TASSO SOLITAIRE SUR GRILLE

Année 2015- 2016

Travaux réalisés par les élèves du Lycée Édouard Herriot et du Collège Raoul Dufy, Lyon

Article rédigé par DE BELVAL Claire-Hélène, FAYETTE Lucie, KENNEDY Charlotte, LETERRIER Clémence, élèves de 1ère S

Professeures encadrantes : Mmes DI FAZIO et DUMONTET

Chercheur(s) ou Chercheuse(s) : Aline PARREAU, Valentin GLEDEL, André FABBRI, CNRS et Université Lyon 1

Présentation du sujet

Les règles

Le but du jeu est de placer le plus grand nombre de dominos possible sur une grille carrée de côté n cases en respectant les règles suivantes :

- **Les dominos sont rectangulaires de proportion 1x2, ils occupent donc deux cases du plateau.**
- **Les dominos doivent être posés en suivant le quadrillage.**
- **Lorsque l'on empile les dominos, il faut placer un domino sur deux autres du même étage qui sont alors bloqués et sur lesquels on ne pourra plus rien poser.**

Problématiques

Quel est le nombre maximal d'étages que l'on peut atteindre ?

Quel est le nombre maximal de dominos que l'on peut empiler sur une grille de côté donné ?

Résultats obtenus et démontrés

→ Il est impossible de dépasser le 4ème étage

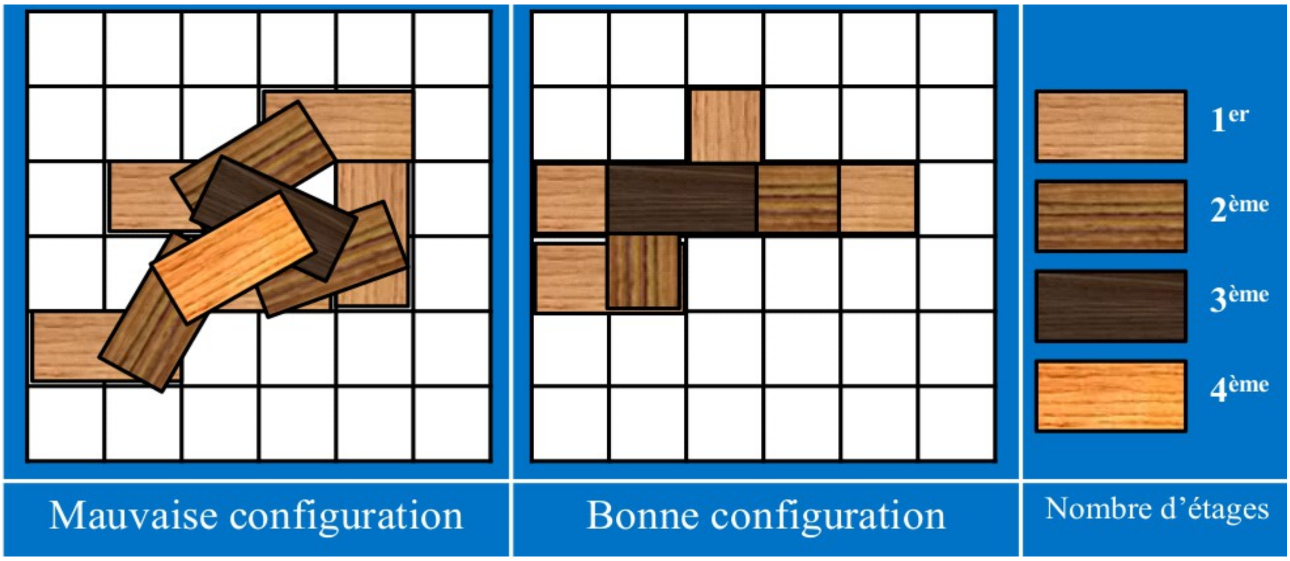
→ On calcule un Nombre Théorique correspondant au nombre maximal potentiel de dominos

→ Des solutions ont été trouvées pour les carrés suivants :

Les 4 carrés de base Solution optimale	**Carrés de côté 4k avec k entier** Solution optimale	**Carrés de côté 10k avec k entier**
2×2→3 3×3→7 4×4→15 5×5→22	$15k^2$	$93k^2$

I- Sujet

Exemples de construction :



Définitions :

Domino bloqué : domino sur lequel se trouve un autre domino et donc sur lequel on ne peut plus rien poser

