TRIANGLES CARRES

Année scolaire 2014/2015

Coralie Missud Aurélie Giner élèves en 2nde
*Lycée François Arago, **Perpignan***
*Jumelé avec B.P. Hasdeu National College, **Buzau***

Mme Diumenge, professeur de mathématiques
Mr Brouzet, enseignant-chercheur à l'Université de Perpignan

Sujet : Vous avez reçu pour votre anniversaire un jeu dans lequel il y a des jetons circulaires tous identiques. Vous vous apercevez qu'en les utilisant tous, vous pouvez les disposer tangents sur la table en formant, au choix, un carré ou un triangle équilatéral pleins. Quels sont les nombres de jetons qui permettent cela ?

Le but de notre sujet est donc de former, à l'aide du même nombre de jetons, un carré et un triangle équilatéral. Nous avons cherché à savoir quels sont les nombres de jetons qui permettent cela.

Sommaire :

A/ Premières recherches

Tout d'abord, nous nous sommes aidés de schémas pour trouver les nombres de jetons qui permettent de construire un triangle et un carré.
Puis nous avons essayé plusieurs combinaisons simples à l'aide d'un tableau fait à la main. Avec 4 jetons par exemple, nous pouvions former un carré mais il était impossible de former un triangle équilatéral. Nous avons rapidement trouvé qu'avec 0, 1 et 36 jetons, nous pouvions former à la fois un carré et un triangle

.

Nb d'étages	Nb de jetons du carré	Nb de jetons du triangle
0	0	0
1	1	1
2	4	3
3	9	6
4	16	10
5	25	15
6	36	21
7	49	28
8	64	36
9	81	45
10	100	55
11	121	66
12	144	78
13	169	91
14	196	105
15	225	120

B/ Recherche des fonctions du carré et du triangle (1)

Nous avons alors décidé de chercher les fonctions associées au carré et au triangle équilatéral.

FONCTION DU CARRE f(x)

Celle du carré revient à calculer x^2.
→ Donc $f(x) = x^2$

Par contre, celle du triangle est plus complexe à trouver.

FONCTION DU TRIANGLE g(y)

Nous avons remarqué que la fonction du triangle faisait penser à la méthode de Gauss qui consiste à ajouter par exemple les nombres de 1 à 100 de la façon suivante :

$$1+2+3+4+5+6+.......+100 = ?$$

Ce calcul est long à faire sauf si on le fait comme ceci :

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & + \ 2 & + \ 3 & + \ 4 & +\ldots + & 100 \\ +100 & + \ 99 & + \ 98 & + \ 97 & +\ldots + & 1 \end{array}$$

$$= 101 \times 100 = 10\,100$$

Chaque colonne est égale à 101 et on multiplie par 100 puisqu'il y a 100 colonnes. On divise ensuite le résultat obtenu par 2 car on a deux fois la somme cherchée.

De la même façon, la fonction du triangle s'obtient par le calcul suivant :

