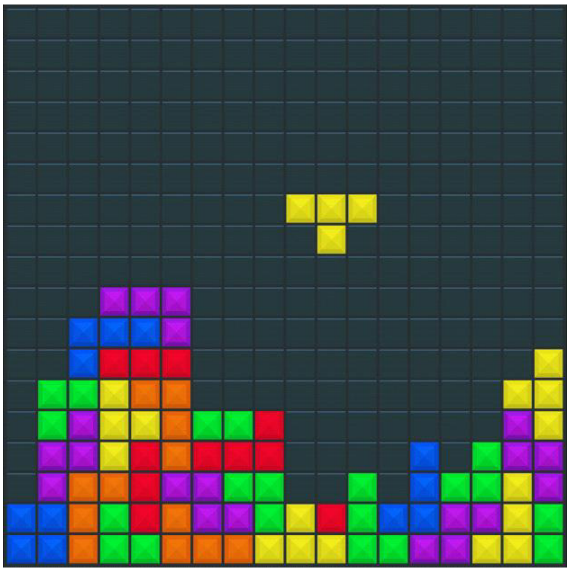
LE TETRIS

Jean-Baptiste Courty et Raphaël Lucente-Pouponneau élèves de 4ème, Julien Griache élève de 3ème

Encadrés par Madme Lavoine

Établissement Collège Mme de Staël (Paris)

Chercheur : Monsieur Fernique



Notre Sujet

Le jeu Tetris fut pour notre projet la base, le centre. Il nous a été proposé par le chercheur de faire un "Tetris" mais qui aurait la particularité de ne pas avoir 4 carrés par pièce comme le jeu que l'on connaît tous mais 5 carrés par pièce. Mes camarades et moi l'avons analysé, décortiqué pour ensuite chercher des formules permettant de trouver une borne supérieure et une borne inférieure du nombre de pièces qu'il est possible de construire en fonction du nombre n de carrés.

Les résultats

Au cours de nos recherches nous avons trouvé une formule permettant de calculer le nombre MAXIMUM (et non pas exact) de pièces en fonction du nombre de carrés par pièces (un Tetris avec des pièces composées de 4 carrés aura 7 pièces distinctes).

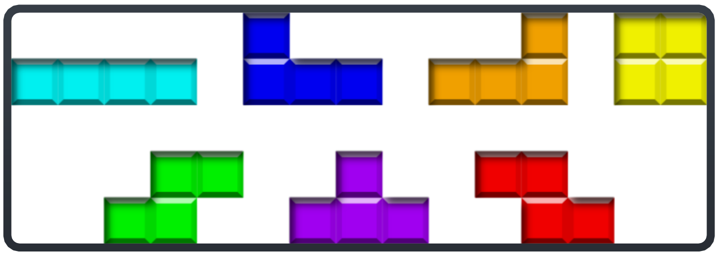
Voici cette formule :

$$\boldsymbol{U(n+1) \leq U(n) \times (2n+2)}$$

où n =nombre de carrés par pièce, et $U(n)$ est le nombre de pièces composées de n carrés distinctes.

Les recherches

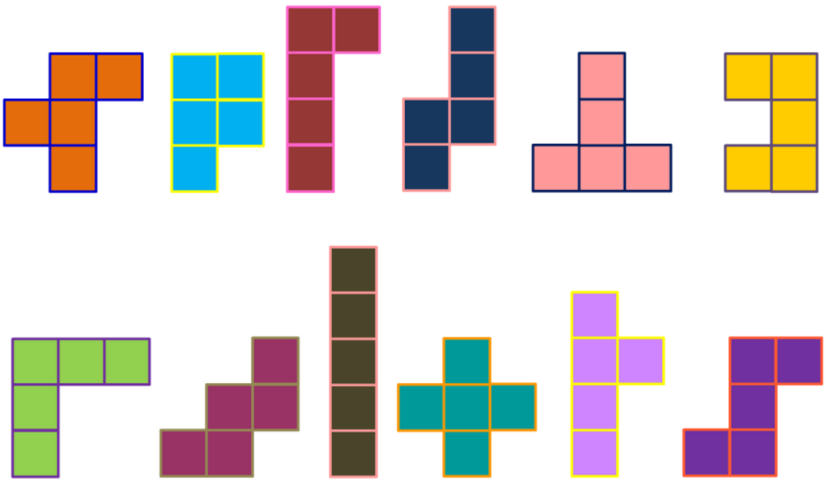
Tout d'abord, voici les pièces distinctes d'un Tetris classique à 4 carrés :



Nous avons commencé nos recherches en nous demandant ce que pouvait bien signifier "un Tetris à 5 carrés".

Cela signifie que toutes les pièces du Tetris seront faites avec 5 carrés (qu'on met ensembles).

Puis nous avons trouvé ces pièces :



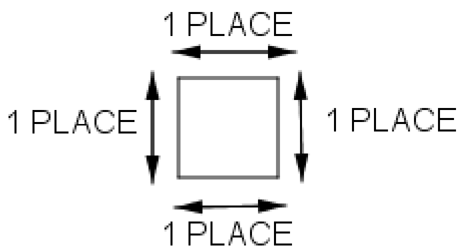
Nous avons ensuite cherché un lien entre le nombre de carrés par pièces et le nombre de pièces distinctes avec ce nombre de carrés. Nous avions ce tableau :

Nombre de carrés par pièce	Nombre de pièces
1	1
2	1
3	2
4	7
5	17
6	???????