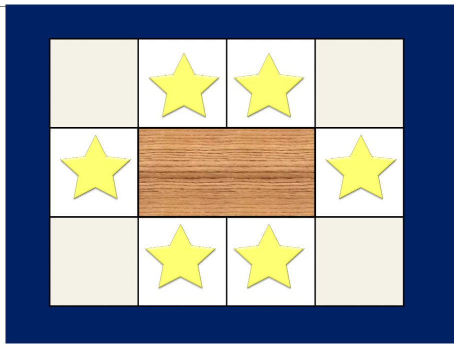
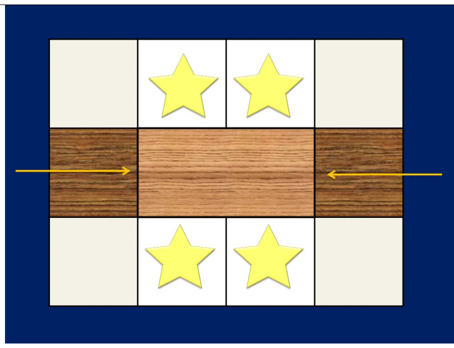
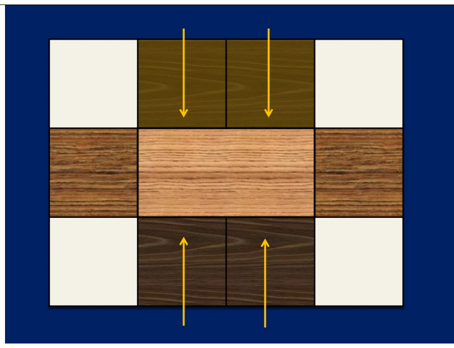
Nombre Théorique (NT) : nombre maximal théorique de dominos que l'on peut poser sur une grille de côté donné en respectant la limite du 4ème étage.

Nombre Atteignable (NA) : nombre de dominos que l'on peut atteindre dans la pratique

Solution optimale : solution démontrée comme étant la meilleure, elle permet d'atteindre le NT. Une solution qui présente uniquement des dominos bloqués (excepté au 4ème étage) (1) est également optimale.

II- Étage maximal

Il est impossible de dépasser le 4ème étage.

Un domino dispose de six cases adjacentes qui sont autant d'accès possibles au domino. (voir Fig.1)	 Fig.1
Il faut deux dominos pour construire un nouvel étage, on condamne donc deux accès à chaque étage. On considère que le domino seul au départ constitue le dernier étage qui sera donc le sommet. On ajoute ensuite deux dominos en dessous, à l'étage inférieur, qui bloquent donc deux accès. (voir Fig.2)	 Fig.2
Il reste quatre accès donc on peut construire encore deux étages, ce qui nous en fera quatre en tout. Ensuite, tous les accès étant condamnés on ne peut plus créer d'étage, d'où la limite au 4èmeétage. (voir Fig.3)	 Fig.3

(2)

III- Calcul du nombre théorique

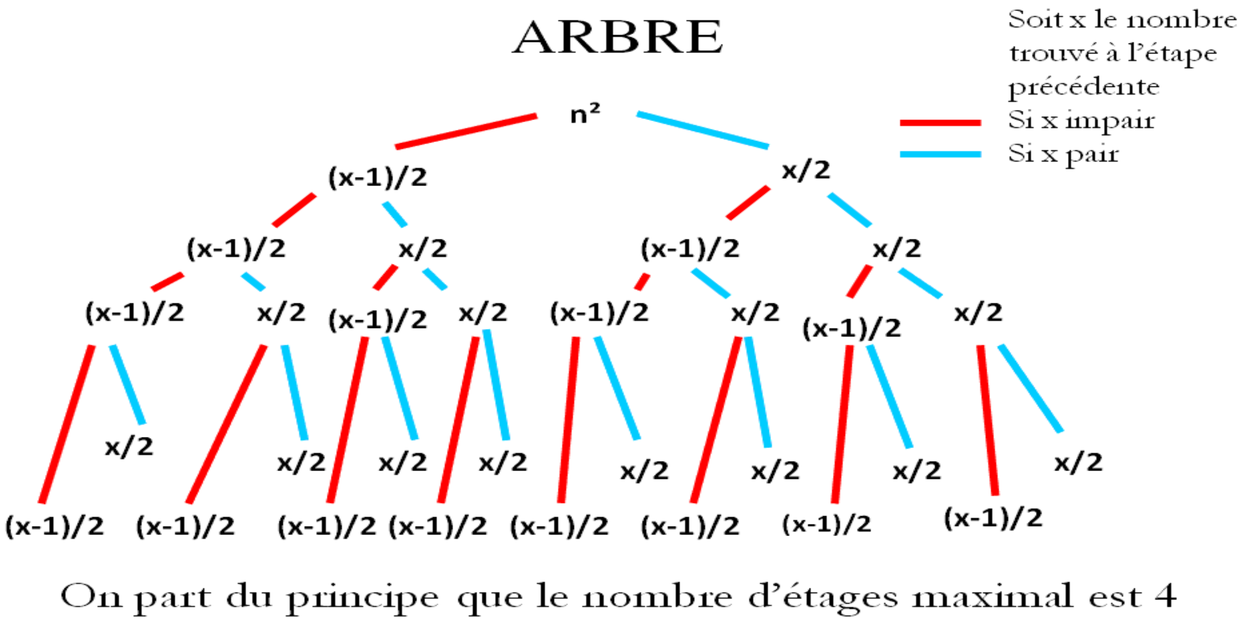
Pour déterminer le Nombre Théorique, on compte le nombre maximal de dominos qu'il peut y avoir à chaque étage. Pour cela on utilise la méthode suivante.

