Des cartes, de la magie et des maths

Année 2016 – 2017

Elias BERRAMDANE, Eloïse COLLOC, Jenna GIRARD, Lucas LE GOAS, Mickaël REIGNER en classe de 5ème

Encadrés par Morgan IDE

Établissement : Collège Henry de Montherlant de Neuilly-en-Thelle

Chercheur : Marc BONINO (Université Paris 13)

Présentation du sujet :

Des cartes, de la magie et des maths.

Un magicien dispose sur une table quinze cartes à jouer différentes en trois lignes et cinq colonnes, face visible.

1- Il demande alors à une personne du public de choisir mentalement une carte puis de lui dire seulement la ligne où elle se trouve (ligne un, deux ou trois).

2- Il ramasse ensuite les cartes de chaque ligne de gauche à droite, en plaçant la première en haut, la seconde en-dessous, et ainsi de suite. Il empile alors ses trois tas de cinq cartes pour former un seul paquet de quinze cartes, en prenant soin de mettre en deuxième position les cartes provenant de la ligne indiquée.

3- Le magicien repose les cartes en trois lignes et cinq colonnes dans l'ordre suivant : la première sur la première colonne de la première ligne, la deuxième sur la première colonne de la deuxième ligne, la troisième sur la première colonne de la troisième ligne, la quatrième sur la deuxième colonne de la première ligne, etc. Il redemande à la personne du public dans quelle ligne se trouve la carte qu'il a choisie.

4- Il refait alors un seul paquet de cartes de la même manière qu'au-dessus (2) et les dispose à nouveau sur la table comme auparavant (3). Il demande une nouvelle fois dans quelle ligne se trouve la carte mystérieuse et affirme alors que cette carte est celle se trouvant dans la troisième colonne !

Vous pouvez jouer le rôle du magicien et voir que vous aurez toujours raison ! Comment expliquer cela ? Pouvez-vous trouver d'autres dispositions des cartes (en m lignes et n colonnes) pour lesquelles un tour similaire marcherait ? Ou ne marcherait pas ?

Annonce des conjectures et résultats obtenus (1)

Conjecture 1: Pour le tour 5x3 Il semblerait que la carte choisie arrive dans la colonne du milieu.

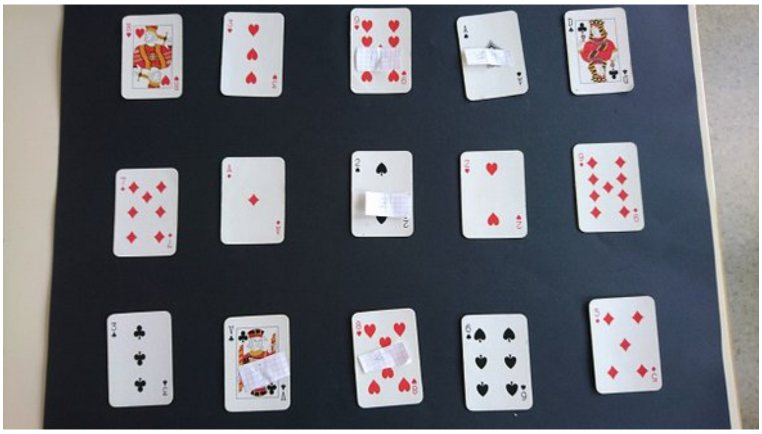
Conjecture 2: Si le nombre de lignes moins un ne divise pas le nombre de colonne alors le tour fonctionne.

