

# TOPOLOGIE

Année 2007 - 2008

Elèves : Charlotte Hebrant, Julien Schoumacher 4<sup>ème</sup>  
Enseignantes : Louissette HIRIART, Christelle KUNC  
Etablissement : Collège G Chepfer - Villers les Nancy  
Chercheur : Thomas CHAMBRION (université Henri Poincaré, Nancy)

**Au début de l'année scolaire**, nous avons travaillé sur le problème des ponts de Königsberg, dont le but était de passer par les sept ponts sans passer deux fois par le même. Après plusieurs essais, nous avons cherché tous les chemins possibles (pour cela nous avons eu l'idée de construire un arbre) et nous avons constaté si on s'interdisait de passer 2 fois sur le même pont, aucun chemin ne passait par tous les ponts et que le maximum de ponts empruntés était de six. Nous avons réussi à montrer l'impossibilité du problème grâce à la construction de l'arbre. Nous nous sommes alors demandé si on ne pouvait pas trouver une « règle » pour pouvoir affirmer l'impossibilité de passer sur tous les 7 ponts une et une seule fois. Nous avons tout d'abord simplifié le problème, de façon à transformer le problème en une « figure plane ».



Ponts de Königsberg

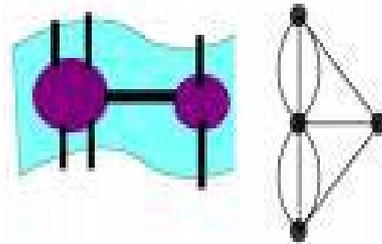
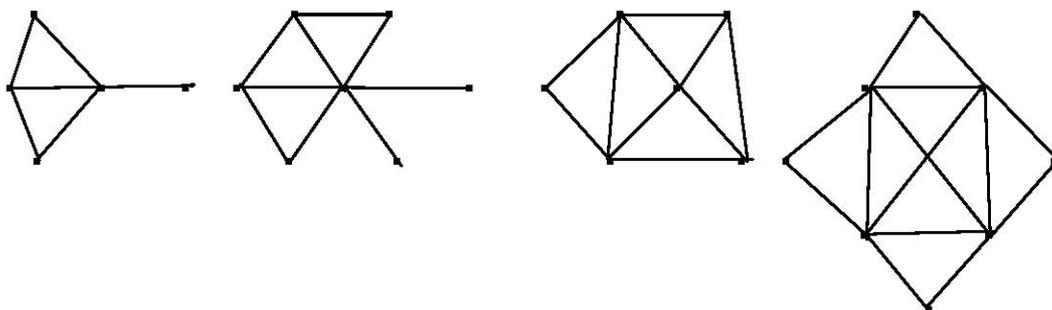


Figure plane associée

Et le problème se ramène alors à étudier des figures planes et de chercher parmi elles, celles qui peuvent être tracées d'un seul coup de crayon, en passant sur tous les points et sans passer deux fois de suite sur un même trait.

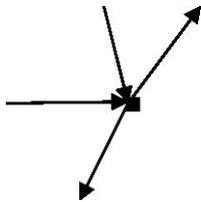
Quelques exemples de figures :



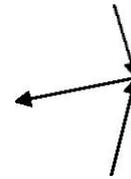
Après avoir essayé sur de très nombreux exemples, nous avons trouvé que l'on ne pouvait tracer une figure en un seul coup de crayon que si elle comportait soit aucun, soit 2 points seulement d'où partent un nombre impair de segments, et cela quelque soit le nombre de points d'où partent un nombre pair de segments. (1)

Nous avons aussi constaté que nous n'arrivons pas à trouver de figure ayant un seul point d'où partent un nombre impair de segments.

Nous avons alors essayé de comprendre pourquoi ce résultat. (2)



Point d'où part un nombre pair  
de segments  
(quand on y arrive sur le point, on peut  
toujours poursuivre le tracé)



Point d'où part un nombre impair  
de segments  
(à un moment donné, quand on arrive sur  
le point, on ne peut plus poursuivre le tracé)

Ainsi, si une figure ne comporte que des points d'où partent un nombre pair de segments, on pourra toujours la tracer d'un seul coup de crayon, quelque soit le point de départ de construction de la figure.

Si une figure comporte seulement deux points d'où partent un nombre impair de segments (un nombre pair de segments partant des autres points), pour pouvoir tracer la figure, il faudra obligatoirement démarrer la construction par l'un de ces deux points et la terminer par le second pour ne pas se trouver dans une situation où le tracé se trouverait alors bloqué sur un de ces deux points.

Le problème des 7 ponts de Königsberg se ramène à une figure plane contenant 4 points d'où partent un nombre impair (3 ou 5) de segments que l'on ne peut tracer d'un seul coup de crayon. Il est donc impossible de passer une fois et une seule par chacun des 7 ponts.

**Dans un second temps**, nous avons étudié des polyèdres. Nous avons construit de nombreux polyèdres (cube, tétraèdre, pyramide, icosaèdre, octaèdre, dodécaèdre...). Nous devons trouver une relation entre le nombre de faces, d'arêtes et de sommets. Sur tous les polyèdres construits, en comptant le nombre de faces, d'arêtes et de sommets, et en retranscrivant les résultats dans un tableau, nous avons trouvé la formule :

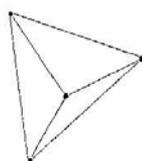
« **Nombre d'arêtes = nombre de sommets + nombre de faces – 2** »

Nous avons aussi vérifié cette formule sur des empilements de cubes, des assemblages de polyèdres sur des faces identiques. (3)

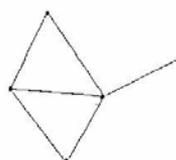
## Exercices proposés pour animer le stand au congrès:

et d'autres exercices du même type...