Soit un carré de côté n cases.
Le nombre de cases sur la grille est donc n^2. Or un domino occupe deux cases.
Par conséquent, il y aura au 1er étage :
- si n^2 est impair, $(n^2-1)/2$ dominos au maximum ainsi qu'une case vide
- si n^2 est pair, $n^2/2$ dominos

Et ainsi de suite jusqu'au 4ème étage !

Attention : Pour n>5, il faut s'arrêter au 4ème étage pour calculer le NT même si le résultat de l'étape précédente est supérieur à 1.

Ci dessous un arbre de calcul permettant de déterminer le NT. (3)



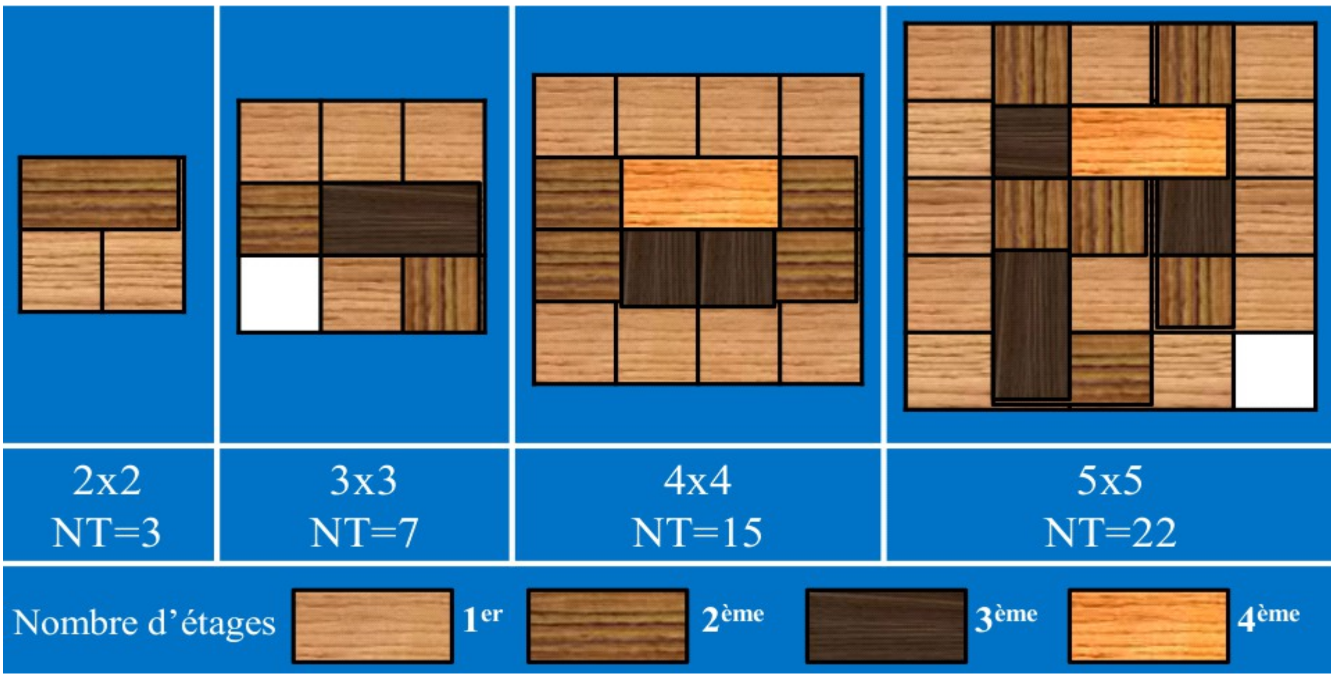
Exemples de Nombres Théoriques					
Côté	2	3	4	5	6
NT	3	7	15	22	33

```
VARIABLES
 N EST_DU_TYPE NOMBRE
 X EST_DU_TYPE NOMBRE
 I EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    SI (N%2==0) ALORS
        DEBUT_SI
        N PREND_LA_VALEUR N/2
    FIN_SI
    SINON
        DEBUT_SINON
        N PREND_LA_VALEUR (N-1)/2

    FIN_SINON

    X PREND_LA_VALEUR N

    POUR I ALLANT_DE 1 A 3
    DEBUT_POUR
     SI (N%2==0) ALORS
        DEBUT_SI
        N PREND_LA_VALEUR N/2
        X PREND_LA_VALEUR X+N

     FIN_SI
     SINON
        DEBUT_SINON
        N PREND_LA_VALEUR (N-1)/2
        X PREND_LA_VALEUR X+N

     FIN_SINON
    FIN_POUR
 AFFICHER "Nombre Théorique"
 AFFICHER X
```

