L'aire des Polygones ?
théorème de Pick !

Année 2016 – 2017

Elèves de 4°A: Romane GUILLET et Zoé DESALLE

Elèves de 5°A : Lucie MAURET et Anouk DI ZAZZO

Encadrés par Mme DE NODREST Edelyne, M. PIGNON Christophe et Mme BROUZES

Établissement : Collège de Marciac

Chercheur : Jean VALLES, université de Pau

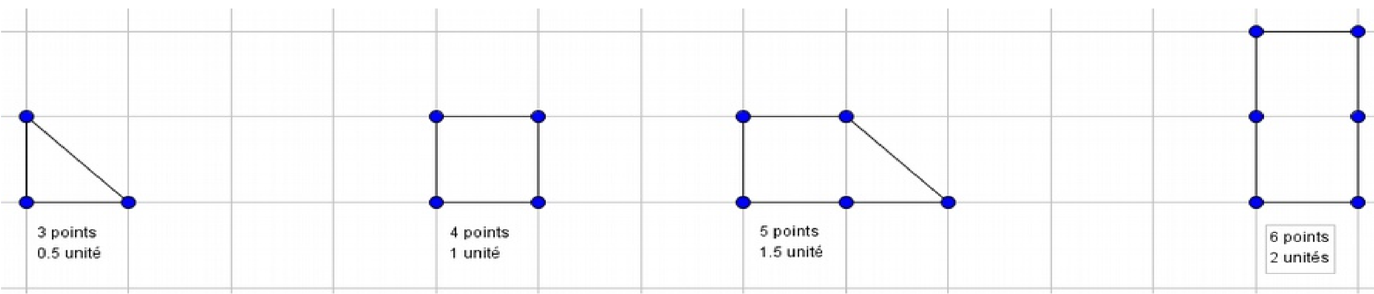
I) Présentation du sujet

Le chercheur Jean VALLES nous a proposé le sujet suivant issu du théorème de Pick :
sur une feuille quadrillée, on dessine un polygone (non aplati et sans trou) dont les sommets sont des points d'intersection des lignes verticales et horizontales. Il faut trouver une formule mathématique simple qui déduit l'aire dudit polygone en fonction des points du quadrillage qu'il contient.
Nous avons donc cherché une solution pendant tout le temps qui nous était donné.

II) Conjectures et résultats obtenus

Nous avons démontré que la formule pour calculer l'aire des polygones en fonction du nombre de points intérieur (*i*) et du nombre de points sur les bords (*b*) est : $i+\frac{b}{2}-1$

III) Expériences préliminaires et preuves



a) recherches :

Nous avons commencé par chercher une formule pour les polygones sans points à l'intérieur.
Pour cela, nous avons d'abord fait des dessins puis le tableau ci-dessous qui exprime l'aire des polygones en fonction de leur nombre de points sur le bord.

Points	3	4	5	6	7	8	9
Aires	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5

Nous avons constaté grâce à ce tableau que le plus petit polygone sans point à l'intérieur qui pouvait être tracé avait 3 pts sur les bords et une aire de 0,5 carreau. Comme on peut également le constater, l'aire augmente à chaque fois de 0,5 carreau. Nous avons alors émis l'hypothèse que la formule pour les polygones sans point intérieur était :

Aire = $(b-3)\div 2+0{,}5$

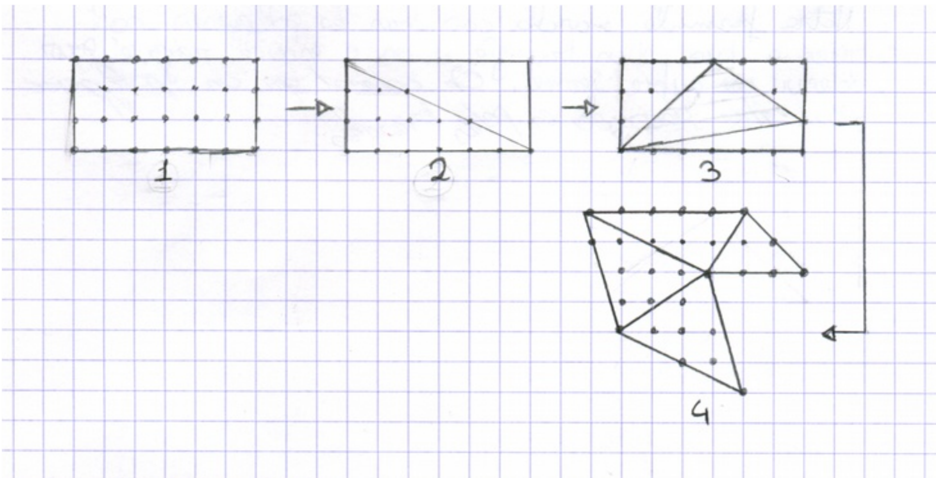
Ensuite, nous avons cherché une formule pour les polygones avec des points à l'intérieur.
Nous avons fait des tableaux avec le nombre de points intérieurs, le nombre de points sur les bords et l'aire que l'on trouvait pour chaque figure mais avec des résultats qui étaient calculables sans l'aide de la formule.

