LA TOUR DE PISE

Année 2017 – 2018

Séraphine BENSA, Matthieu CHAMBOLLE et Hugo CHAMBOLLE, élèves de classe de 6ème
Encadrés par Gwenaëlle LAVOINE
Établissement : collège Madame de Staël, Paris.
Chercheur : Thomas FERNIQUE, Laboratoire d'Informatique de l'Université Paris Nord.

Sujet : Réaliser le plus grand surplomb possible avec un certain nombre de dominos (le surplomb étant la longueur entre le bord du premier posé et le bord du dernier empilé).

Résultats :

Pour deux dominos, nous avons trouvé que le meilleur résultat était de placer le deuxième domino à la moitié du premier. La taille du surplomb est alors d'$\frac{1}{2}$ domino.

Avec trois dominos, pour trouver le surplomb maximal, il faut placer le deuxième domino à ¼ de domino du premier et le troisième domino à ½ domino du deuxième. On écrit $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ et le surplomb maximal est de $\frac{3}{4}$ de domino.

Pour quatre dominos nous avons trouvé que le meilleur surplomb était de $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ de décalage ce qui donne une taille de $\frac{11}{12}$.

Et pour cinq dominos, $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ ce qui donne une taille de $\frac{25}{24}$ de domino c'est à dire 1 domino $+\frac{1}{24}$ de domino.

La formule pour trouver le positionnement pour n'importe quel domino est : $\frac{1}{2(n-r)}$.

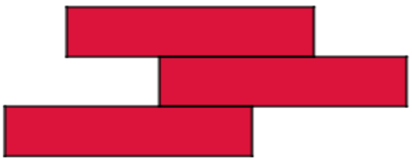
Nombre de dominos	2	3	4	5
Positionnement	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$
Surplomb	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{25}{24}$

Explication des résultats :

Pour commencer, nous exprimerons nos résultats en fractions de dominos, car si nous les exprimions en centimètres et qu'on nous donnait des dominos de tailles différentes tous nos résultats seraient modifiés.

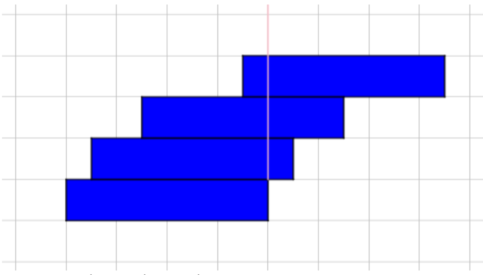
Tout d'abord, pour deux dominos, nous ne nous sommes pas vraiment posés de question et avons rapidement trouvé le résultat de $\frac{1}{2}$ comme nous l'avons précisé dans le paragraphe précédent.

Pour trois dominos nous avons émis beaucoup d'hypothèses notamment de réaliser un contrepoids.



Cette solution n'était finalement pas la meilleure car cela aurait évidemment assuré le maintien des dominos mais n'aurait pas aidé à réaliser le plus grand surplomb. Nous avons écarté cette solution. En revanche, après de nombreux essais, nous avons trouvé le résultat de $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$.

Pour quatre dominos, nous nous sommes posés plus de questions dont celle du contrepoids qui ne fonctionnait toujours pas. Nous avons fait beaucoup d'essais puis avons trouvé $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$. Le chercheur nous a demandé d' «équilibrer» la construction. Nous devions considérer que l'arrête en haut à droite de la base était une « balance ».



Le décalage de $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ devenait donc $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$. Mais nous avons rapidement découvert qu'il existait un surplomb plus grand : $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$.

Pour cinq dominos nous avons trouvé trois solutions. La première était $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$. En équilibrant les dominos cela donnait $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$. Notre professeur nous a donné une autre solution qui était $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$.