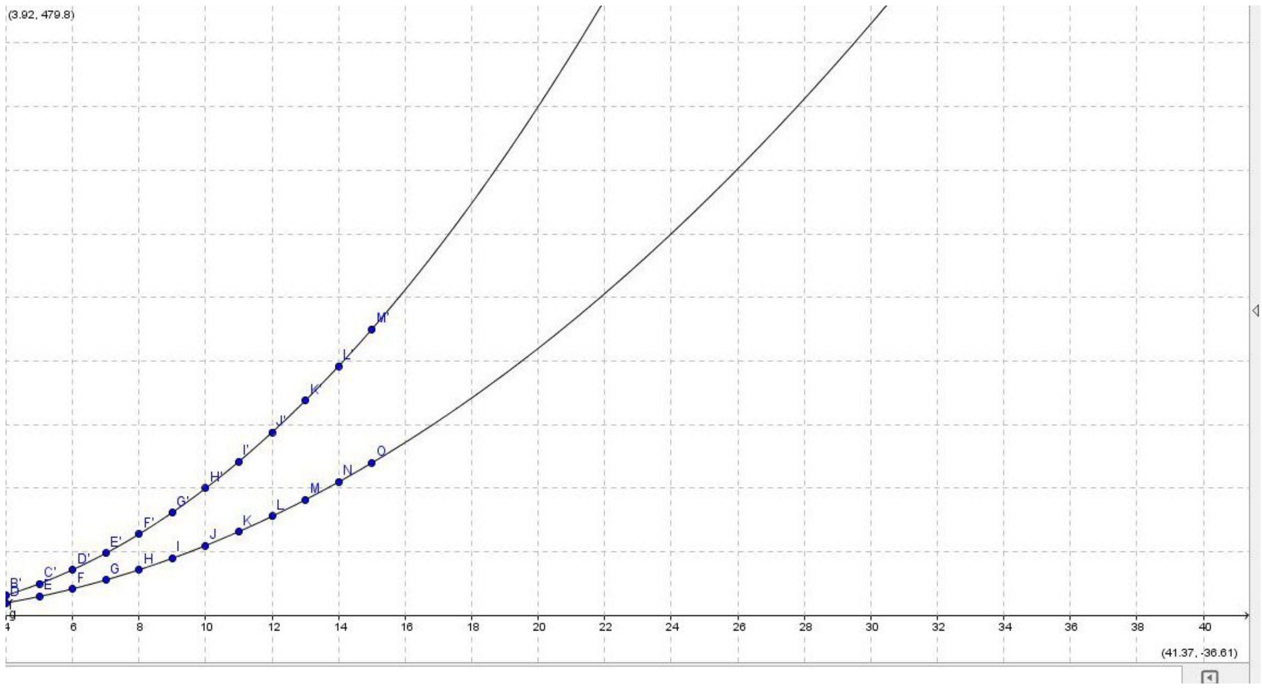
$$1 + 2 + 3 + \ldots + y = S\ ?$$

$$2S = y + y-1 + y-2 + \ldots + 1 = y(y+1)$$

$$\text{Donc } g(y) = \frac{y(y+1)}{2}$$

C/ Représentation des fonctions sur Geogebra et dans un tableur

Une fois la fonction du triangle trouvée, nous avons représenté graphiquement les courbes respectives du carré et du triangle sur Geogebra. Ensuite, nous avons cherché s'il y avait deux points de même ordonnée sur les deux courbes. Cela aurait montré qu'il y a le même nombre de jetons pour réaliser un carré ou un triangle.



Cette méthode n'était ni pratique ni précise donc nous avons décidé de rentrer les fonctions dans un tableur. En recherchant un même nombre présent à la fois dans la fonction du carré et dans la fonction du triangle, nous avons trouvé que 1 225 était un nombre triangle carré (2) c'est-à-dire un nombre présent à la fois dans l'ensemble des valeurs de la fonction du carré et de la fonction du triangle.

De là, nous avons calculé le rapport de 1 225 par 36 qui étaient les solutions précédentes trouvées. Nous nous sommes aperçus qu'en multipliant par $\frac{1225}{36}$ chaque nombre triangle carré, un nouveau nombre solution du problème se trouvait à proximité, après s'être reportés sur le tableur.

→ Cependant, plus les nombres sont grands et plus l'écart entre le résultat donné par la multiplication et le nombre triangle carré suivant est important.

Grâce à cela, nous avons ensuite trouvé 2 nombres triangles carrés avec 41 616 jetons puis avec 1 413 721 jetons.

Pour obtenir un résultat plus précis, nous avons modifié le rapport $\frac{1225}{36}$ en le remplaçant par les nombres triangles carrés trouvés au fur et à mesure.

Ex : 41 616 x $\frac{41\,616}{1\,225}$ environ = 1 413 788 (véritable solution : 1 413 721)

→ Nous avons trouvé le véritable résultat en se reportant sur le tableur et en recherchant un nombre en commun dans les fonctions autour de 1 413 700. (3)
→ Comme on peut le voir, le résultat est approximatif mais se rapproche du véritable résultat, ce qui permet de réduire les intervalles de recherche.

