Les toiles d'araignées

Année 2015 - 2016

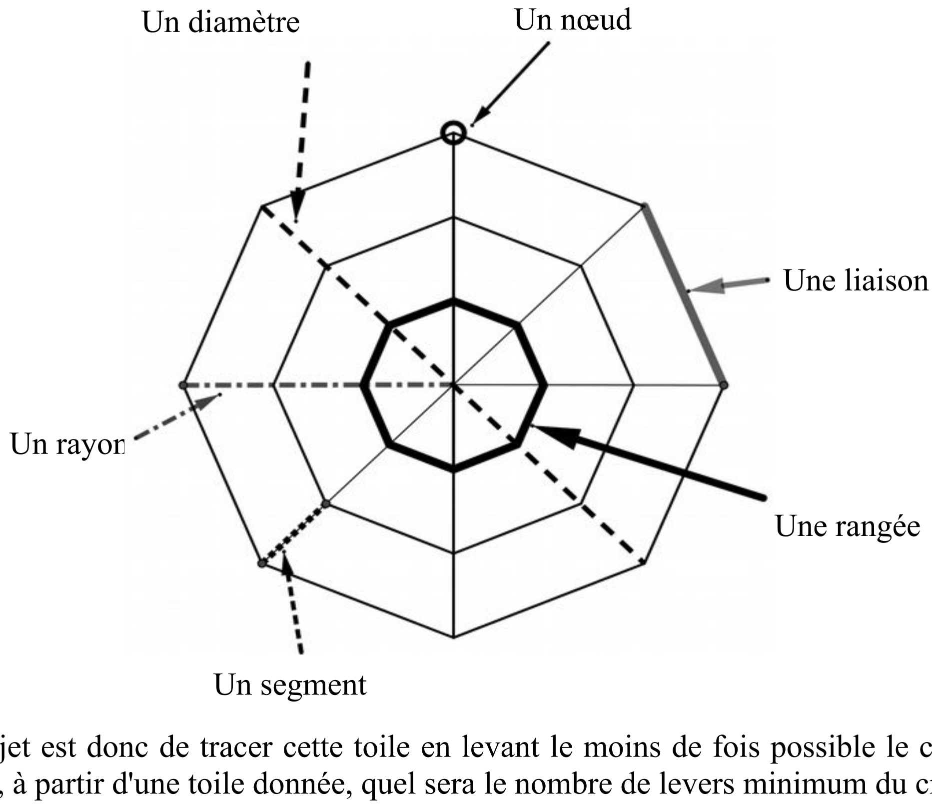
Elèves de 3ème : Estelle HENRY, Manoëlle DANGY-CAYE , Louise ROULOT, Lena FEINGOLD, Clotilde GUYARD-GILLES et Romane JACONELLI.
Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.
Chercheur : Céline ABRAHAM, université Paris Sud 11.

Le sujet :
On reproduit une toile d'araignée à la main. Quel est le nombre minimal de fois où on doit lever son crayon pour ne pas repasser sur un trait déjà tracé ?

Nos résultats :
Nous avons exhibé une méthode pour tracer ces toiles, puis nous avons émis la conjecture suivante : le nombre de rangées n'influe pas sur le nombre de levers. Nous avons réussi à montrer cette conjecture en distinguant la parité du nombre de segments qui partent d'un sommet.
Grâce à ce résultat, nous avons établi le nombre minimal de levers pour n'importe quelle figure en forme de toile.