Reproduisez si c'est possible  
ces figures en 1 coup de crayon et  
sans passer 2 fois par la même  
arête



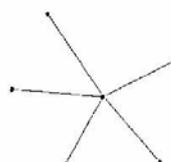
Reproduisez si c'est possible  
ces figures en 1 coup de crayon et  
sans passer 2 fois par la même  
arête



Reproduisez si c'est possible  
ces figures en 1 coup de crayon et  
sans passer 2 fois par la même  
arête



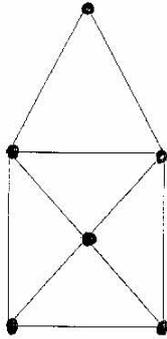
Reproduisez si c'est possible  
ces figures en 1 coup de crayon et  
sans passer 2 fois par la même  
arête



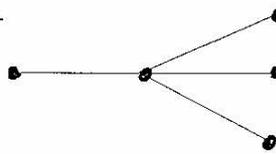
# Exercices

Est-ce possible de reproduire ces figures en un seul coup de crayon, sans passer 2 fois sur la même arête

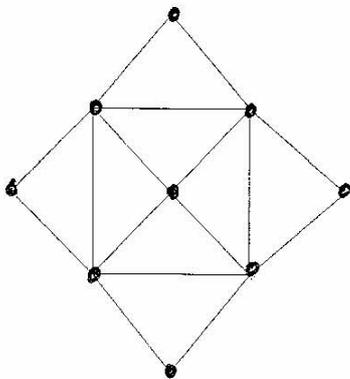
1.



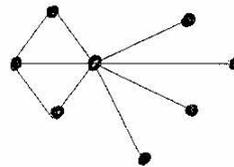
2.



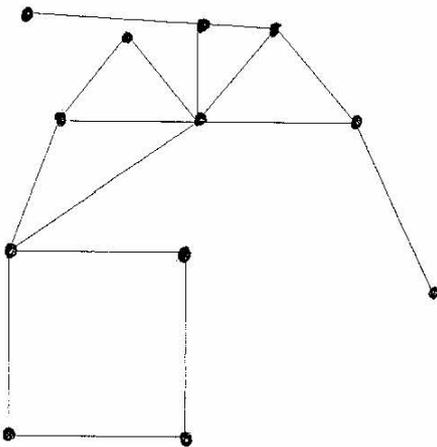
3.



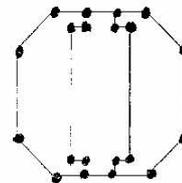
4.



5.

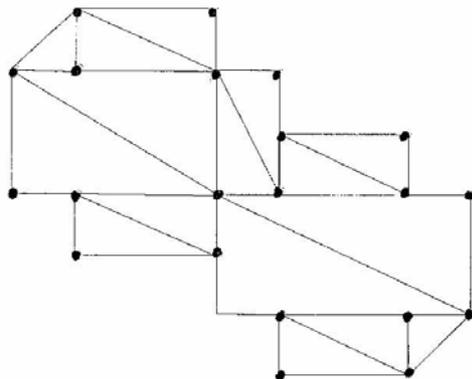


6.



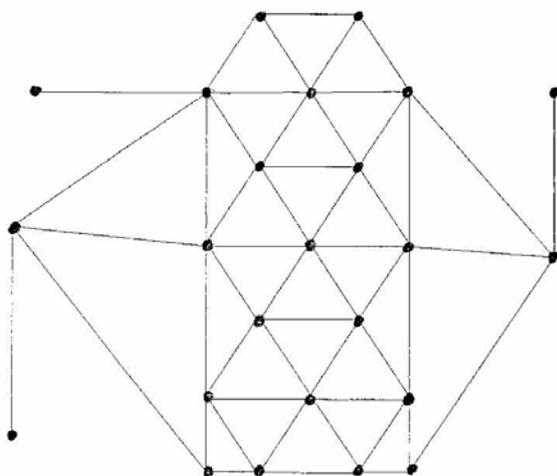
- |   |          |            |
|---|----------|------------|
| 1 | Possible | Impossible |
| 2 | Possible | Impossible |
| 3 | Possible | Impossible |
| 4 | Possible | Impossible |
| 5 | Possible | Impossible |
| 6 | Possible | Impossible |

**Reproduisez si c'est possible ces figures en  
1 coup de crayon et sans passer 2 fois par  
la même arête**



**Un indice :**

Trouvez le nombre de sommets d'où partent un nombre impair de segments.



**Solutions**

Page 3 : les figures en haut à gauche et en bas à droite sont impossibles.

Page 4 : seule la figure 1 est possible.

Page 5 : la première figure est possible, la deuxième ne l'est pas.

**Notes d'édition**

- (1) Dans cette phrase, les segments semblent orientés, or ils ne le sont pas.
- (2) Même remarque. Sur le schéma, les flèches servent seulement à indiquer le nombre d'« arrivées » et « départs » possibles.
- (3) Cette partie n'apporte pas grand chose : manque de détails et d'exemples.