Texte de l’article

1. Le tour 5x3 : pourquoi fonctionne-t-il ?

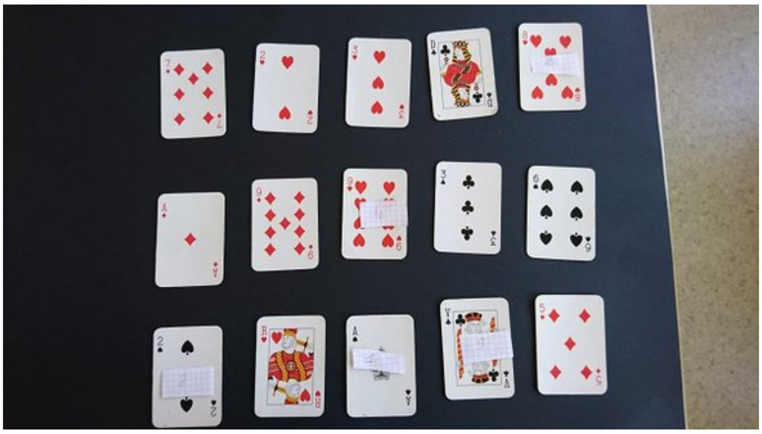
Les cartes sont numérotées de 1 à 5 et positionnées de la droite vers la gauche.
La troisième ligne est en haut de l'image, le deuxième au milieu et la première tout en bas.
La carte choisie est la 4. Le tour se déroule comme dans le sujet :

Les cartes sont disposées et la ligne choisie est la deuxième.
Première manipulation, les cartes sont redistribuées, les 5 cartes choisies se retrouvent dans les colonnes centrales.



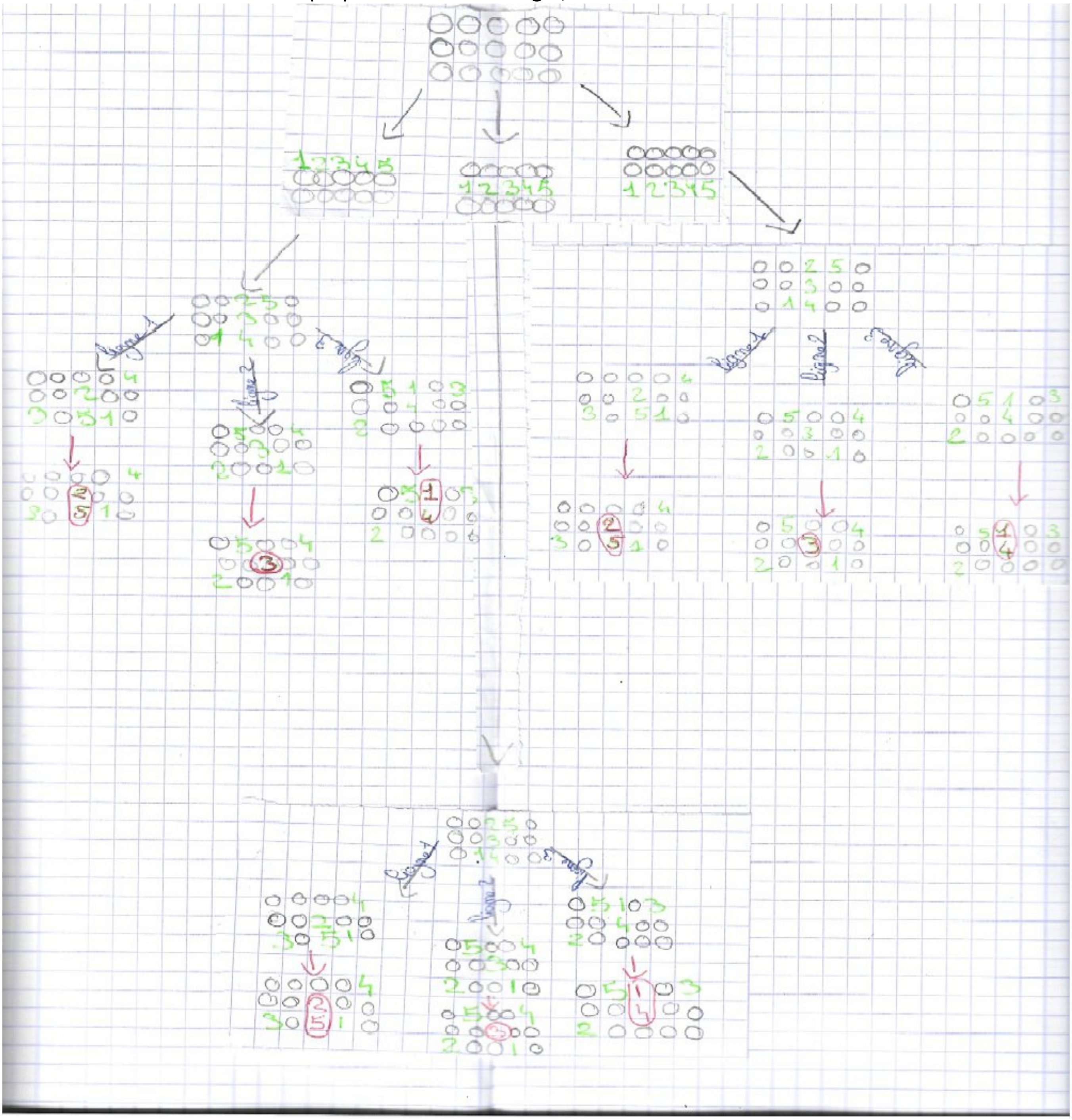
La carte 4 est en première ligne. Il n'y a plus que deux possibilités : 1 et 4.