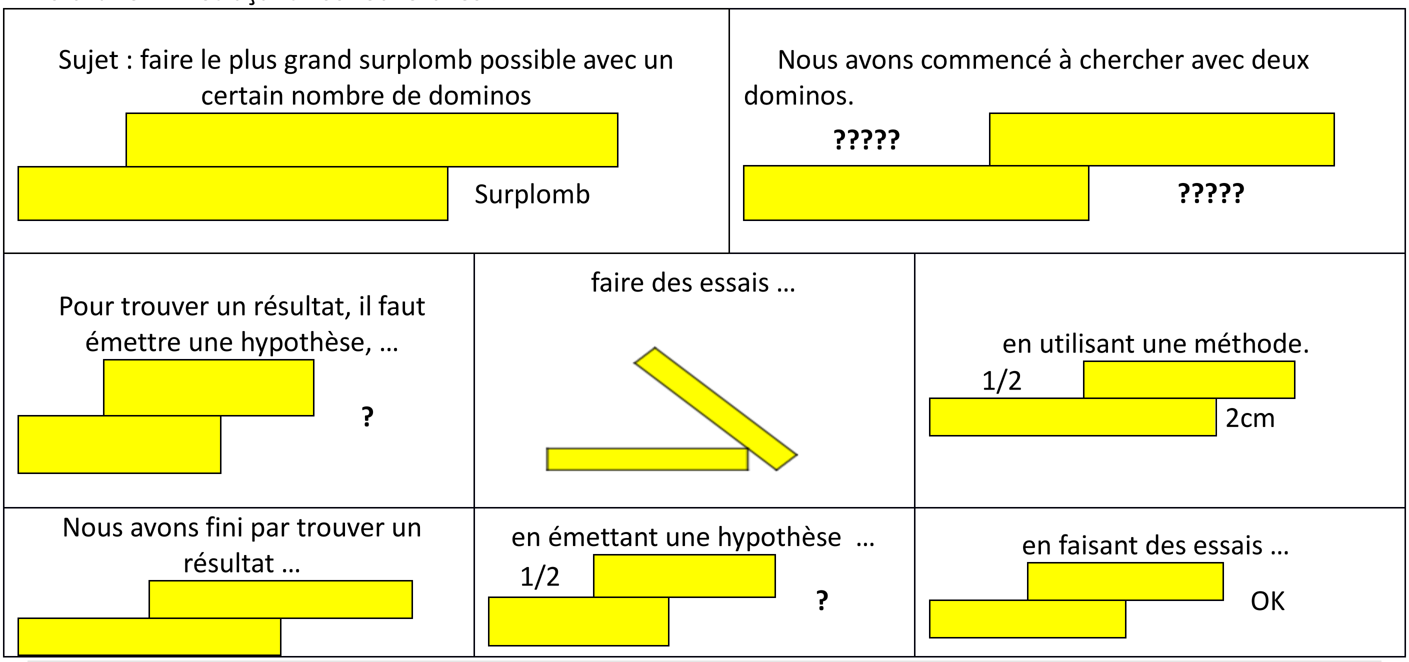
Formule :

