# Les tours de Hanoï dans tous leurs états

Par
Roxane FRADIN
Toscane CAREGHI
Charly-Romy TANGA

Première
Et Terminale


## Règles : les tours de Hanoï

Au début, les disques sont disposés, par taille, sur un pilier.
On ne peut déplacer qu'un disque à la fois.
On ne peut pas placer un disque plus grand sur un disque plus petit.
On peut déplacer un disque sur le pilier voisin (**déplacement avec contrainte**) ou sur n'importe quel pilier (**déplacement sans contrainte**).

## Problème

**Selon les différents paramètres n (nombre de disques) et p (nombre de piliers), et avec ou sans contrainte, combien de coups nous faudra-t-il, au minimum, pour reconstruire la tour sur un autre pilier que celui de départ ?**

## Expérimentations

En nous aidant d'un jeu, nous avons fait plusieurs essais et obtenu les résultats suivants

*n disques, p=3 piliers sans contrainte*

| *n* | Nombre de déplacements |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 7 |
| 4 | 15 |

*n disques, p=3 piliers avec contrainte*

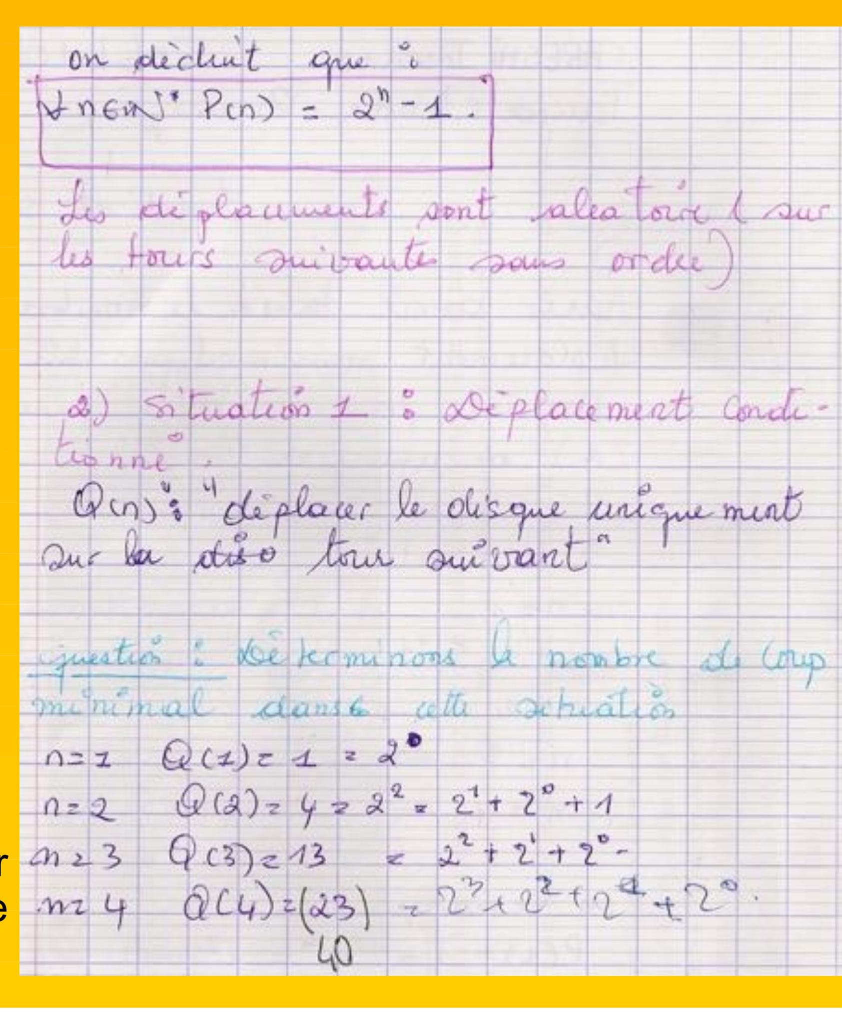
| *n* | Nombre de déplacements |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 13 |
| 4 | 40 |
| 5 | 121 |

*n disques, p=4 piliers sans contrainte*

| *n* | Nombre de déplacements |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |
| 4 | 9 |
| 5 | 13 |
| 6 | 21 |

Il n'a pas toujours été facile de trouver une méthode optimale et, pour les cas avec contrainte, il peut arriver que la position de départ soit importante. Nous avons toujours pris comme position de départ le pilier le plus à gauche.

