Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

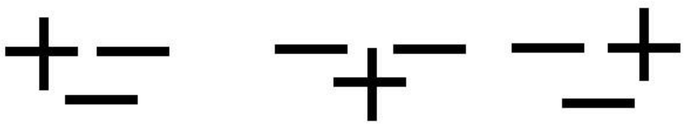
PYRAMIDES DE SIGNES

Année 2014-2015

Par Thibaud MERIEUX et Adrien PLANTADE, classe de seconde
Lycée Jean MONNET, Aurillac
Professeur : Jean-Damien CHAUMAT
Chercheur : Vincent PECASTAING, doctorant à l'Université Paris 11 (Orsay)

Enoncé du problème

Prenons une ligne de signes composée de “+” et de “–”
Nous allons placer, en dessous de chaque paire de signes, le produit des deux signes de cette paire selon la règle des signes :



(1)

Définitions :

– La base désigne la première ligne de la pyramide.
– On appellera n la taille de la base la pyramide.
– Une pyramide est équilibrée lorsqu'elle comporte autant de signes + que de signes –
– Définition : Nouvelle opération # sur l'ensemble { + ; – }

#	+	-
+	+	-
-	-	+

Problèmes :

– *Existe-t-il toujours, pour une pyramide de taille n, une pyramide équilibrée associée ?*
– *Quelles sont les particularités de ces pyramides ?*

Nous nous sommes aussi posé la question :
– *Peut-on trouver une méthode pour obtenir le dernier signe de la pyramide sans faire cette pyramide ?*

Résultats

I) *Pour qu'une pyramide puisse être équilibrée, il faut qu'elle ait un nombre pair de signes.*

Il donc été réalisé un tableau qui donne le nombre de signes en fonction de la taille :

Nombre de signes de la base	Nombre de signes total de la pyramide	Nombre de signes Pair ?
1	1 $\xrightarrow{+2}$	
2	3 $\xrightarrow{+3}$	
3	6 $\xrightarrow{+4}$	OUI
4	10 $\xrightarrow{+5}$	OUI
5	15	
6	21	
7	28	OUI
8	36	OUI
9	45	
10	55	
11	66	OUI
12	78	OUI

Propriété : *Seules les pyramides de taille $n = 4q$ ou $n = 4q + 3$ ont un nombre pair de signes.*

Exemple : Le nombre de signes d'une pyramide de base 4, par exemple, est $4+3+2+1$: ce nombre est triangulaire et égal à $\frac{n^2+n}{2}$.

Lemme : *Il y a 2^n pyramides différentes de taille n.*

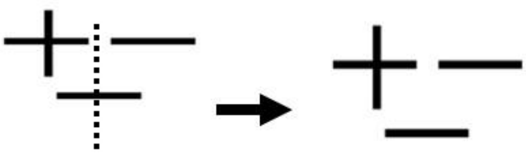
Un programme a alors testé toutes les pyramides de base n et affichait le nombre de pyramides équilibrées, les pyramidées équilibrées et leur proportion par rapport au nombre de possibilités :

Taille n de la pyramide	Nombre 2^n de possibilités	Nombre de pyramides équilibrées	Pourcentage de pyramides équilibrées
3	8	4	50 %
4	16	6	38 %
7	128	12	9 %
8	256	40	16 %
11	2048	171	8 %
12	4096	410	10 %
15	32768	1380	4 %

II) Il a été énoncé par la suite plusieurs propriétés sur les pyramides :

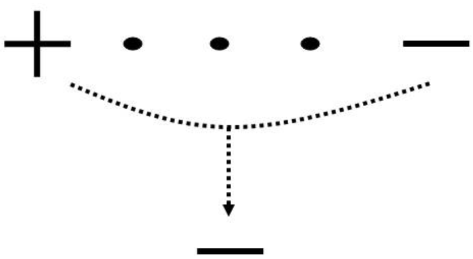
– Lorsqu'on effectue une rotation de 120° sur une pyramide qui respecte la règle des signes, on obtient une nouvelle pyramide qui respecte elle aussi la règle des signes.

– Lorsqu'on effectue une symétrie axiale sur une pyramide qui respecte la règle des signes, on obtient une nouvelle pyramide qui respecte elle aussi la règle des signes.



III) *Obtention du dernier signe de la base.*

- – Pyramides de base n impair ≤ 9 :
  - Il suffit de faire le produit des deux signes des extrémités pour obtenir le dernier signe (2).