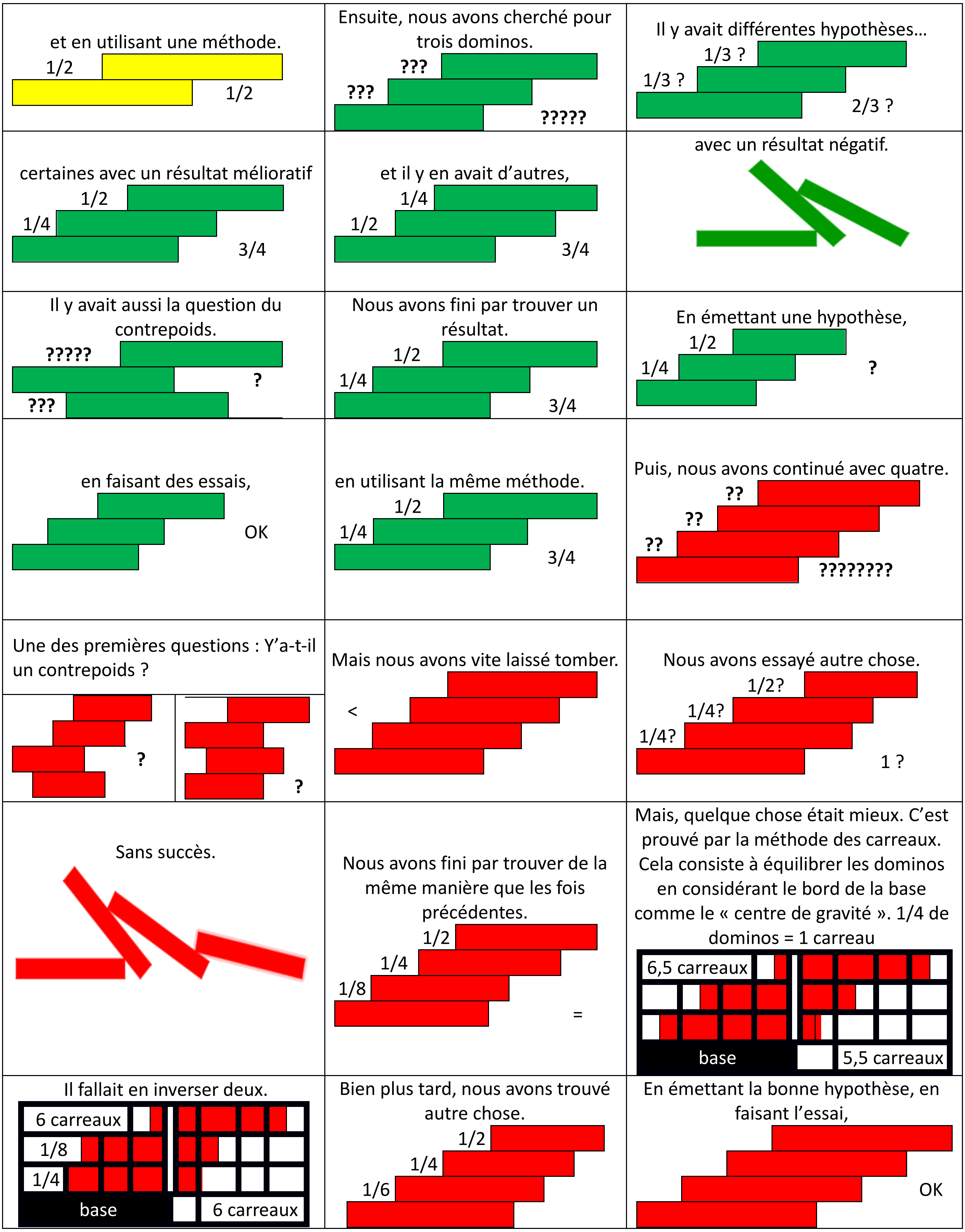
Nous avons essayé de trouver une logique entre tous nos résultats qui se résumait par une formule : $\frac{1}{2(N-R)}$

Explication de la formule :

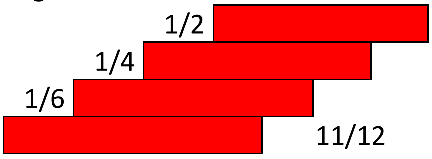
Le 1 : la formule est une fraction. Le 1 représente une partie d'un domino.
Le 2 : Le 2 représente la multiplication par deux du nombre obtenu par la soustraction de N-R car : N est le nombre de dominos que contient la construction. R est le rang (ou étage) où est placé le domino par rapport au sol (la base (ou rez-de-chaussée) ne compte pas.
Nous devons multiplier par deux le résultat car si nous ne multiplions pas par deux, l'écart serait trop grand :
Exemple : On cherche, sur une construction de 33 dominos (N), comment placer le 17ème « étage » (R) de la construction par rapport au 16ème.
On applique la formule : $\frac{1}{2(N-R)}$, soit : $\frac{1}{2(33-17)}$. Il faut donc placer le 17ème domino à $\frac{1}{32}$ de domino par rapport au 16ème domino.

Voici une BD retraçant nos recherches :



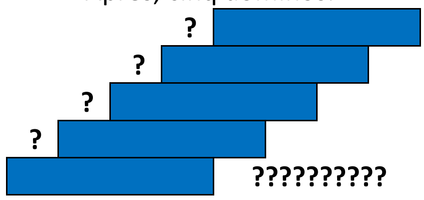

et en utilisant une méthode.
1/2
1/2
Ensuite, nous avons cherché pour trois dominos.
???
???
?????
Il y avait différentes hypothèses…
1/3 ?
1/3 ?
2/3 ?
certaines avec un résultat mélioratif
1/2
1/4
3/4
et il y en avait d'autres,
1/4
1/2
3/4
avec un résultat négatif.
Il y avait aussi la question du contrepoids.
?????
?
???
Nous avons fini par trouver un résultat.
1/2
1/4
3/4
En émettant une hypothèse,
1/2
1/4
?
en faisant des essais,
OK
en utilisant la même méthode.
1/2
1/4
3/4
Puis, nous avons continué avec quatre.
??
??
??
????????
Une des premières questions : Y'a-t-il un contrepoids ?
?
?
Mais nous avons vite laissé tomber.
<
Nous avons essayé autre chose.
1/2?
1/4?
1/4?
1 ?
Sans succès.
Nous avons fini par trouver de la même manière que les fois précédentes.
1/2
1/4
1/8
=
Mais, quelque chose était mieux. C'est prouvé par la méthode des carreaux. Cela consiste à équilibrer les dominos en considérant le bord de la base comme le « centre de gravité ». 1/4 de dominos = 1 carreau
6,5 carreaux
base
5,5 carreaux
Il fallait en inverser deux.
6 carreaux
1/8
1/4
base
6 carreaux
Bien plus tard, nous avons trouvé autre chose.
1/2
1/4
1/6
En émettant la bonne hypothèse, en faisant l'essai,
OK

