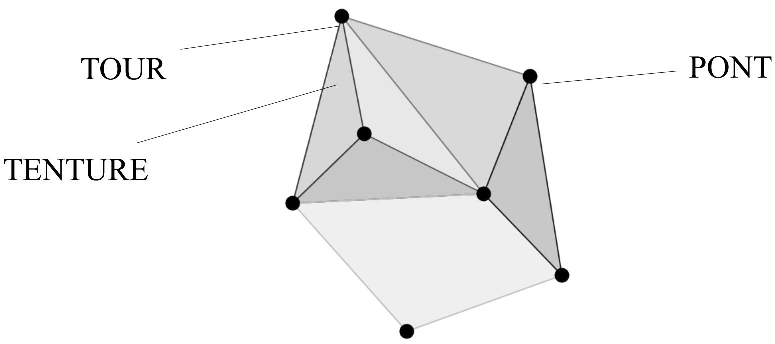
Les Tours de Futurville

Année 2016 - 2017

Élèves de 4ème : Maxime SALEUR et François CASSE.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignantes : Florence FERRY et Claudie ASSELAIN.
Chercheur : Maxime INGREMEAU.

Le sujet : Futurville est décidément une ville étrange : les habitants habitent dans de grandes tours reliées entre elles par des ponts ; il est toujours possible d'aller d'une tour à l'autre en passant par une suite de ponts. Afin d'embellir leur ville, ils ont cru bon d'accrocher des tentures colorées entre les ponts. Y a-t-il un lien entre le nombres de tours, le nombre de ponts et le nombre de tentures ?



Les résultats : Nous avons démontré qu'il existait un lien entre le nombre de tours, le nombre de ponts et le nombre de tentures. Nous avons également trouvé le nombre maximum de ponts et de tentures pour un nombre de tours donné.

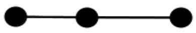
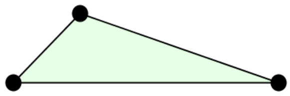
I – Etude d'exemples et premières remarques

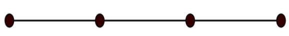
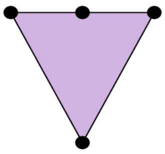
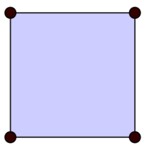
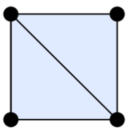
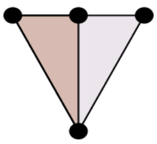
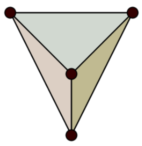
Dans toute la suite on notera : n, le nombre de tours, p, le nombre de ponts et t, le nombre de tentures.
Première remarque : les ponts sont considérés droits et ne peuvent pas se couper entre eux.

Pour commencer, nous avons fait des tableaux pour recenser les différentes figures pour un nombre de tours donné, avec leur nombre de ponts et de tentures. Nous l'avons fait pour 2, 3, 4, 5 et 6 tours ; nous mettons les premiers tableaux, jusqu'à 4 tours.

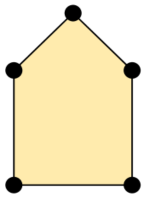
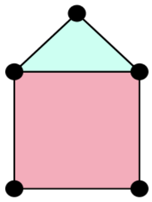
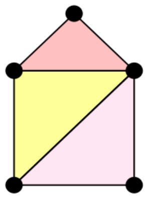
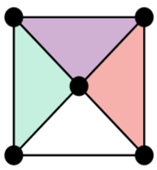
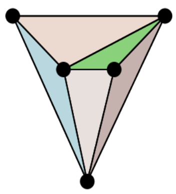
Figures possibles	Nombre de tours	Nombre de ponts	Nombre de tentures
	2	1	0

Pour 2 tours, un seul pont au maximum est créé ; il ne peut y avoir de tenture.