Ci-contre un algorithme permettant de calculer le NT en entrant N le nombre de cases sur la grille.

IV-Construction

Pour les carrés de base (4), on s'appuie sur la méthode de calcul du NT étage par étage et notre pratique confirme le nombre obtenu. On peut donc affirmer qu'il s'agit d'une configuration optimale.



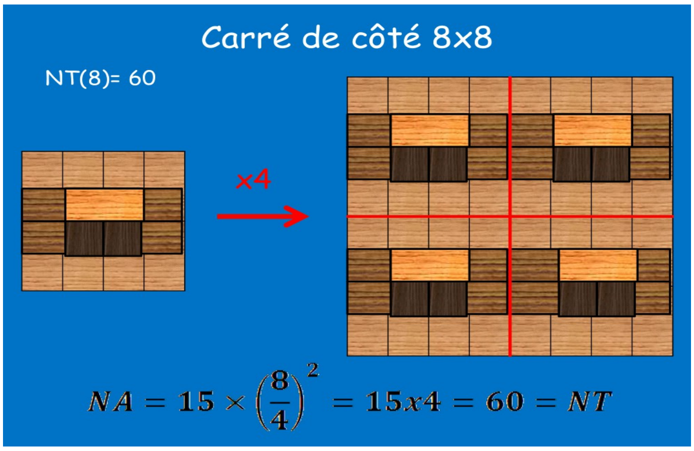
- **Nombre Atteignable des carrés 4k : Théorie des îlots**

La configuration de 4x4 est optimale puisqu'elle atteint son NT=15. Or les dominos la composent sont bloqués, c'est-à-dire que l'on ne peut plus ajouter aucun domino dessus.

$$\boldsymbol{NA = 15 \times \left(\frac{4k}{4}\right)^2 = 15k^2 = NT}$$

Ainsi, en associant des îlots de 4x4, on peut poser un nombre de dominos égal au NT pour les carrés dont le côté est de la forme 4k. Le modèle est donc optimal.
4k/4 étant le nombre d'îlots de 4x4 par côté du carré, donc élevé au carré, il s'agit du nombre total d'îlots.

Ci-contre un exemple pour n= 8 = 4x2

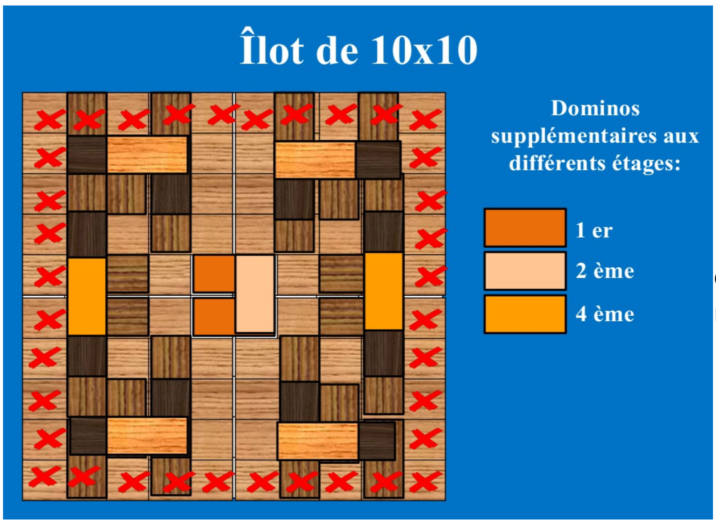


- **Nombre Atteignable des carrés 10k : Continuité des Îlots**

Dans la continuité de la théorie des îlots, on associe des îlots de 5x5 dont le NT est 22, atteignable avec 4 îlots, on obtient un carré de 10x10 dont le NT est 93 : les 4 configurations de 5 permettent d'obtenir 4x22=88 dominos. Cependant, on peut encore rajouter 5 dominos. On a donc 88+5=93 dominos. Le NT est atteint. La configuration est donc optimale (voir Fig.4 ci dessous).