D/ Algorithme

Nous avons par la suite créé un algorithme permettant de trouver encore d'autres nombres triangles carrés :

Variables : y ; A

Traitement : POUR y allant de 1 à 100 000
A prend la valeur $\frac{y(y+1)}{2}$
SI floor [sqrt (A)] = sqrt (A)
ALORS afficher A
FIN POUR

Cet algorithme regarde pour tous les nombres allant de 1 à 100 000 si la partie entière de la racine carrée de A est égale à la racine carré de A. Autrement dit, il permet de vérifier quand est-ce que A est un carré parfait. Lorsqu'il l'est, cela signifie que ce nombre appartient aussi à la fonction f(x) (celle du carré).

Cet algorithme nous permet donc de connaître la valeur de x^2 et donc d'en déduire x.
Cependant, la valeur de y s'obtient en résolvant l'équation suivante : $x^2 = \frac{y(y+1)}{2}$

Grâce à l'algorithme que nous avons établi, nous avons pu trouver 2 autres nombres triangles carrés qui sont 48 024 900 et 1 631 432 881.

E/ Vers une formule générale

Après la rencontre avec les autres lycées, nous avons pu émettre une conjecture qui permet de trouver les valeurs de x pour lesquelles x^2 sera un triangle carré :

$$U_{n+1} = 6U_n - U_{n-1} \qquad (4)$$

Cela signifie que les valeurs suivantes de x s'obtiennent en multipliant par 6 la dernière valeur de x trouvée. On soustrait ensuite à ce résultat l'autre valeur précédente de x trouvée.

Par exemple, un carré de 1 225 jetons (x=35) est solution du problème, le précédent étant un carré de 36 jetons (x=6) :

$$U_{n+1} = 6 * 35 - 6 = 204$$

Cela nous donne un nouveau x solution donc $x^2=204^2=41\ 616$ qui est un nombre triangle carré.

On cherche ensuite U_n sous la forme de $U_n = a^n$
On remplace alors $U_{n+1} = 6U_n - U_{n-1}$ par $a^{n+1} = 6a^n - a^{n-1}$
On divise ensuite par a^{n-1} pour obtenir $a^2 = 6a - 1$
On résout ensuite l'équation : $a^2 - 6a + 1 = 0$

$$a^2 - 2*3a + 3^2 - 8 = 0$$
$$(a - 3)^2 - 8 = 0$$
$$(a - 3)^2 = 8$$

On trouve alors $a = 3 + \sqrt{8}$ ou $a = 3 - \sqrt{8}$
Donc $U_n = (3+\sqrt{8})^n$ et $U_n = (3-\sqrt{8})^n$ et par combinaison linéaire $\alpha(3+\sqrt{8})^n + \beta(3-\sqrt{8})^n$ sont des valeurs de cette suite.De plus, on sait que $x_1=1$ et $x_2=6$. Les solutions trouvées doivent donc vérifier cette condition. Pour cela, on doit déterminer α et β à l'aide d'un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^1 + \beta(3-\sqrt{8})^1 = 1 \\ \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta(3-\sqrt{8})^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8}) = 1(3+\sqrt{8}) \\ \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta(3-\sqrt{8})^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta = (3+\sqrt{8}) \\ \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta(3-\sqrt{8})^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta = (3+\sqrt{8}) \\ \end{cases}$$