Deuxième manipulation, les 5 cartes sont redistribuées.
La ligne choisie (la deuxième), ne nous offre qu'une possibilité ; la carte est enfin trouvée.



<u>Conjecture 1:</u> Il semblerait que la carte choisie arrive dans la colonne du milieu.

Pour expliquer ce tour de magie, nous avons créé un arbre.



L'arbre représente le tour 5x3.

Nous avons découvert grâce à cet arbre que le sort de la carte choisie était toujours le même. Quelque soit la carte choisie celle-ci arrive toujours dans la colonne du milieu (2).

Exemple : Si la carte choisie est 3, elle arrive dans la colonne du milieu, si la carte choisie est 2, elle arrive toujours au milieu.

2. Un critère pour les trouver

On appelle un tour qui fonctionne un tour dont la carte choisie arrive toujours dans la même colonne (3).

Nous avons cherché des tours qui ne fonctionnent pas comme : 8x2 ou 4x3 ou encore 4x2 (4). Nous sommes alors venus à penser que le magicien aurait besoin de trouver des tours qui fonctionnent ou pas. Nous avons donc cherché un calcul qui nous dirait instantanément si le tour fonctionne ou pas. Nous avons alors trouvé ce résultat : si le nombre de lignes moins un divise le nombre de colonne, alors cela ne fonctionne pas. Nos résultats sont incertains.

1. Conclusion

En conclusion, on pense qu'un tour fonctionne si le nombre de lignes moins un ne divise pas le nombre de colonne (5).

Notes d'édition

(1) La première conjecture est démontrée dans la suite, par l'étude de tous les cas. Par contre la seconde n'est pas vraiment motivée et ne semble pas juste.

(2) Tous les cas possibles sont présentés dans l'arbre au-dessus. La conjecture 1 est donc démontrée.

(3) Il aurait fallu dire comment procède le “magicien” pour les autres tours : après le choix des lignes il ramasse les cartes ligne par ligne en choisissant où il place la ligne choisie ; s'il y a un nombre impair de lignes on peut supposer qu'il la place au centre, mais s'il y a un nombre pair de lignes ? Et pour un grand nombre de cartes, il faut sans doute prévoir plus de 3 étapes ?

(4) Pour les tours avec deux lignes, on peut placer les cartes de la ligne choisie en première position ; alors la carte à trouver finira toujours par se trouver en première colonne. Si on place la ligne choisie en fin de paquet, elle finira par se trouver en dernière position. On peut donc dire que le tour fonctionne.
Par contre, pour le tour 4x3, la carte choisie arrivera en 2e position sur la 3e ligne si elle était sur l'une des deux premières colonnes, et sinon en 3e position sur la 1e ligne : on peut donc dire que le tour “ne fonctionne pas” (sauf que le magicien peut tout de même trouver la carte, selon la dernière ligne choisie).

(5) Il semble plutôt que ce qu'on observe pour le tour 4x3 se généralise aux tours avec un nombre pair de colonnes et un nombre impair de lignes, et que dans les autres cas cela fonctionne (moyennant le choix à faire s'il y a un nombre pair de lignes, et un nombre d'étapes suffisant).