en gardant la même méthode.

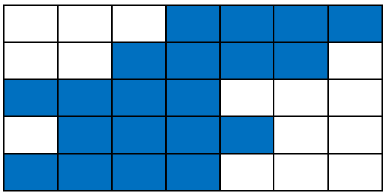


Comme on peut le constater, nos résultats se ressemblent. En effet, nous avons 1/2, puis 1/4+1/2 puis 1/6+1/4+1/2 (nous trouvions ce dernier résultat alors que l'on commençait avec six dominos (sans résultat).

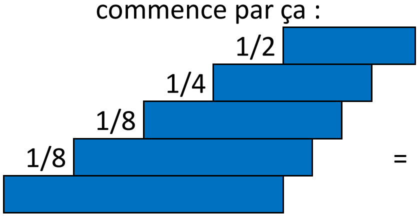
Après, cinq dominos.



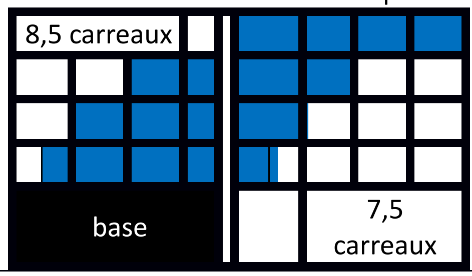
Il n'y avait pas de contrepoids et les méthodes restaient les mêmes.



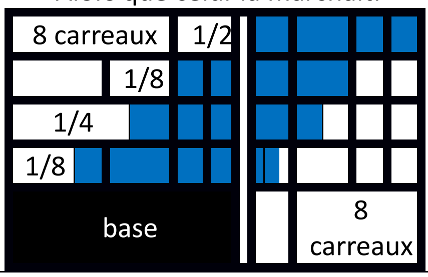
La logique voulait que l'on commence par ça :



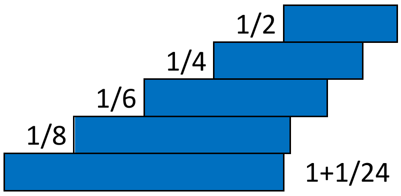
Mais ce résultat ne marchait pas.



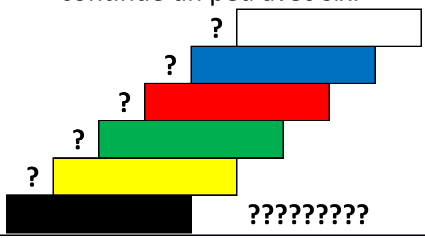
Alors que celui-là marchait.



Finalement, nous avons trouvé ce résultat.



Avant de le trouver, nous avions continué un peu avec six.



Puis nous avons trouvé LA méthode pour le positionnement

Cette méthode est : $\frac{1}{2(n\text{-}r)}$

n = nombre de dominos
r = rang du domino (la base ne compte pas)

Exemple : le 67ème domino sur une construction de 548 dominos.

Formule

$$P = \frac{1}{2(n-r)} = \frac{1}{2(548-66)} = \frac{1}{2 \times 482} = \frac{1}{964}$$

Le 67ème domino doit se positionner à $\frac{1}{964}$ème du 66ème domino.

Nous n'avons malheureusement pas trouvé de méthode pour trouver la taille d'un surplomb. (1)

Notes d'édition

(1) La taille d'un surplomb est potentiellement infinie. Précisément toute longueur donnée peut être dépassée car l'addition cumulée des fractions 1/2+1/4+1/6+1/8+… tend vers l'infini. Cette avancée vers l'infini est certes très lente et surtout physiquement impossible.