Points intérieurs	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
Points sur les bords	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6	8	9	10	11
Aire	0,5	1	1,5	2	1,5	2	2,5	3	2,5	3	3,5	4	6	6,5	7	7,5

Nous nous sommes ensuite rendus compte que l'aire était égale au nombre de points sur les bords divisé par 2, plus le nombre de points intérieurs – 1.
Exemples :
- l'aire 3 = 6 / 2 + 1 -1 = 6 + 0 = 3
- l'aire 6 = 8 / 2 + 3 -1 = 4 + 2 = 6 ...

Nous avons émis une hypothèse sur une formule pour calculer l'aire d'un polygone avec les points du quadrillage, soit : **nb pts intérieurs + nb de pts sur les bords / 2 - 1**

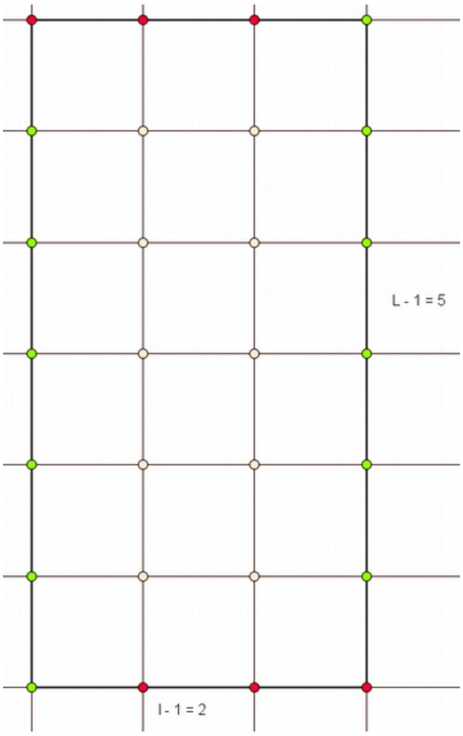
b) étapes de démonstration de la formule



Ces étapes nous ont été suggérées par Jean Vallès, notre chercheur.
1 : on va démontrer notre formule pour un rectangle.
2 : on va démontrer notre formule pour un triangle rectangle.
3 : on va démontrer notre formule pour un triangle quelconque.
4 : on va enfin démontrer notre formule pour n'importe quel polygone.

Remarque : pour la suite quand on dira « points », il faudra lire « points du quadrillage ».

Partie 1 : démonstration de la formule pour un rectangle



On part d'un rectangle :
Soit L , la longueur du rectangle et l , sa largeur <u>en nombre de carreaux</u>.
Nous allons démontrer la formule suivante :
Aire = $b \div 2 + (i - 1)$
b = nombre de points sur les bords du rectangle
i = nombre de points à l'intérieur du rectangle
Or le nombre de points sur les bords est égal à $(L+l) \times 2$ (points verts + rouges de la figure, ce qui correspond au périmètre).
Le nombre de points intérieurs est égal à $(l-1) \times (L-1)$ (points blancs).