I – Vocabulaire préalable

Une toile d'araignée est constituée d'un certain nombre de rayons et de rangées, comme le montre la figure ci-dessous ; ce nombre peut varier. Voici le vocabulaire que nous avons établi pour la suite :

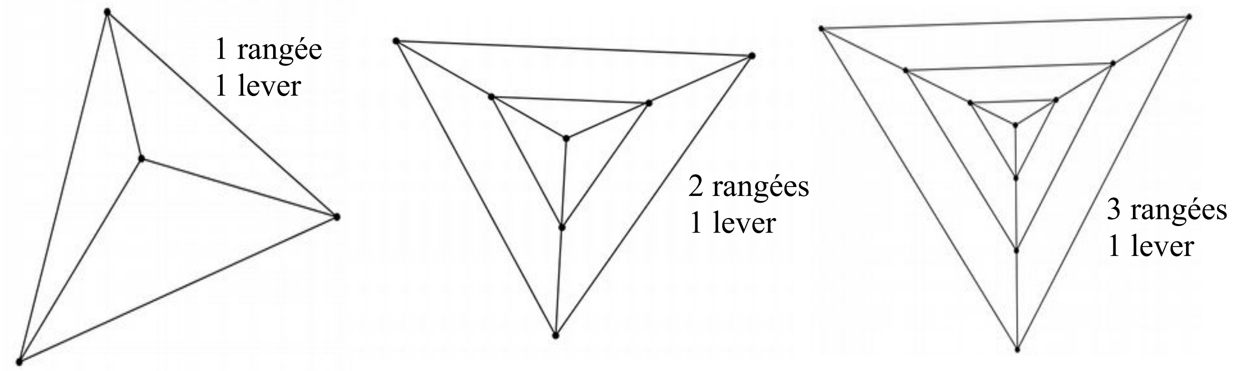


Le but du sujet est donc de tracer cette toile en levant le moins de fois possible le crayon. Il nous faut aussi trouver, à partir d'une toile donnée, quel sera le nombre de levers minimum du crayon.

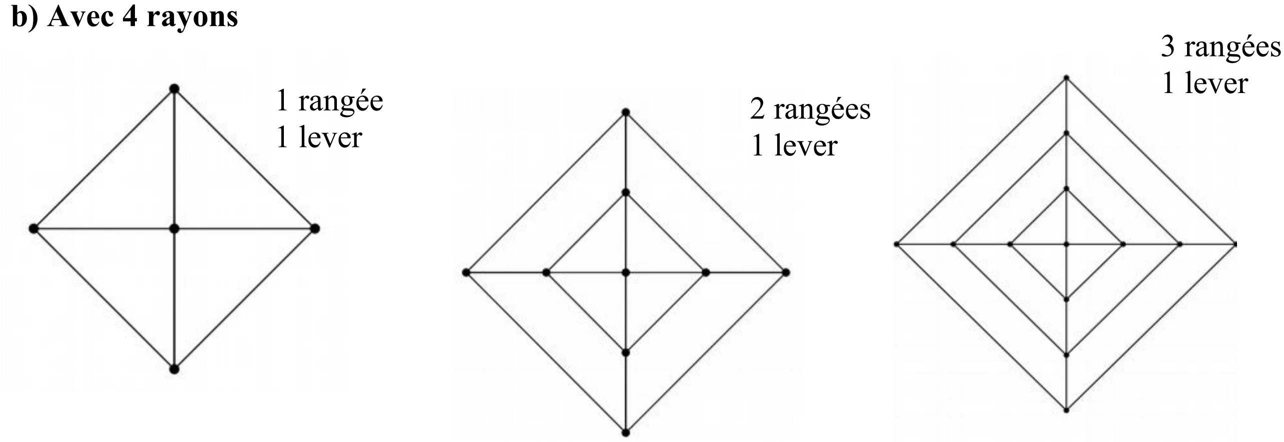
II – Testons !

Nous avons commencé par faire plusieurs essais en faisant varier le nombre de rangées et le nombre de rayons et nous avons repéré une technique pour faire le moins de levers possible ; nous indiquons nos résultats à côté de chaque figure et nous donnerons les explications après.