On peut donc associer les configurations de 10x10 et obtenir un Nombre Atteignable (NA) pour les carrés 10k. (5)

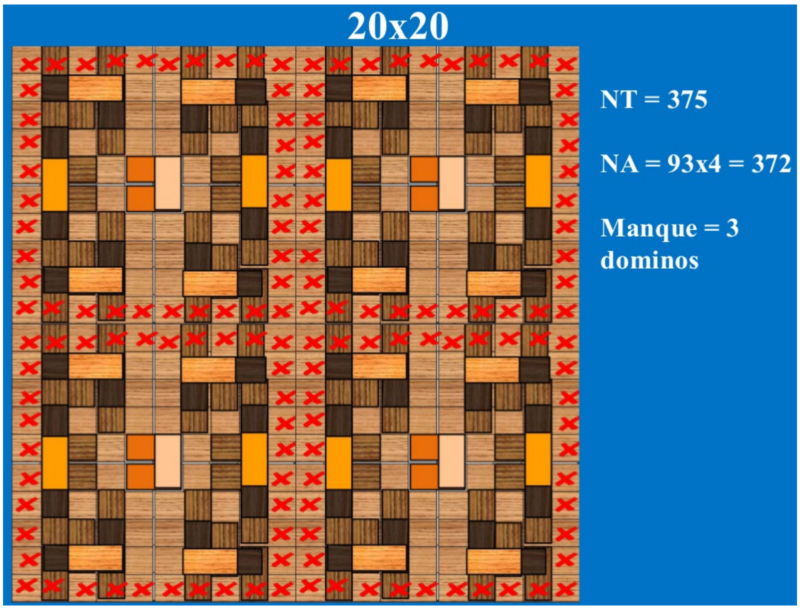
$$\boldsymbol{NA = 93\left(\frac{10k}{10}\right)^2 = 93k^2 \neq NT}$$



10k/10 étant le nombre d'îlots de 10x10 par côté du carré, donc élevé au carré, il s'agit du nombre total d'îlots.

Cette méthode ne permet donc pas d'atteindre le NT mais aucune autre solution n'a encore été trouvée. De plus elle n'est pas optimale car il reste des dominos non bloqués mais isolés au deuxième étage (voir Fig 5 ci dessous).

Néanmoins, pour les carrés dont le côté est un multiple de 10 mais aussi un multiple de 4, on peut atteindre le NT grâce à la théorie des îlots de 4.



V- Conclusion

Ainsi il semblerait que le Nombre Théorique ne soit pas toujours atteignable dans la pratique. En effet, nous avons vu que s'il était possible d'atteindre le NT des carrés dont le côté est de la forme 4k avec k entier, en revanche celui des carrés dont le côté est un multiple de 10 paraît inatteignable avec la Continuité de la Théorie des Îlots. De manière générale, il apparaît comme intuitif que le NT n'est pas toujours atteignable. Aussi pour les carrés de 6x6 et 7x7, nous ne sommes jamais parvenues à ce résultat. (6)

Notes d'édition

(1) La limite du quatrième étage n'ayant pas encore été démontrée, il serait préférable de ne pas l'inclure dans la définition du nombre théorique.

(2) La démonstration est un peu rapide. Pour passer de la figure 2 à la suivante, il faut considérer tous les accès possibles des nouveaux dominos mais en fait, on peut se contenter des accès du seul domino initial.

(3) Il manque une explication pour passer de l'arbre au calcul de NT : effectuer la somme des expressions obtenues à chaque ligne.

(4) « Les carrés de base » semblent être les carrés de côté inférieur ou égal à 5.

(5) Il y a une inégalité entre NA et NT, laquelle ?

(6) Il serait bien de montrer la différence entre la valeurs de NA et NT lorsque le nombre optimal n'a pas pu être réalisé, entre autre pour les cas 6x6 et 7x7. Peut-être ouvrir la la fin de l'article avec une nouvelle question, par exemple qu'obtient-on avec des rectangles ?