Donc :
$b \div 2 + (i-1)$

= $(L+l) \times 2 \div 2 + (l-1) \times (L-1) - 1$

= $(L+l) + l \times (L-1) - 1 \times (L-1) - 1$

= $(L+l) + l \times L - l \times 1 - (L-1) - 1$

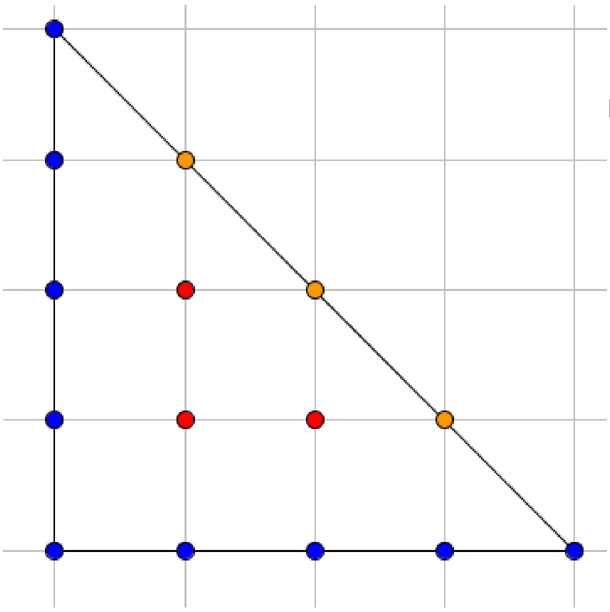
= $L + l + l \times L - l - (L-1) - 1$

= $L + l + l \times L - l - L + 1 - 1$

= $l \times L$
Ce qui correspond bien à l'aire du rectangle en carreaux !
Notre formule fonctionne donc pour un rectangle. Nous allons donc pouvoir l'utiliser pour un rectangle dans la suite.

Partie 2 : démonstration de la formule pour un triangle rectangle

On prend un triangle rectangle. Un triangle rectangle, c'est un rectangle « coupé en deux ».



Et on appelle :

L : longueur du rectangle contenant le triangle, en carreaux

l : largeur du rectangle contenant le triangle, en carreaux

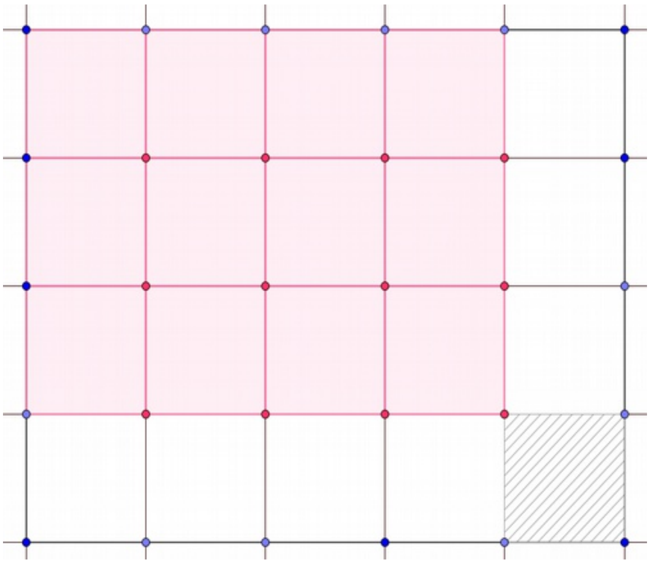
b : nb de points sur le bord du triangle rectangle

i : nb de points intérieurs du triangle rectangle

h : nb de points sur l'hypoténuse

Explication des calculs i, b

*** Pour** i **:**



On cherche d'abord le nombre de points intérieurs du rectangle : ce sont les points rouges du rectangle (chaque point correspond à un carreau rouge). Donc, pour le calculer, on fait : l'aire en carreaux du rectangle moins le nombre de carreaux sur la longueur moins le nombre de carreaux sur la largeur (ce sont les carreaux blancs) plus 1 (carreau grisé qu'on a enlevé 2 fois).

C'est-à-dire : $L \times l - 1 \times L - 1 \times l + 1$

Donc le nombre de points intérieurs du triangle rectangle, c'est-à-dire i, est le nombre précédent moins le nombre de points sur l'hypoténuse, c'est-à-dire h, divisé par 2.

Donc $i = \frac{L \times l - 1 \times L - 1 \times l + 1 - h}{2}$

*** Pour** b **:**

Le nombre de points sur les bords du triangle rectangle, c'est le nombre de points sur les bords du rectangle divisé par 2 (le demi-périmètre donc, c'est à dire $(L+l) \times 2$ comme on l'a vu dans la Partie I). Mais en faisant ça, on ne compte que 2 sommets du rectangle. Le triangle rectangle en ayant 3, il faut rajouter 1 point (le 3ème sommet). Ensuite il faut aussi rajouter les points situés sur la diagonale du rectangle (qui forment le dernier côté du triangle).

