Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

UN TOUR DE FIBOMAGIE

Année 2013-2014

Cyril PICAULT, MARIETTE Axel et DINTHONGXAY Alexandre, élèves de 3ème
Malo HILLAIRET, élève de 4ème

Encadrés par : Madame Rougerie

Etablissement : Collège Étienne Dolet à Orléans

Chercheur : M. Cepa de l'Université d'Orléans.

M. Cepa nous a présenté un tour de magie :

On a 10 lignes.
On choisit deux nombres entiers, n'importe lesquels,
on en met un sur la 1ère ligne et un autre sur la deuxième.

Pour trouver la ligne suivante, il faut additionner les nombres des deux lignes précédentes et ainsi de suite jusqu'à la dixième.

1) ……………..
2) ……………..
3) ……………..
4) ……………..
5) ……………..
6) ……………..
7) ……………..
8) ……………..
9) ……………..
10) ……………..

Résultat 1 :
Lorsque l'on fait la somme des 6 premières lignes et que l'on divise par la cinquième ligne, on trouve toujours 4.

Résultat 2 :
Lorsque l'on fait la somme des 10 lignes qu'on divise par la septième, on trouve toujours 11.

Résultat 3 :
Lorsque l'on divise la dixième ligne par la neuvième ligne, on trouve toujours un nombre commençant par 1,61.

Pour expliquer ces résultats, on reprend 10 lignes et on remplace le premier nombre par «x» et le deuxième nombre par «y».
Ainsi, on obtient $x + 2y$ dans la troisième ligne et $2x + 3y$ dans la quatrième.

Et ainsi de suite, pour obtenir le tableau suivant :

Ligne 1	***X***
Ligne 2	***Y***
Ligne 3	***X + Y***
Ligne 4	***X + 2 Y***
Ligne 5	***2 X + 3 Y***
Ligne 6	***3 X + 5 Y***
Ligne 7	***5 X + 8 Y***
Ligne 8	***8 X + 13 Y***
Ligne 9	***13 X + 21 Y***
Ligne 10	***21 X + 34 Y***

<u>Preuve du résultat 1</u> :
Lorsque l'on fait la somme des 6 premières lignes de ce tableau, on obtient $8x+12y$.
La cinquième ligne contient : $2x+3y$.

On remarque que : $8x + 12y = 4\,(2x + 3y)$

Donc la somme des 6 premières lignes est toujours égale à 4 fois le nombre inscrit dans la cinquième ligne.
<u>Preuve du résultat 2</u> :
De la même façon, la somme des 10 premières lignes est toujours égale à 7 fois nombre inscrit dans la septième ligne : $55\,x + 88\,y = 11\,(5x + 8y)$

Après le congrès, nous avons trouvé un nouveau résultat :

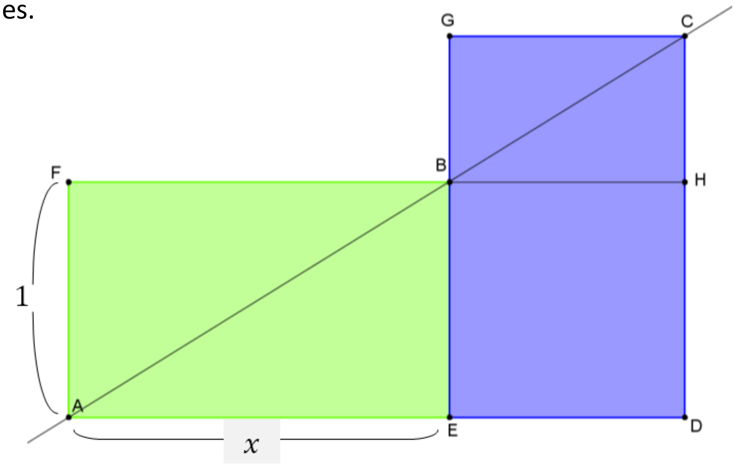
<u>Résultat 4</u> :
La somme des nombres inscrits dans les 18 premières lignes est toujours égale à 76 fois le nombre inscrit dans la onzième ligne.

La démonstration étant semblable aux précédentes, nous vous laissons le soin de la faire...

Nous ne détaillerons pas ici la démonstration du résultat 3. En voici quand même les grandes lignes.

Résultat 5 :

Soient AEBF et EDCG deux rectangles identiques.
E, B et G sont alignés dans cet ordre.
F, B et H sont alignés dans cet ordre.



Les points A, B et C sont alignés lorsque la longueur AE est égale au nombre d'or, soit environ 1,61.

Résultat 6 :

Pour quatre nombres a, b, c et d strictement positifs :

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ alors : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Il suffira pour finir de remarquer que :

- Le quotient de la 10ème ligne par la 9ème ligne est égal à : $\frac{21\ X+34\ Y}{13\ X+21\ Y}$.
- $\frac{21}{13} \approx 1{,}61538$ (valeur approchée par défaut)
- $\frac{34}{21} \approx 1{,}61905$ (valeur approchée par excès)(1)

Conclusion

La suite de nombres avec laquelle nous avons travaillé pour l'établir s'appelle la suite de Fibonacci. Cette suite nous réserve encore bien des mystères. Mais bientôt, grâce à nous et peut-être grâce à d'autres personnes qui l'étudieront, elle nous dévoilera tous ses secrets...

Note d'éditions

(1)Il est regrettable que la preuve de ce résultat ne soit pas donnée