$\beta(3-\sqrt{8})^2 - \beta = 6 - (3+\sqrt{8})$

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta = (3+\sqrt{8}) \\ \beta[(3-\sqrt{8})^2 - 1] = 6 - (3+\sqrt{8}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta = (3+\sqrt{8}) \\ \beta(3-\sqrt{8}-1)(3-\sqrt{8}+1) = 6 - (3+\sqrt{8}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta = (3+\sqrt{8}) \\ \beta(2-\sqrt{8})(4-\sqrt{8}) = 6 - (3+\sqrt{8}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \beta = (3+\sqrt{8}) \\ \beta = \dfrac{6-(3+\sqrt{8})}{(2-\sqrt{8})(4-\sqrt{8})} = \dfrac{-\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(3+\sqrt{8})^2 + \dfrac{-\sqrt{2}}{8} = (3+\sqrt{8}) \\ \beta = \dfrac{-\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{(3+\sqrt{8})+\dfrac{\sqrt{2}}{8}}{(3+\sqrt{8})^2} \\ \beta = \dfrac{-\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\dfrac{24+16\sqrt{2}+\sqrt{2}}{8}}{9+12\sqrt{2}+8} = \dfrac{24+17\sqrt{2}}{8(17+12\sqrt{2})} \\ \beta = \dfrac{-\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{24+17\sqrt{2}}{136+96\sqrt{2}} = \dfrac{(24+17\sqrt{2})(136-96\sqrt{2})}{(136+96\sqrt{2})(136-96\sqrt{2})} \\ \beta = \dfrac{-\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{3264-2304\sqrt{2}+2312\sqrt{2}-3264}{18496-13056\sqrt{2}+13056\sqrt{2}-18432} = \dfrac{8\sqrt{2}}{64} = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ \beta = \dfrac{-\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

La formule générale que l'on obtient est la suivante : (5)

$$x_n = \frac{\sqrt{2}}{8}(3+\sqrt{8})^n + \frac{-\sqrt{2}}{8}(3-\sqrt{8})^n$$

On peut encore la simplifier en la factorisant :

$$x_n = \frac{\sqrt{2}}{8}[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n]$$

Cette formule nous permet bien de retrouver les nombres carrés que nous connaissions déjà. Nous avons pu trouver ensuite 2 autres nombres triangles carrés grâce à celle-ci qui sont 55 420 693 056 et 1 882 672 131 025. Nous nous sommes arrêtés ici car le prochain nombre triangle carré est trop grand pour être calculé à la calculatrice ou sur notre logiciel.

Récapitulons :

Nb de jetons formant un carré et un triangle	x (nombre de rangées du carré)	y (nombre de rangées du triangle)
0	0	0
1	1	1
36	6	8
1 225	35	49
41 616	204	288
1 413 721	1 189	1 681
48 024 900	6 930	9 800
1 631 432 881	40 391	57 121
55 420 693 056	235 416	332 928
1 882 672 131 025	1 372 105	1 940 449

F/ Montrer que tous les nombres x_n^2 seront des nombres triangles carrés

On cherche maintenant à prouver qu'il existe un entier y tel que : $\mathbf{x_n^2} = \frac{y(y+1)}{2}$

c'est-à-dire $\left[\frac{\sqrt{2}}{8} \; [(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n] \right]^2 = \frac{y(y+1)}{2}$

Pour simplifier, on note $(3+2\sqrt{2})^n = \Psi^n$ et $(3-2\sqrt{2})^n = \frac{1}{\Psi^n}$

En effet, si $3+2\sqrt{2} = \Psi$ alors $3-2\sqrt{2} = \frac{1}{\Psi}$

$\rightarrow \quad 3-2\sqrt{2} = \frac{1}{\Psi}$

$3-2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

$1 = (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$

$1 = 9 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 8$

$1 = 1$

On a alors : $\frac{y(y+1)}{2} = \frac{2}{64}\ [(\Psi^n)^2 + (\frac{1}{\Psi^n})^2 - 2]$

$$y^2 + y + \frac{-4}{64}\ [(\Psi^n)^2 + (\frac{1}{\Psi^n})^2 - 2] = 0$$

$$y^2 + y + [\frac{-1}{16}(\Psi^n)^2 - \frac{1}{16}(\frac{1}{\Psi^n})^2 + \frac{1}{8}] = 0$$

On obtient alors une équation du second degré de la forme

$ax^2 + bx + c = 0$ avec $a=1$, $b=1$ et

$$C = \frac{-1}{16}(\Psi^n)^2 - \frac{1}{16}(\frac{1}{\Psi^n})^2 + \frac{1}{8}$$

On calcule ensuite $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= 1^2 \quad -4\ [\frac{-1}{16}(\Psi^n)^2 - \frac{1}{16}(\frac{1}{\Psi^n})^2 + \frac{1}{8}]$$

$$= 1 - [\frac{-1}{4}(\Psi^n)^2 - \frac{1}{4}(\frac{1}{\Psi^n})^2 + \frac{1}{2}]$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(\Psi^n)^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{\Psi^n})^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\Psi^n)^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{\Psi^n})^2 + \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(\Psi^n) + \frac{1}{2}(\frac{1}{\Psi^n})\right)^2$$