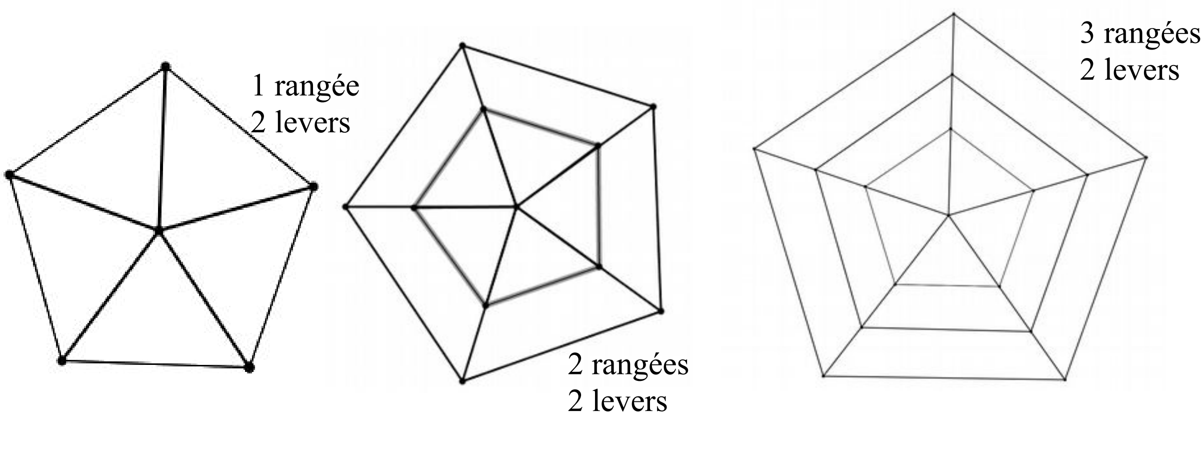
a) On voit varier le nombre de rangées avec 3 rayons :



b) Avec 4 rayons



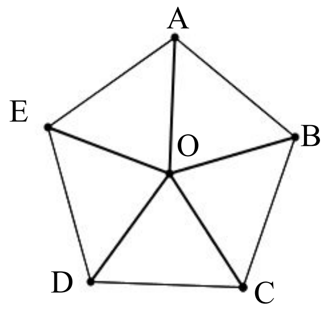
c) Avec 5 rayons :



Nous avons continué avec 6, 7 et 8 rayons. Il semble que le nombre de rangées ne fasse pas varier le nombre de levers.

d) Le quadrimove : une technique de construction

Nous expliquons ici une technique qui nous permet de tracer la toile avec un minimum de levers, sur n'importe quelle toile, sachant que ce n'est pas la seule possible.

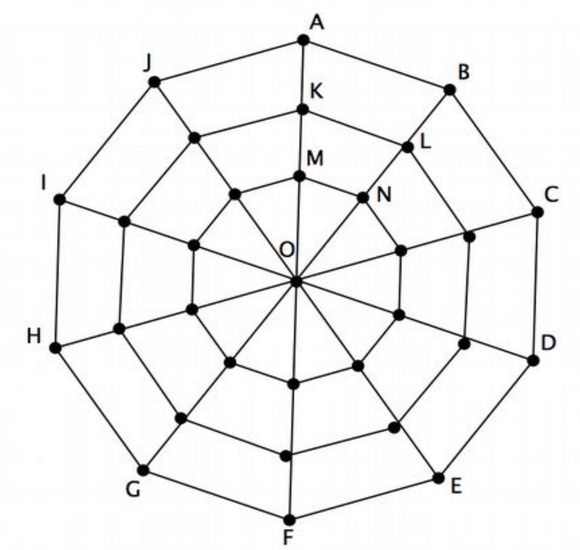


Nous avons appelé cette technique « quadrimove » car elle est constituée de quatre mouvements. Pour une toile avec une seule rangée :

On trace deux liaisons extérieures à la suite (par exemple [EA], puis [AB]), on va au centre (on trace [BO]) et on remonte vers le nœud entre les deux liaisons déjà tracées auparavant (ici le point A, donc on trace [OA]). On lève alors pour la première fois le crayon. On effectue la même technique en partant des liaisons d'à côté (on trace [BC], [CD], [DO] puis [OC]) ; enfin, on trace les traits restants ([DE] puis [EO]).