Figures possibles	Nombre de tours	Nombre de ponts	Nombre de tentures
	3	2	0
	3	3	1

Figures possibles	Nombre de tours	Nombre de ponts	Nombre de tentures
	4	3	0
	4	4	1
	4	4	1
	4	5	2
	4	5	2
	4	6	3

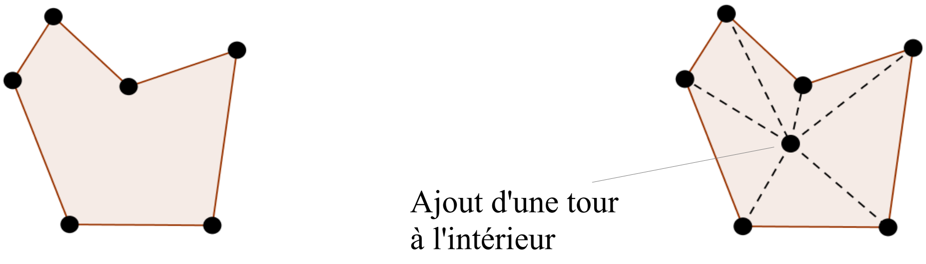
Pour le tableau de 5 tours, nous ne mettons pas tous les exemples.

Figures possibles	Nombre de tours	Nombre de ponts	Nombre de tentures
	5	4	0
	5	5	1
	5	6	2
	5	7	3
	5	8	4
	5	9	5

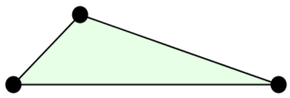
Remarques :

1) le nombre minimum de ponts sera toujours obtenu dans le cas où toutes les tours sont alignées puisque toutes les tours doivent être reliées aux autres. On a donc : p *minimum* $= n - 1$.
Nous aurons alors 0 tenture.

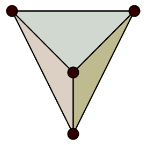
2) nous avons aussi observé que le maximum de ponts est obtenu lorsque les tentures sont triangulaires.
Essayons d'expliquer ce résultat.
Si on ajoute une tour dans un polygone déjà formé, pour avoir le maximum de ponts, il faut la rajouter à l'intérieur de ce polygone : on pourra alors créer autant de ponts que de sommets.



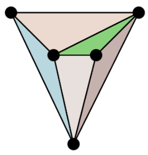
Pour le cas de 3 tours : 3 ponts au maximum peuvent être créés :



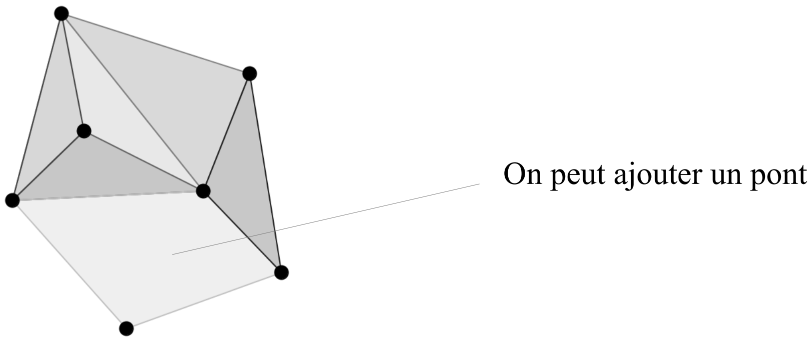
On applique donc ce que l'on vient de dire et on ajoute une tour à l'intérieur et donc 3 ponts :



Puis on recommence le processus :



3 ponts sont ajoutés à chaque fois et 3 tentures se créent, ce sont toutes des triangles.
Les tentures sont toutes triangulaires dans le cas maximum de ponts : si certaines tentures n'étaient pas triangulaires, on pourrait rajouter des ponts.



3) Pour n et p donnés, peu importe la forme de la figure formée, t ne varie pas. En fait c'est comme si on déformait les figures.
Avec cette remarque on a bien l'impression que n, p et t sont liés.
Par ailleurs, nos remarques restent vraies si les ponts ne sont pas droits mais sont des courbes.

4) Nous remarquons encore que, pour n donné, lorsqu'un pont est créé, une seule tenture se crée.