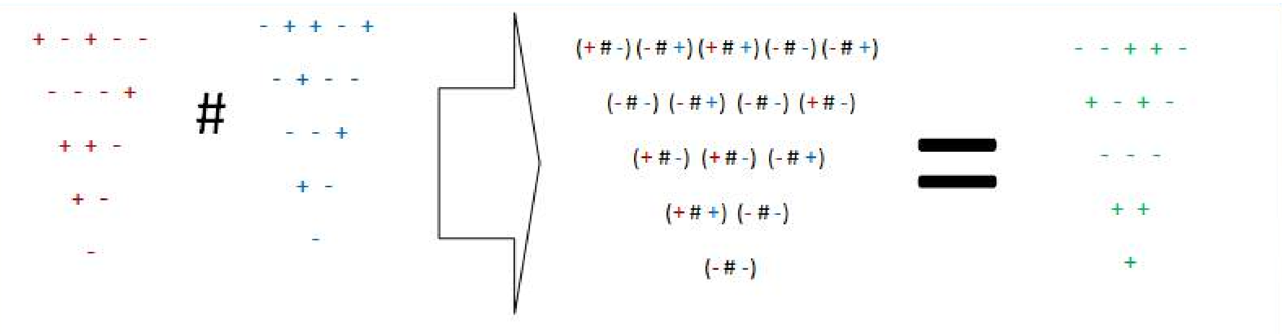
– Pyramides de base n pair $\neq 8$ (3) :

- Prendre les 2 signes de chaque extrémité, appliquer la règle des signes sur chaque couple obtenu et appliquer la règle des signes sur les signes obtenus.

IV) *Technique de superposition.*

En superposant 2 pyramides de base n qui respectent la règle des signes et en appliquant la règle des signes sur les signes qui se superposent on obtient une autre pyramide de base n qui respecte la règle des signes. “Le signe # définit aussi l’opération de superposition.”

Exemple :



Démonstrations

Pour trouver le nombre de pyramides équilibrées de base n, il a fallu un programme, réalisé en Python ; en voici une courte description (4) :

PROGRAMME TESTEUR DE TOUTES LES COMBINAISONS DE PYRAMIDE DE BASE N

La pyramide de signes est ici représentée par un tableau de variables : les + sont remplacés par des 1 et les – par des -1 : la première ligne du tableau correspond alors à la base de la pyramide, les lignes suivantes son donc la suite de la pyramide

Voici la description du programme :

On demande à l'utilisateur le nombre n de signes de la première ligne

On créée le tableau tab de dimensions n*n

Pour i allant de 0 à n :

- On donne la valeur 1 à la première ligne du tableau

Pour loop allant de 1 à 2^n # cette boucle permet de tester toutes les possibilités

- Somme = 0 # somme est la variable qui teste la polarité de la pyramide
- **Pour chiff allant de 0 à n** chiff sera le numéro du signe sur lequel on travaille
    - Si loop est divisible par 2^chiff, alors on change le signe de tab[0][chiff]
- On additionne à somme toute la première ligne du tableau
- **Pour étage allant de 1 à n** # on commence à l'étage 1, pas 0
    - **Pour i allant de 0 à n-étage** (on fera une boucle de moins par étage, ce qui fera la forme de la pyramide)
        - On applique la règle des signes
    - On additionne à somme la valeur de la somme des éléments de la ligne sur laquelle on a travaillé
- Si somme = 0 , on affiche la pyramide

Grâce à l'ensemble { + ; – }, on peut remarquer plusieurs propriétés :

– Les opérations sont commutatives, A # B = B # A

- Cette propriété sert à prouver que l'on peut effectuer une symétrie axiale dont l'axe est perpendiculaire à la base de la pyramide.

– A # A = +

– On peut changer le côté d'un membre de l'équation tout en gardant la validité de l'équation,
A # B = C ⇔ A = B # C

On a donc A # B = C

B = C # A

A # A = +

B # + = B

A # B = C

⇔ A # B # A = C # A

⇔ B # + = C # A

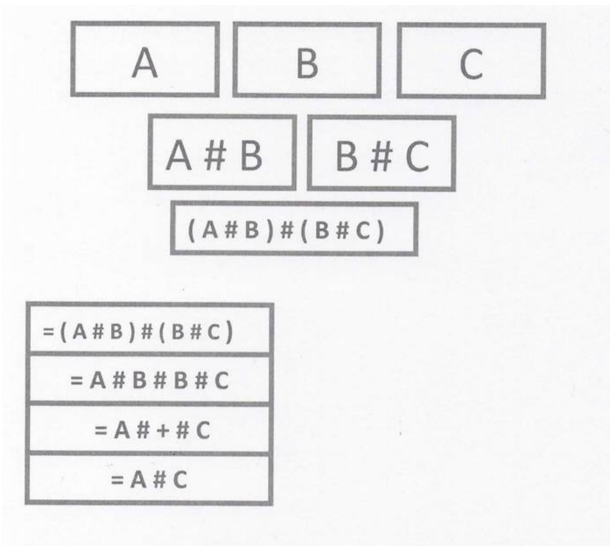
⇔ B = C # A CQFD

- Cette propriété sert à prouver que l'on peut effectuer une symétrie axiale dont l'axe est perpendiculaire à la base de la pyramide.