Donc on a : $b = (L+l) \times 2 \div 2 + 1 + h$

Avec cela on fait le calcul suivant, en partant de notre formule :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{L \times l - 1 \times L - 1 \times l + 1 - h}{2} + \frac{(L+l) \times 2 \div 2 + 1 + h}{2} - 1$$

$$= \frac{L \times l - 1 \times L - 1 \times l + 1 - h}{2} + \frac{L + l + 1 + h}{2} - \frac{2}{2}$$

$$= \frac{L \times l - L - l + 1 - h + L + l + 1 + h - 2}{2}$$

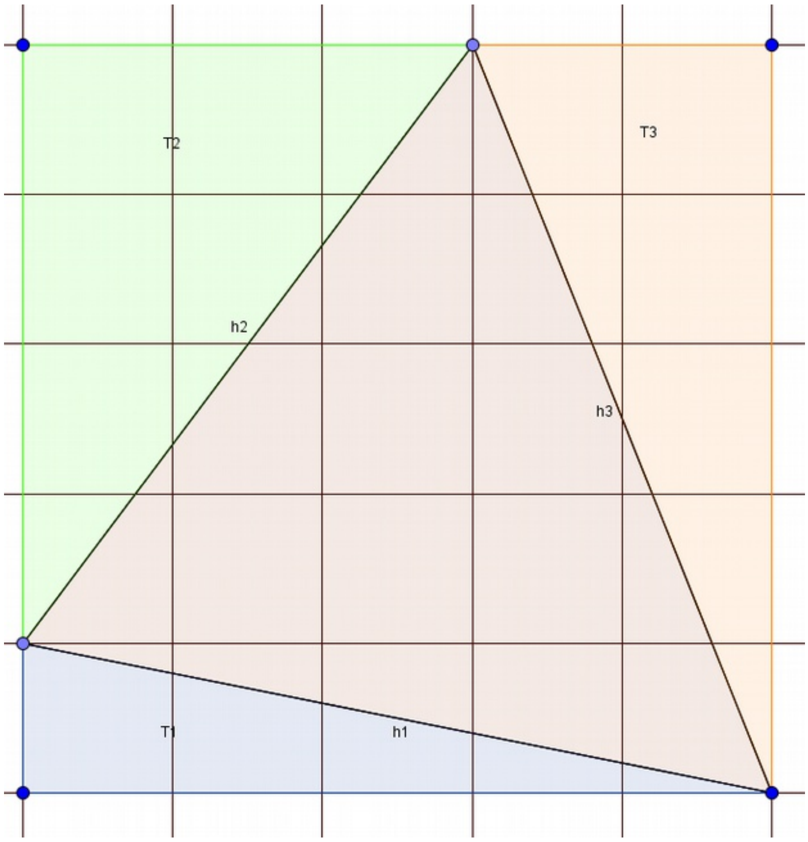
$$= \frac{L \times l}{2}$$

Ce qui est bien la formule de l'aire du triangle rectangle.

Donc nous venons de démontrer que notre formule $i+\frac{b}{2}-1$ fonctionne pour les triangles rectangles.

Nous pouvons donc désormais l'utiliser.

Partie 3 : démonstration pour un triangle quelconque



On prend un triangle quelconque, et on « l'encadre » par 3 triangles rectangles comme ci-dessous :

i_T nombre de points à l'intérieur du triangle « central ».

b_T nombre de points sur le bord du triangle « central ».

b_R nombre de points sur le bord du rectangle formé par les 4 triangles.

i_R nombre de points à l'intérieur du rectangle formé par les 4 triangles.

i_{T1} ; i_{T2} ; i_{T3} nombre de points à l'intérieur des triangles T1, T2 et T3 respectivement.

b_{T1} ; b_{T2} ; b_{T3} : nombre de points sur les bords des triangles T1, T2 et T3 respectivement.

h_1 ; h_2 ; h_3 : nombre de points sur les hypoténuses des triangles T1, T2 et T3 respectivement (sans compter les sommets).

Donc (1) $b_R = b_{T1} + b_{T2} + b_{T3} - h_1 - h_2 - h_3 - 3$ (le - 3 car on compte 2 fois chaque sommet des triangles T1, T2 et T3)

Et (2) $i_R = i_T + i_{T1} + i_{T2} + i_{T3} + h_1 + h_2 + h_3$ (le nombre de point à l'intérieur du rectangle, c'est la somme du nombre de points à l'intérieur de tous les triangles, plus ceux des hypoténuses !)