5)
Pour 2 tours : $t = p - 1$
Pour 3 tours : $t = p - 2$
Pour 4 tours : $t = p - 3$

Pour 5 tours : $t = p - 4$
Voici la formule finale que nous conjecturons : $\boldsymbol{t = p - (n - 1)}$

II – Démonstrations

Résultat 1
Nous voulons démontrer cette formule : $t = p - (n - 1)$ c'est à dire que $t = p - n + 1$
Tout d'abord, cette formule est vraie pour 2 tours et 1 pont : t = 1 – 2 + 1 = 0
ainsi que pour 3 tours et 2 ponts : t = 2 – 3 + 1 = 0 ou 3 tours et 3 ponts : t = 3 – 3 + 1 = 1
Il faut maintenant prouver qu'elle est toujours vraie.
On suppose que notre formule est vraie pour n tours et p ponts : $t = p - n + 1$

Si on ajoute un pont, on ne peut le faire que si 2 tours ne sont pas reliées et dans ce cas nous rajoutons une unique tenture. Vérifions donc notre formule :
$(p + 1) - n + 1 = p + 1 - n + 1 = p - n + 1 + 1 = (p - n + 1) + 1 = t + 1$. La formule est encore vraie.

Si maintenant nous rajoutons une tour et un pont à une figure déjà créée (on ne peut pas rajouter une tour sans aucun pont sinon la tour ajoutée ne serait pas reliée aux autres tours), le nombre de tentures reste le même.
$(p + 1) - (n + 1) + 1$ → 1 pont de plus et 1 tour de plus

$(p + 1) - (n + 1) + 1 = p + 1 - n - 1 + 1 = p - n + 1 = t$. La formule reste vraie.

Résultat 2 (1)

Le nombre de ponts maximum est $3n - 6$ pour n entier supérieur ou égal à 3.
A l'étape n = 3 : le nombre de ponts maximum p est 3 ; on a bien $3\times3-6=3$.
Supposons qu'à l'étape où il y a n tours (n>2), le nombre de ponts maximum est $3n - 6$.
Si on rajoute une tour, nous avons vu que pour avoir un nombre maximum de ponts, on rajoute cette tour à l'intérieur et cela nous crée 3 ponts maximum.
Le nombre de ponts maximum devient $3n - 6 + 3$ ce qui nous donne bien : $3(n + 1) - 6$.

Résultat 3
Le nombre de tentures maximum est $2n - 5$.
Le nombre de tentures maximum est obtenu lorsque nous avons un nombre maximum de ponts.
En appliquant le résultat 1, ce nombre est : $t = p - n + 1$ et avec le résultat 2 : $p = 3n - 6$.
Ce qui nous donne : $t = p - n + 1 = 3n - 6 - n + 1 = 2n - 5$.

Conclusion : Soit *n* le nombre de tours donné.

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{t = p - n + 1} \\ \boldsymbol{p \text{ maximum} = 3n - 6} \\ \boldsymbol{t \text{ maximum} = 2n - 5} \end{array}}$$

III – Application sur un exemple

Prenons des exemples pour appliquer tous nos résultats.

Exemple 1 : on prend 15 tours (n = 15).

Le nombre de ponts minimum est 14 (n – 1= 15 – 1) pour 0 tenture.
Le nombre de ponts pourra varier de 14 à son maximum qui est 39 ($3n$ – 6 = 45 – 6) pour 25 tentures maximum ($2n$ – 5 = 30 – 5).

Exemple 2 : On prend 42 tours et 53 ponts. Le nombre de tentures sera : 53 – 42 + 1 = 12

A vous de jouer !
Compléter le texte suivant :

Pour **23** tours, le nombre de ponts est compris entre ____ et ____.

Si on prend **50** ponts, le nombre de tentures sera de ______.

Réponses : entre 22 et 63 / sera de 28

Note d'édition

(1) Dans la démonstration du résultat 2, les auteurs admettent que le nombre maximum de ponts d'une ville de n+1 tours vient d'une configuration de n tours avec un nombre maximum de ponts, ce qui est assez intuitif.