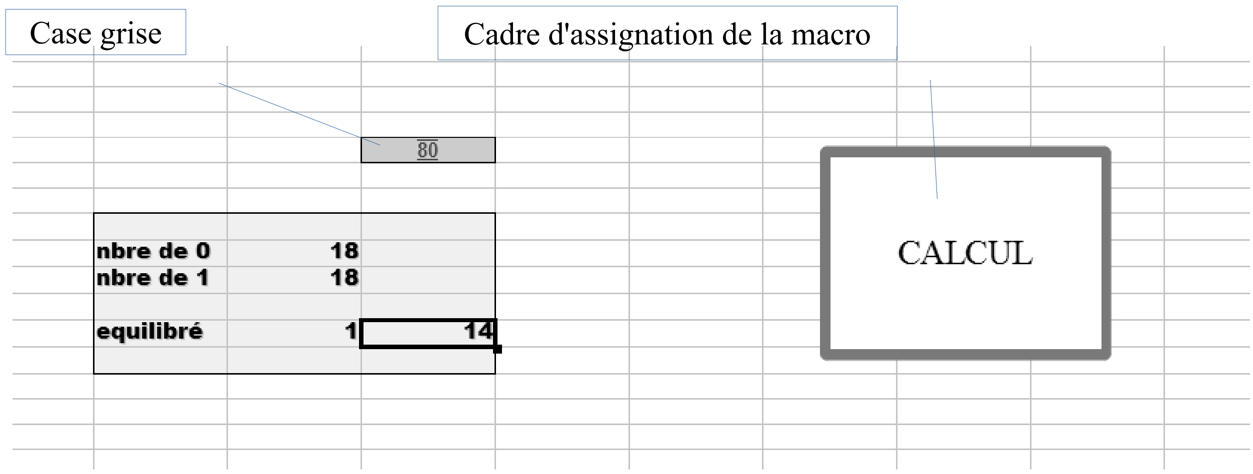
En augmentant le nombre de signes, il devient très dur de trouver des triangles équilibrés ; le nombre de cas à étudier devient vite très important. Il nous a donc fallu trouver un moyen d'automatiser nos recherches. Pour cela, nous avons utilisé le tableur pour calculer, pour un nombre de signes donné au départ, le nombre de cas et pour tester très rapidement de nombreux exemples. Les triangles sont formés et le tableur nous indique le nombre de signes – et de signes + et si le triangle est équilibré ou non.
Pour que le tableur fasse ces calculs, nous avons dû remplacer les – par des 0 et les + par des 1.

Voici une première vue du tableur :

7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	
1	1	1	0	1	1		
1	1	0	0	1			
1	0	1	0				
0	0	0					
1	1						
1							

Dans cette cellule nous rentrons la formule : « = SI(F3=G3;1;0) ». Nous l'étendons ensuite pour former le triangle.

Ensuite, nous avons créé une macro qui change la première ligne et donc le triangle entier est changé. Cette macro est assignée à un cadre et lorsque nous cliquons dessus, la macro est exécutée. Pour changer la première ligne nous avons créé un compteur binaire qui est formé à partir de la case grise.



Nos résultats sont répertoriés dans ce tableau et on peut voir que nous avons étudié de nombreux cas. [1]

nombre de signe a la base	nombre de signes	Nombre de possibilités pour la première ligne	nombre de réussites	
3	6	8	4 sur 8	
4	10	16	6 sur 16	
5	~~15~~	32	0 sur 32	
6	~~21~~	64	0 sur 64	
7	28	128	12 sur 128	
8	36	256	40 sur 256	
9	~~45~~	512	0 sur 512	
10	~~55~~	1024	0 sur 1024	
11	66	2048	171 sur 2048	~~non~~
12	78	4096	411 sur 4096	non

Pour chaque triangle dont la taille vérifie les conditions, nous avons toujours trouvé un triangle équilibré.

IV – Recherche d'une suite sur la première ligne

Pour essayer de montrer que l'on peut toujours trouver un triangle équilibré quand nos conditions de départ sont respectées, nous avons cherché s'il y avait une méthode automatique pour le construire , une suite de signes sur la première ligne qui fonctionnerait toujours.