Confrontation des résultats avec les élèves roumains


on déduit que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n) = 2^n - 1$.
Les déplacements sont aléatoire (sur les tours suivants sans ordre)
2) Situation 1 : Déplacement conditionné.
Q(n) : "déplacer le disque uniquement sur la tour suivant"
question : Déterminons le nombre de coup minimal dans cette situation
n=1 $Q(1) = 1 = 2^0$
n=2 $Q(2) = 4 = 2^2 = 2^1 + 2^0 + 1$
n=3 $Q(3) = 13 = 2^2 + 2^1 + 2^0 -$
n=4 $Q(4) = (23) = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.
40

Extrait du cahier de recherche

# Cas à n disques, 3 piliers et sans contrainte

$$Q_n = Q_{n-1} + 1 + Q_{n-1} = 2Q_{n-1} + 1 \longrightarrow Q_n = 2^n - 1$$

où $Q_n$ nombre de déplacements de $n$ disques

$Q_{n-1}$ déplacements

$Q_{n-1}$ déplacements

1 déplacement

Les élèves de Cluj obtiennent les mêmes résultats

# Cas à n disques, 3 piliers et avec contrainte

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-1} + 1 + Q_{n-1} = 3Q_{n-1} + 1 \longrightarrow Q_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

où $Q_n$ nombre de déplacements de $n$ disques

$Q_{n-1}$ déplacements

$Q_{n-1}$ déplacements

$Q_{n-1}$ déplacements

1 déplacement

Réalisation du montage photos

# Cas à n disques, 4 piliers et sans contrainte

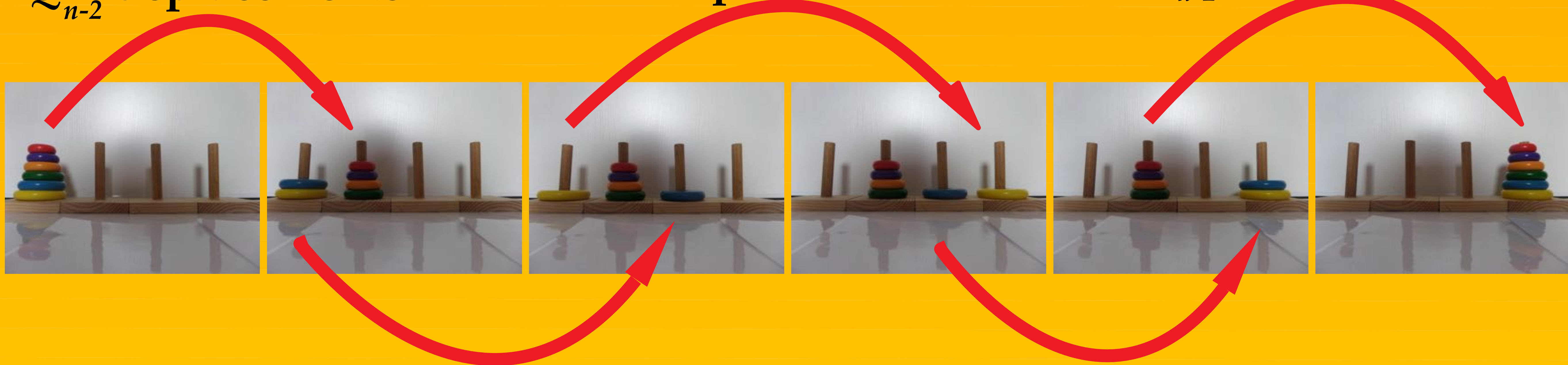
$$Q_n = Q_{n-2} + 1 + 1 + 1 + Q_{n-2} = 2Q_{n-2} + 3 \longrightarrow Q_n = \begin{cases} 4 \times 2^{p-1} - 3 & si \quad n = 2p-1 \\ 6 \times 2^{p-1} - 3 & si \quad n = 2p \end{cases}$$