Donc on décompose l'aire du triangle « central »:

$$A_T = A_R - (A_{T1} + A_{T2} + A_{T3})$$

On a démontré que notre formule fonctionne pour les rectangles et les triangles rectangles. Donc :

$$A_T = A_R - (A_{T1} + A_{T2} + A_{T3})$$

$$= \quad i_R + \frac{b_R}{2} - 1 - (i_{T1} + \frac{b_{T1}}{2} - 1 + i_{T2} + \frac{b_{T2}}{2} - 1 + i_{T3} + \frac{b_{T3}}{2} - 1)$$

$$= \quad i_R + \frac{b_R}{2} - 1 - (i_{T1} + \frac{b_{T1}}{2} + i_{T2} + \frac{b_{T2}}{2} + i_{T3} + \frac{b_{T3}}{2} - 3)$$

$$= \quad i_R + \frac{b_R}{2} - 1 - i_{T1} - \frac{b_{T1}}{2} - i_{T2} - \frac{b_{T2}}{2} - i_{T3} - \frac{b_{T3}}{2} + 3$$

$$= \quad i_R - i_{T1} - i_{T2} - i_{T3} + \frac{b_R - b_{T1} - b_{T2} - b_{T3}}{2} + 2$$

D'après ce qu'on a vu (1) :

$$= \quad i_R - i_{T1} - i_{T2} - i_{T3} + \frac{b_{T1} + b_{T2} + b_{T3} - h_1 - h_2 - h_3 - 3 - b_{T1} - b_{T2} - b_{T3}}{2} + 2$$

Et d'après ce qu'on a vu (2) :

$$= \quad i_T + i_{T1} + i_{T2} + i_{T3} + h_1 + h_2 + h_3 - i_{T1} - i_{T2} - i_{T3} + \frac{b_{T1} + b_{T2} + b_{T3} - h_1 - h_2 - h_3 - 3 - b_{T1} - b_{T2} - b_{T3}}{2} + 2$$

Donc en simplifiant il reste :

$$= \quad i_T + h_1 + h_2 + h_3 + \frac{-h_1 - h_2 - h_3 - 3}{2} + 2 \quad (3)$$

De plus d'après le dessin on a $b_T = h_{T1} + h_{T2} + h_{T3} + 3$
En effet le nombre de points sur le bord du triangle « central » est bien égal à la somme des points sur les 3 hypoténuses plus les 3 sommets (qui ne sont pas comptés dans les h_1 , h_2 , h_3).

Donc $-h_{T1} - h_{T2} - h_{T3} = +3 - b_T$ et $h_{T1} + h_{T2} + h_{T3} = b_T - 3$ (en « passant » les termes d'un côté ou de l'autre de l'égalité)

On peut donc remplacer dans (3) :

$$i_T + h_1 + h_2 + h_3 + \frac{-h_1 - h_2 - h_3 - 3}{2} + 2$$

$$= \quad i_T + b_T - 3 + \frac{+3 - b_T - 3}{2} + 2$$

$$= \quad i_T + \frac{2 \times b_T}{2} + \frac{-b_T}{2} - 1$$

= $i_T + \frac{b_T}{2} - 1$

Ce qui est donc bien la formule recherchée pour un triangle quelconque ! (1)

On peut donc désormais utiliser cette formule pour la suite.

Partie 4 : démonstration pour un polygone quelconque (2)

On va supposer que notre formule fonctionne pour un polygone quelconque P.

Sur ce polygone, on ajoute un triangle ayant un côté commun à ce polygone P (le triangle est « hors » du polygone).

i_P nombre de points à l'intérieur du polygone de départ.

i_T nombre de points à l'intérieur du triangle rajouté.

i_{NP} nombre de points à l'intérieur du « nouveau polygone »

b_P nombre de points sur les bords du polygone de départ.

b_T nombre de points sur les bords du triangle rajouté.

b_{NP} nombre de points sur les bords du « nouveau polygone »

c nombre de points sur le segment commun entre le polygone de départ et le triangle rajouté (sans compter les 2 extrémités).

Donc :

$$Aire_{Nouveau\ polygone} = Aire_{polygone\ de\ départ} + Aire_{triangle\ rajouté}$$

= $i_P + \frac{b_P}{2} - 1 + i_T + \frac{b_T}{2} - 1$

= $i_P + i_T + \frac{b_P + b_T}{2} - 2$

Et on a $i_{NP} = i_P + i_T + c$ et donc $i_{NP} - c = i_P + i_T$ (1)

Et $b_{NP} = b_P - c + b_T - c - 2$ (le -2 car on compte les 2 extrémités du segment de « séparation » deux fois avec les points sur les bords du polygone de départ et les points sur les bords du triangle rajouté).
Et donc $b_{NP} = b_P + b_T - 2c - 2$ et donc $b_{NP} + 2c + 2 = b_P + b_T$ (2)

Donc avec (1) et (2) :

$i_P + i_T + \frac{b_P + b_T}{2} - 2$

$= \; i_{NP} - c + \frac{b_{NP} + 2c + 2}{2} - 2$

$= \; i_{NP} - c + \frac{b_{NP}}{2} + \frac{2c}{2} + \frac{2}{2} - 2$

$= \; i_{NP} - c + \frac{b_{NP}}{2} + c + 1 - 2$

$= \; i_{NP} + \frac{b_{NP}}{2} - 1$

Qui est donc bien la formule qu'on voulait démontrer !