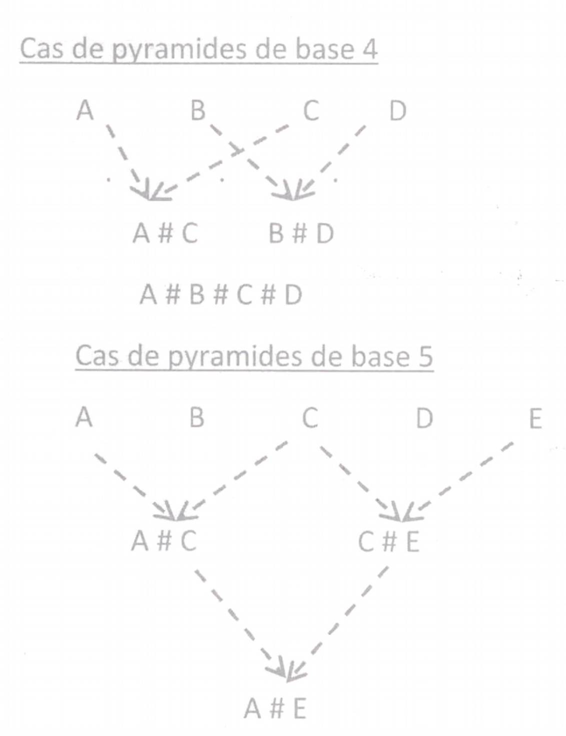
– On peut enlever ou mettre des parenthèses dans une opération à notre guise (5).

Dernier signe

Pyramide de base 3 :

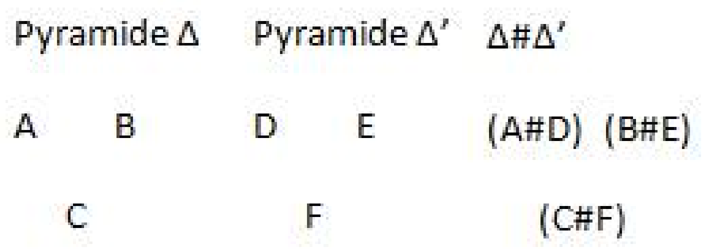


Pyramide de base 4 et 5 :



“Superposition de pyramides”

On se contente de pyramides de base 2 qui respectent la règle des signes.



Prenons 2 pyramides Δ et Δ’ (de base 2) quelconques.

On sait que C = (A#B) et F = (D#E), car Δ et Δ’ respectent la règle des signes. On démontre que la troisième pyramide respecte la règle des signes.
On démontre que C#F=(A#D)#(B#E)
En appliquant les propriétés énoncées ci-dessus, on obtient :

C#F=(A#B)#(D#E)

=A#B#D#E

= A#D#B#E

= (A#D)#(B#E)

Conclusion : C#F est bien égal à (A#D)#(B#E) donc Δ#Δ’ respecte bien la règle des signes.

L’opération # peut être généralisée sur des pyramides Δ et Δ ’ : Δ # Δ’ = Δ’’.

Notes d'édition

(1) Il faut ajouter que + + donne +.

(2) Cette règle est valable pour $n = 3, 5$ et 9, mais pas pour $n = 7$, où on obtient comme dernier signe le produit par l'opération # des premier, troisième, cinquième et dernier signes.

(3) Cette règle s'applique pour $n = 4, 6$ ou 10, mais pas en général. La démonstration n'est d'ailleurs donnée, en fin d'article, que pour $n = 4$.

(4) Dans le programme, notons que les boucles de 0 à n ou de 1 à n, devraient être arrêtées à $n-1$, puisque la numérotation de chaque ligne du tableau et celle des "étages" commencent à 0.

On peut aussi remarquer dans le programme la méthode astucieuse pour obtenir une fois et une seule chaque suite possible de + et – de longueur n dans la boucle principale, qui aurait cependant mérité une explication.

(5) Autrement dit, l'opération est associative.