où $Q_n$ nombre de déplacements de $n$ disques

$Q_{n-2}$ déplacements

1 déplacement

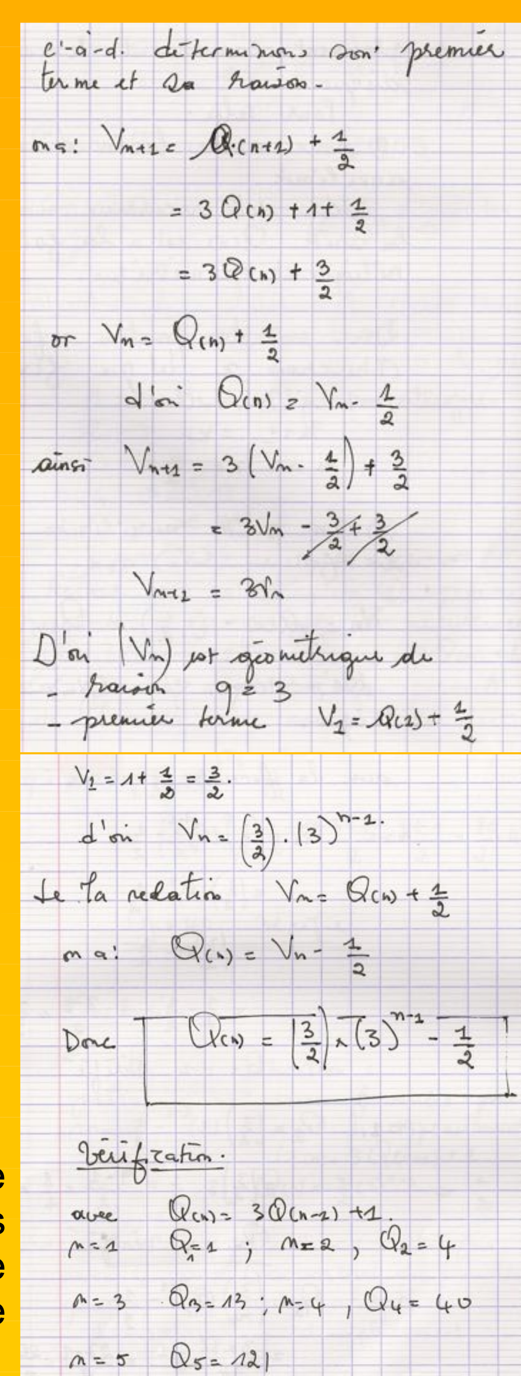
$Q_{n-2}$ déplacements



1 déplacement

1 déplacement

Rédaction de la présentation pour le congrès de Nice



c'-à-d. déterminons son premier terme et sa raison.

on a : $V_{n+1} = Q(n+1) + \frac{1}{2}$

$= 3Q(n) + 1 + \frac{1}{2}$

$= 3Q(n) + \frac{3}{2}$

or $V_n = Q(n) + \frac{1}{2}$

d'où $Q(n) = V_n - \frac{1}{2}$

ainsi $V_{n+1} = 3\left(V_n - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$

$= 3V_n - \cancel{\frac{3}{2}} + \cancel{\frac{3}{2}}$

$V_{n+1} = 3V_n$

D'où $(V_n)$ est géométrique de
- raison $q = 3$
- premier terme $V_1 = Q(1) + \frac{1}{2}$

$V_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

d'où $V_n = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot (3)^{n-1}$.

de la relation $V_n = Q(n) + \frac{1}{2}$

on a : $Q(n) = V_n - \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{Q(n) = \left(\frac{3}{2}\right) \times (3)^{n-1} - \frac{1}{2}}$

Vérification.

avec $Q(n) = 3Q(n-1) + 1$.

$n = 1$ $Q_1 = 1$ ; $n = 2$, $Q_2 = 4$

$n = 3$ $Q_3 = 13$ ; $n = 4$, $Q_4 = 40$

$n = 5$ $Q_5 = 121$

Extrait de démonstrations sur le cahier de recherche