Au départ, nous cherchions un lien liant ces nombres à l'aide de calculs mais nous n'en trouvions aucun. Nous avons fait différentes hypothèses pour essayer de trouver des liens, puis nous avons compté les espaces libres : un espace est un côté d'un carré où l'on pourrait placer un carré.

Nous les avons d'abord comptés sur chacune des pièces distinctes mais cela ne donnait rien. Nous nous sommes alors contentés de les compter sur un carré (4 donc) et de multiplier par le nombre de carrés. Nous avons ensuite multiplié ce résultat par le nombre de pièces.

Nous avons trouvé une première borne supérieure :



D'où : $Nombre\ de\ pièces$ à $n+1\ carrés\ <\ nombre\ de\ pièces$ à $n\ carrés\ \times\ 4n$

C'est-à-dire en appelant $U(n)$ le nombre de pièces distinctes à n carrés :

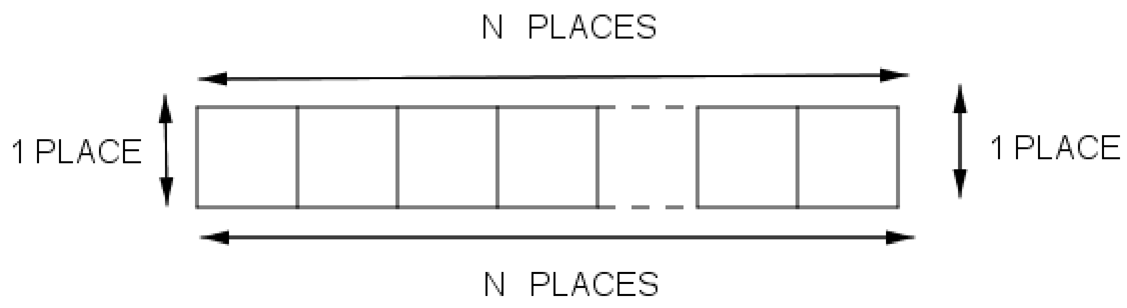
$$U(n+1) \leq\ U(n) \times 4n$$

Cette borne supérieure ne nous a pas entièrement satisfaits car elle donnait très vite des nombres très grands.

<u>Exemples :</u>

- $n = 1\ U(2) \leq 1 \times 4\ \ donc\ U(2) \leq 4$ (alors que $U(2) = 1$)
- $n = 2\ \ U(3) \leq 1 \times 4 \times 2\ donc\ U(3) \leq 8$ (alors que $U(3) = 2$)
- $n = 3\ U(4) \leq 2 \times 4 \times 3$ donc $U(4) \leq 24$ (alors que $U(4) = 7$)
- $n = 4\ U(5) \leq 7 \times 4 \times 4$ donc $U(5) \leq 112$ (alors que $U(5) = 17$)
- $n = 5\ U(6) \leq 17 \times 4 \times 5$ donc $U(6) \leq 340$

Nous avons donc cherché une autre formule à partir des espaces libres en utilisant une pièce classique :



C'est ainsi que nous avons trouvé la formule donnée dans la partie résultats :

$$\boxed{U(n+1) \leq U(n) \times (2n+2)}$$

où n =nombre de carrés par pièce, et $U(n)$ est le nombre de pièces distinctes composées de n carrés(1).

Nous avons appliqué cette formule pour 5,6 et 7 carrés par pièces pour vérifier qu'elle fonctionnait.

$U(5) \leq U(4) \times (2 \times 4 + 2)\ \ et\ U(4) \times (2 \times 4 + 2) = 7 \times 10 = 70$

donc le nombre de pièces distinctes pour 5 carrés sera inférieur ou égal à 70 (plus précis que les 112 obtenus avec la précédente formule).

$U(6) \leq U(5) \times (2 \times 5 + 2)\ et\ U(5) \times (2 \times 5 + 2) = 17 \times 12 = 204$

donc le nombre de pièces distinctes pour 6 carrés sera inférieur ou égal à 204 (plus précis que les 340 obtenus avec la précédente formule).

Pour aller plus loin : nous allons maintenant essayer de trouver une borne inférieure pour le nombre de pièces distinctes en fonction du nombre n de carrés. **(2)**

Notes d'édition

(1) Le dessin présente un exemple de pièce à n carré pour expliquer le résultat obtenu. Mais il serait intéressant de savoir si toutes les pièces à n carrés ont le même périmètre... sinon, on pourrait peut-être argumenter pour expliquer pourquoi celle qui est présentée est de périmètre maximal. Cet argument permettrait de compléter la preuve présentée.

(2) il s'agit en fait de la conclusion. Il aurait fallu reformuler sous une forme plus adaptée. Par exemple :

« En conclusion, nous avons trouvé des bornes supérieures pour le nombre de pièces distinctes à n carrés, et nous aimerions poursuivre l'exploration de ce nombre en cherchant une borne inférieure… »