Les Triangles Magiques

Année 2018 – 2019

Emma SUDERIE, Manon CANDELON, Lisa CROS, Thibault MARA, Clémence SOULIER, Julie DUBOIS, Jules DELLERIE, Satya FAUVE, Lucas SAJAS, classe de 4e.

Encadrés par Fanny DECAMPS, Carole PONS, Julie POUPIN, Yann LEFRANÇOIS, Simon JUBERT.

Établissements : Collège Nelson Mandela de Noé, Collège André Abbal de Carbonne.

Chercheur : Yohann GENZMER, Institut de Mathématiques de Toulouse.

1. Présentation du sujet

Le problème consiste à créer des triangles dits parfaits, ils le deviennent s'ils ne contiennent que des nombres différents, consécutifs et qu'ils contiennent le nombre 1. Par ailleurs, on demande que dans le triangle, un nombre soit égal à valeur absolue de la différence des deux nombres qui se trouvent au-dessus de lui. Le problème consiste à construire des triangles parfaits de hauteur 2, 3, 4 et plus.

6 2 5
4 3
1

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous avons trouvé une formule qui nous a permis de savoir combien de nombre comporte un triangle de hauteur inconnue, que l'on note N, et par conséquent connaître le nombre le plus grand de ce même triangle qui sera placé au dernier étage.

Voici la formule : $\frac{1}{2}N\times(N+1)$.

Nous sommes certains d'avoir trouvé tous les triangles de hauteur 2 et 3 en utilisant les parités.
Nous avons également trouvé certains triangles de hauteur 4.

3. Texte de l'article

A. Les triangles de hauteur 2.

3 2	2 3	1 3	3 1
1	1	2	2

On remarque qu'ils fonctionnent en symétrie par deux.

B. Les triangles de hauteur 3.

6 2 5	5 6 2	6 1 4	1 6 4
4 3	1 4	5 3	5 2
1	3	2	3

Et évidemment, leurs symétriques fonctionnent :

5 2 6
3 4
1

2 6 5
4 1
3

4 1 6
3 5
2

4 6 1
2 5
3

C. Les triangles de 4 étages.

9 10 3 8
1 7 5
6 2
4

8 3 10 9
5 7 1
2 6
4

6 1 10 8
5 9 2
4 7
3

8 10 1 6
2 9 5
7 4
3

9 3 10 8
6 7 2
1 5
4

8 10 3 9
2 7 6
5 1
4

6 10 1 8
4 9 7
5 2
3

8 1 10 6
7 9 4
2 5
3

D. Formule.

Nous avons trouvé et démontré une formule qui permet de trouver le nombre de nombres qui constitues un triangle de N étages : $\frac{N}{2}\times(N+1)$.

Par exemple, si $N = 6$, il y a 21 nombres à placer dans un triangle de hauteur 6 :

$$\frac{6}{2}\times(6+1)=21$$

Et si $N = 9$, il y a 45 nombres à placer dans le triangle de hauteur 9 :

$$\frac{9}{2}\times(9+1)=45$$

Démonstration :

- avec N pair

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+...+(N-2)+(N-1)+N$$

$$=N+1$$

Puis on forme des paires avec les extrémités que l'on additionne et cela donne toujours $N+1$.

Il y a $N/2$ paires, donc au total cela donne $\frac{N}{2}\times(N+1)$

- avec N impair

L'astuce est d'additionner deux fois le nombre du milieu de la somme :

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+...+\frac{N+1}{2}+\boxed{\frac{N+1}{2}}+....+(N-2)+(N-1)+N$$

$$=N+1$$

nombre ajouté

La somme des paires est égale à $N+1$ et il y en a $(N+1)/2$.

Donc la somme avec le nombre ajouté donne :

$$\frac{N+1}{2}\times(N+1)=\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)(N+1)=\frac{N}{2}(N+1)+\frac{N+1}{2}$$

Or, ce nombre ajouté doit être enlevé pour que le calcul corresponde au nombre de nombres qu'il y a dans un triangle de hauteur N. Soit :

$$\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)(N+1)=\frac{N}{2}(N+1)+\frac{N+1}{2}-\frac{N+1}{2}$$

Ce qui est égal à $\frac{N}{2}\times(N+1)$.

Finalement dans les deux cas (pair et impair) la formule est la même :

$$\frac{N}{2}\times(N+1)$$

E. Nos conjectures et propriétés :

- Première propriété : Le nombre le plus grand d'un triangle se situe obligatoirement au dernier étage.
Démonstration : La différence de deux nombres positifs ne pourra jamais être supérieure aux termes.

- Deuxième propriété : On ne peut pas placer un nombre et son double à côté dans un triangle.
Démonstration : La différence d'un nombre et de sa moitié est égal à sa moitié, ce qui utilise deux fois le même nombre : $n-(\frac{n}{2})=\frac{n}{2}$.

- Troisième propriété (non démontrée) : Pour un nombre d'étages supérieur à deux, on ne peut pas placer des nombres tous de même parité sur la ligne du haut .
Exemple :

1 5 3
4 2
2

Les parités dans le triangle magique :

Nous avons écrit pour les triangles allant de 2 à 5 étages en ne considérant que la parité des nombres, c'est à dire en remplaçant les nombres pairs par p et les nombres impairs par i.
Avec ces notations on observe que l'on a

$$i-i=p, \qquad p-p=p, \qquad i-p=i$$

Par exemple le triangle :

$$\begin{array}{ccccc} i & & p & & i \\ & i & & i & \\ & & p & & \end{array}$$

Mais cet exemple ne fonctionne pas car il n'y a pas le même nombre de pairs et d'impairs !

Puis nous avons trié en fonction de la ligne du haut les configurations valides et invalides. Cela a permis d'éliminer de nombreuses possibilités.

Pour un triangle de quatre étages il y a 16 possibilités en tout car pour chacune des quatre nombres de la ligne du haut il y a 2 possibilités, on calcule donc $2\times2\times2\times2=2^4=16$.
Voici quelques exemples de la ligne du haut :

Quelques-unes qui fonctionnent :		Quelques-unes qui ne fonctionnent pas :	
$i\ p\ i\ p$	$p\ i\ p\ p$	$i\ i\ i\ i$	$p\ p\ p\ p$
$p\ p\ i\ i$	$p\ p\ i\ p$	$i\ p\ p\ p$	$p\ i\ i\ i$

4. Conclusion

Grâce à nos propriétés, nos calculs et nos conjectures, nous avons réussi à trouver des triangles de hauteur 2,3 et 4.

Nous avons eu beaucoup de mal à trouver un triangle de hauteur 5, ce qui nous amène à penser qu'à partir d'un certain nombre d'étages, il sera impossible de construire un triangle magique.