Avec cette technique, et une toile avec *r* rayons et une seule rangée, le nombre de levers est $\frac{r}{2}-1$ si r est pair et $\frac{r+1}{2}-1$ si r est impair.

Par ailleurs, notre conjecture du nombre de rangées semble se confirmer avec cette technique. En effet : lorsque la toile possède plusieurs rangées, on trace toutes les rangées intérieures au premier mouvement du quadrimove au moment de la remontée du centre.
Voici un exemple :



On trace une liaison extérieure (ici [BA]), on va au centre (on trace [AO]), on remonte par le segment d'à coté ([ON]), on effectue le tour le la première rangée, on remonte par le segment appartenant au rayon du segment déjà tracé ([NL]), on ré-effectue le tour de la rangée et on répète la manœuvre jusqu'à avoir complété toutes les rangées intérieures. Et on continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de rangées à tracer. On est ainsi ramené au cas d'une seule rangée (il ne reste plus que la rangée extérieure). On effectue ensuite notre quadrimove (Cf ci-dessus : on trace deux liaisons extérieures à la suite, on va au centre et on remonte vers le nœud entre les deux liaisons déjà tracées auparavant et on recommence avec les liaisons d'à côté).

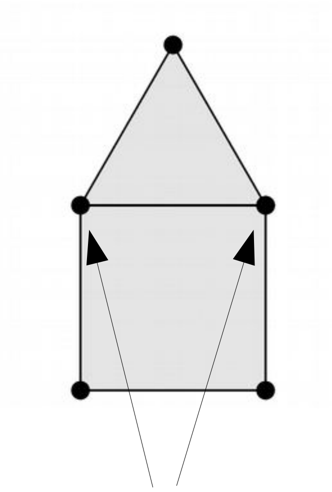
Cette technique nous a ainsi permis d'établir la conjecture : « le nombre de rangées n'influence pas le nombre de levers ».
Il reste à montrer que ce quadrimove est bien un moyen de tracer la toile avec un minimum de levers.

III – Explication de notre conjecture

a) L'exemple de la maison

Le nombre de levers du crayon ne dépend pas du nombre de rangées mais du nombre de rayons dans la figure. Si cette conjecture est vraie, nous pourrions calculer le nombre de levers sur chaque figure sans avoir à la tracer.

Afin d'essayer de comprendre pourquoi cette conjecture est vraie, nous avons utilisé une figure plus simple et connue de tous : la « maison ».



Les points d'où
partent 3 segments

Nous avons remarqué qu'afin de ne pas lever le crayon, nous devions partir de l'un des deux points d'où partent 3 segments. En partant d'un autre point, jamais nous ne pouvions tracer la maison sans lever le crayon.

Nous nous sommes demandées pourquoi nous devions absolument partir de ces points. Puis nous nous sommes rendues compte que sur chaque autre point, nous arrivions puis nous repartions ; tandis que sur ces deux points nous pouvions faire un aller ou un retour de plus donc c'est pour cela que nous pouvions commencer ou terminer par ces points.

b) La conjecture finale : La théorie des pairs et des impairs

De chaque point part un certain nombre de segments.

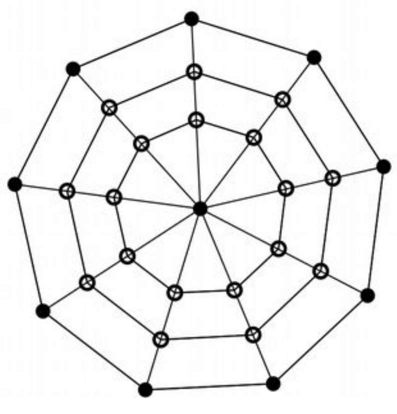
- si ce nombre est pair, nous pourrons traverser le point autant de fois que possible
- si ce nombre est impair, nous pourrons, après avoir traversé le point le maximum de fois, uniquement en partir sans y revenir, ou y arriver sans en repartir.