On a donc démontré que n'importe quel polygone qui se forme à partir d'un polygone « plus petit » et d'un triangle, a une aire qui se calcule avec la formule trouvée.

Conclusion :

On a montré que notre formule est vraie pour un triangle quelconque et que notre formule continue d'être vraie si on rajoute un triangle à un polygone déjà formé.

Et pour n'importe quel polygone ?

Ici on suppose que n'importe quel polygone peut se découper en triangles (on n'a pas réussi à le démontrer. Notre chercheur Jean Vallès nous a dit que c'était « la triangulation »).

Si la triangulation est vraie, alors notre formule fonctionne pour n'importe quel polygone !

En effet, si on prend un polygone P.

On découpe ce polygone en un polygone P_1 + un triangle.
Grâce à la partie 4, nous avons vu que si la formule est vraie dans P_1, alors elle sera vraie dans P_1 + triangle = P.

On recommence avec P_1, qu'on découpe en P_2 + triangle.
Grâce à la partie 4, nous avons vu que si la formule est vraie dans P_2, alors elle sera vraie dans P_2 + triangle = P_1.

Et ainsi de suite, en découpant avec des P_i jusqu'à ce que P_i soit lui même un triangle (la « triangulation » nous dit que ça arrivera forcément).
Dans ce cas, la formule est vraie pour P_i (Partie 3 de la démonstration).

Donc, la formule est vraie dans P_i, elle sera vraie dans P_i + triangle = P_{i-1}, puis dans P_{i-1} + triangle = P_{i-2}, ect... jusqu'à revenir à P.

Donc, Aire d'un Polygone = $i + \frac{b}{2} - 1$

Remarque des enseignant·e·s : la partie 1 de la démonstration a été faite par des élèves de 5ème. Les parties 2, 3 et 4 par des élèves de 4ème. D'où parfois des différences dans la façon d'écrire certains calculs.

Notes d'édition

(1) Dans la partie 3, il est supposé que tout triangle T peut être complété en un rectangle R en lui adjoignant trois triangles T1, T2 et T3. Ce n'est pas toujours vrai, et si, par exemple, le triangle T partage un côté avec le rectangle R, seuls deux triangles viendront le compléter en rectangle. Dans ce cas, un des triangles (par exemple T3) est dégénéré.
La formule de Pick ne fonctionne pas dans ce cas. En effet, si on note c la longueur du côté commun avec le rectangle (c = L ou l), alors le triangle T3 a pour aire intérieure i_{T3}=0 et pour périmètre b_{T3}=2c-1 (aller retour le long du segment -1 pour le sommet compté deux fois). La formule de Pick donnerait (2c-1)/2-1, qui est non nul alors que l'aire de T3 est évidemment nulle. Le calcul proposé reste quand même valide sous réserve des changements suivants : b_{T3}=2c-1, h_{T3}=c-1 et A_{T3}=0. Le cas où deux triangles parmi T1,T2 et T3 sont dégénérés nous ramène au cas du triangle rectangle.

(2) Dans la partie 4, l'hypothèse que la formule fonctionne pour un polygone est valide puisqu'elle a été démontrée pour un triangle quelconque, plus petit polygone possible. Par ailleurs, il faut ajouter à la condition de l'ajout d'un triangle, que ce dernier doit être sans intersection avec le polygone, autre que le segment commun. Un tel « croisement » invalide la formule de Pick puisque des points intérieurs seraient comptés en double : elle n'est d'ailleurs pas valide pour les polygones croisés. Par ailleurs, autoriser deux segments en commun ou un segment et un sommet en commun invalide aussi la formule de Pick puisqu'il y a un risque de former un polygone à trous, type de polygones pour lesquels la formule de Pick est invalide. Elle peut en revanche se généraliser à ce type de polygones, exercice qui est une extension intéressante au sujet.