1 – Cas symétriques

```
+ + + + – – – –    + – – +  + – – +    + +  – –
 + + + –  + + +     –  + –  + – + –     + –  +
  + + –  – + +       – –  – –  – –       – –
   + –  + – +         + + + + +           +
    – –  – –           + + + +
     + + +              + + +         5 + ; 5 –
      + +                + +
       +                  +

  23 + ; 13 –        22 + ; 14 –
```

➡ Triangles pas toujours équilibrés

Ces exemples nous montrent que faire une base symétrique, avec un axe de symétrie ou bien avec une « symétrie inversée » n'assure pas d'obtenir un triangle équilibré.

2 – Triangles assemblés

Nous avons ensuite pensé à mettre côte à côte deux triangles équilibrés. Nous avons nommé un triangle assemblé, un triangle dont la base est formée de deux bases de triangles équilibrés. [2]
Ex :

```
+ – + + + + –
 – – + + + –
  + – + + –
   – – + –
    + – –
     – +
      –

   14 + ; 14 –
```

3 – <u>Une ligne de « + »</u>

Nous avons vu qu'une ligne de + au début ne donne jamais un triangle équilibré puisque le triangle formé, quelque soit sa taille, ne contiendra que des +.

4 – <u>Une ligne de « – »</u>

Supposons qu'il y ait n signes – au départ, toutes les lignes suivantes seront constituées de +.
Le nombre total de signes est : $n(n+1)/2$.
Nombre de – : n

Nombre de + : $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^2+n}{2} - \frac{2\text{n}}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

On doit donc avoir : $n = \frac{n^2-n}{2}$

D'où : $2n = n^2 - n$

$3n = n^2$

$3n - n^2 = 0$

$n(3-n) = 0$

Si un produit est nul alors l'un des facteurs est nul.

$n = 0$ ou $3 - n = 0$

$n = 3$

Après vérification, on deux solutions qui sont 0 et 3

Avec une ligne de – au départ, seuls les triangles de base 3 peuvent être équilibrés.

5 – <u>Une ligne de *n* signes alternés</u>

a) Supposons que n est pair : la première ligne contient donc autant de + que de –.

Il faut donc regarder le triangle de taille $n - 1$, sans la première ligne, qui doit être équilibré.

Si la première ligne a des signes alternés, la seconde ligne n'aura que des – .

On est revenu à l'étude de la question précédente.

Avec une première ligne de –, le seul triangle équilibré est celui de taille 3 ; d**onc le seul triangle équilibré avec signes alternés sur la première ligne contenant un nombre pair de signes sera celui de taille 4.**

b) Supposons que n est impair :

– Si la 1ère ligne commence par +, on a un signe + de plus que les –.

Regardons les signes restants : sur la ligne 2, il y a $n - 1$ signes – ; sur la ligne 3, il y a $n - 2$ signes +. En rajoutant le signe + supplémentaire de la ligne 1, on a n – 1 signes +.

Donc pour les 3 premières lignes, on a autant de + que de –.

Il n'y a plus que des + sur les lignes suivantes, le triangle ne sera équilibré que s'il n'y a plus de ligne en dessous.

Le seul triangle équilibré est de taille 3.

– Si la 1ère ligne commence par –, on a un signe – de plus que les +.

Regardons les signes restants : sur la ligne 2, il y a $n - 1$ signes – ; en ajoutant le signe – supplémentaire de la ligne 1, on a n signes –. Sur la ligne 3, il y a $n - 2$ signes +.

A cette étape il manque donc 2 signes +. Les lignes suivantes ne contenant que des +, il ne peut pas y en avoir 2 seulement.

Il n'y a pas de triangle équilibré dans ce cas.

Conclusion : le seul triangle équilibré avec signes alternés sur la première ligne contenant un nombre impair de signes sera celui de taille 3 avec un signe + supplémentaire sur la première ligne.

V – Conclusion

En prenant de nombreux exemples avec le tableur, nous n'avons pas trouvé de suite logique sur la première ligne qui nous donnerait de façon certaine un triangle équilibré mais nous pensons que, quand les conditions que nous avons détaillées dans le II sont remplies, il en existe toujours un.

Notes d'éditions

[1] Le relecteur a fait les mêmes calculs avec un programme informatique de son cru. Les résultats coïncident à une exception : pour n=12, on trouve 410 triangles équilibrés, au lieu de 411 (?)

[2] Dans l'exemple indiqué, la base est constituée de la juxtaposition de (+ - - +) et (+ + -) qui sont des bases de triangles équilibrés, et qui donnent bien un triangle équilibré. Mais si on juxtapose (+ + -) et (+ + -), le résultat n'est pas un triangle équilibré. On ne peut donc pas établir de loi générale.