Donc : **un point d'où partent un nombre impair de segments est forcément une arrivée ou un départ de trait.**

C'est pourquoi le nombre de points avec un nombre de segments pair en partant n'influe pas sur le nombre de levées.

Or, quand on rajoute ou qu'on enlève des rangées à une toile d'araignée (en en laissant toujours une, bien sûr), seul le nombre de points avec un nombre pair de segments qui en partent varie.

Donc : le nombre de tracés ne varie pas selon le nombre de rangées.



● Nœuds « impairs » : nœuds pour lesquels le nombre de segments qui en partent est impair

○ Nœuds « pairs » : nœuds pour lesquels le nombre de segments qui en partent est pair

c) Calculer le nombre de levers avec notre conjecture

Voyons maintenant une manière de calculer le nombre minimal de levers à partir du nombre de rayons. Appelons r le nombre de rayons (r >0) :

Si r est pair : il y a r nœuds impairs, ceux des extrémités. Il y a donc $\frac{r}{2}-1$ levers.

Si r est impair : il y a r nœuds impairs, ceux des extrémités, plus celui du centre ; ce qui fait $r+1$ nœuds impairs et donc $\frac{r+1}{2}-1$ levers.

On définit alors les fonctions f et g .

f est la fonction qui, à un nombre r pair associe un nombre minimum de levers.
g est la fonction qui, à un nombre r impair associe un nombre minimum de levers.

$$f(r)=\frac{r}{2}-1 \qquad g(r)=\frac{r+1}{2}-1$$

d) Tableau des résultats

Nombre de rayons	Nombre de nœuds impairs	Nombre de levers
1	2	0
2	2	0
3	4	1
4	4	1
5	6	2
6	6	2
7	8	3
8	8	3
9	10	4
10	10	4
11	12	5
12	12	5
$2k-1$ ($k>1$)	$2k$	$k-1$
$2k$ ($k>1$)	2k	k – 1

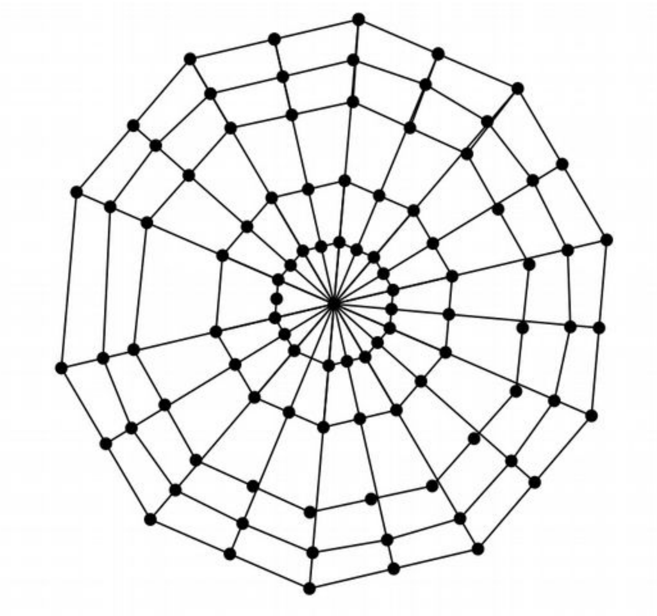
e) Conclusion

1 - Nous avons établi que le nombre de levers ne dépendait pas du nombre de rangées mais uniquement du nombre de rayons.

2 - Ensuite, d'une part, nous savons calculer le nombre minimal de levers de crayon en fonction du nombre de rayons de notre toile. D'autre part, nous avons inventé une technique, le quadrimove, qui permet d'effectuer le tracé avec exactement ce nombre minimum de levers. Nous avons donc résolu le problème posé.

IV – Voyons si vous avez compris

Exemple 1 : tentez de tracer cette figure en faisant uniquement 9 levers.



Exemple 2 : une toile d'araignée a 283 rangées et 12 rayons.
Nous vous laissons calculer le nombre de traits et de levers...

Réponse : 6 traits et 5 levers ! (le nombre de rangées n'influe pas sur le nombre de levers)