Une fois Δ déterminé, on calcule y_1 et y_2 :

$$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\frac{1}{2}(\Psi^n)+\frac{1}{2}(\frac{1}{\Psi^n})}{2} \text{ c'est-à-dire } \frac{\Psi^n+\frac{1}{\Psi^n}-2}{4}$$

Solution positive

$$y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\frac{1}{2}(\Psi^n)-\frac{1}{2}(\frac{1}{\Psi^n})}{2}$$

Solution négative

Seule la solution ainsi trouvée $y_1 = \frac{\Psi^n+\frac{1}{\Psi^n}-2}{4}$ convient puisque nous cherchons une solution positive.

De plus, cette solution l'est pour tout n car $\Psi^n + \frac{1}{\Psi^n} - 2$ est la forme développée de

$[\sqrt{\Psi^n} - \sqrt{\frac{1}{\Psi^n}}]^2$ donc $\frac{\Psi^n+\frac{1}{\Psi^n}-2}{4}$ sera positif.

On cherche maintenant à montrer que la solution $\frac{\Psi^n+\frac{1}{\Psi^n}-2}{4}$ est entière. Pour cela, on utilise la formule du binôme de Newton permettant de calculer les puissances de la somme de deux nombres.

$$\Psi^n = (3+2\sqrt{2})^n = \underbrace{3^n}_{\text{entier}} + \underbrace{C_n^1 * 3^{n-1} * 2\sqrt{2}}_{\text{pas entier}} + \underbrace{C_n^2 * 3^{n-2} * (2\sqrt{2})^2}_{\text{entier}} + \dots \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\Psi^n} = (3-2\sqrt{2})^n = \underbrace{3^n}_{\text{entier}} - \underbrace{C_n^1 * 3^{n-1} * 2\sqrt{2}}_{\text{pas entier}} + \underbrace{C_n^2 * 3^{n-2} * (2\sqrt{2})^2}_{\text{entier}} - \dots$$

Ainsi, en faisant $\Psi^n + \frac{1}{\Psi^n}$ les termes qui ne sont pas entiers vont s'annuler.

On va obtenir $\Psi^n + \frac{1}{\Psi^n} = 2*3^n +$ multiple de 4 + mult de 4 + ...

Donc $\Psi^n + \frac{1}{\Psi^n} - 2 = 2(3^n - 1) +$ mult de 4

Donc

$$y_n = \frac{\Psi^n+\frac{1}{\Psi^n}-2}{4} = \frac{2(3^n-1)+mult\,de\,4}{4} = \frac{2(3^n-1)}{4}+\frac{mult\,de\,4}{4} = \frac{3^n-1}{2}+entier$$

Pour résoudre le problème (montrer que tous les nombres x_n donneront des nombres triangles carrés), il nous reste à démontrer que $\frac{3^n-1}{2}$ est entier.

G/ Ce qu'il nous reste à faire

En plus de montrer que $\frac{3^n-1}{2}$ est entier, il nous reste un autre point à aborder : nous devons essayer de voir s'il n'y a pas d'autres nombres triangles carrés qui ne sont pas sous la forme x_n^2 ou prouver qu'il n'y a pas d'autres nombres triangles carrés que les x_n^2.

Voir notes d'édition page suivante

Notes d'édition

(1) Le terme « fonctions » désigne en fait des suites de nombres entiers.

(2) La notion de nombre triangle carré apparaît sans avoir été définie.

(3) Pourquoi 1 413 700 et pas 1 413 788 ?

(4) Cette conjecture semble parchutée. Il aurait été intéressant que les élèves expliquent la démarche qui les y a conduits et qu'ils définissent leurs notations

(5) à partir de maintenant *Un* est devenu *Xn*

(6) Pour que l'article soit compréhensible par des élèves de même niveau, il serait utile de préciser qu'on utilise ici la formule du binôme de Newton permettant de calculer les puissances d'une somme de deux nombres