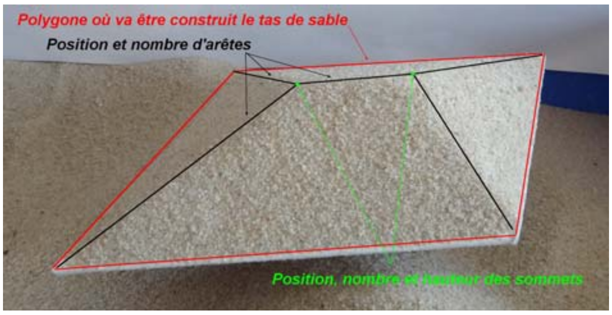
Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les tas de sable

par AMBLARD David, PERRETON David, COUSIN Gaspard et FOIN Martin élèves de seconde au lycée d'Altitude de Briançon
Chercheur : Camille PETIT – Université Joseph Fourier (Grenoble)
Enseignant : Hubert PROAL

SUJET : On fait un tas de sable sur toute une table de forme polygonale et on cherche le maximum de renseignements sur la figure que l'on va obtenir.

- *Nombre de sommets*
- *Emplacement des sommets*
- *Hauteur des sommets*
- *Position et nombre des arêtes*



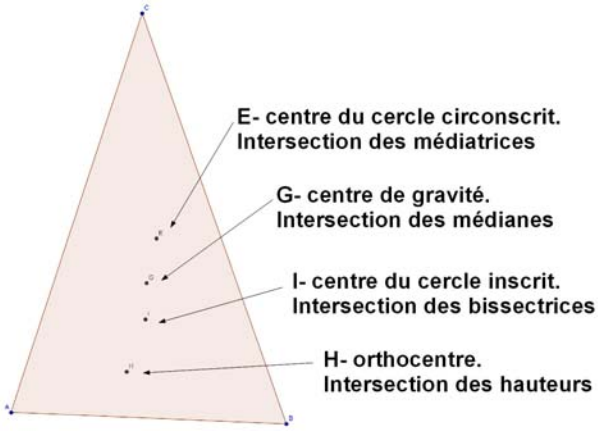
Remarque : même si c'est un problème en trois dimensions, nous travaillerons assez souvent sur le polygone de départ en projetant les arêtes et les sommets (quitte à leur associer une valeur correspondant à leur hauteur)

Répétition lors de la finale du concours Faites de la science à La Rochelle où ils finiront second.

Les triangles

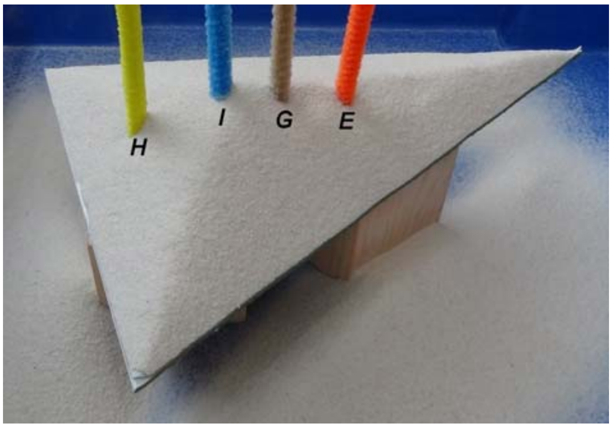
Nous avons commencé nos recherches en prenant le polygone le plus simple, le triangle.
Suite à plusieurs expériences nous avons proposé la conjecture suivante : si la figure de base est un triangle, le tas de sable aura trois arêtes qui se rejoignent en un seul sommet.

Nous connaissons 4 points particuliers dans un triangle, est-ce que l'un de ces points peut être le sommet ?



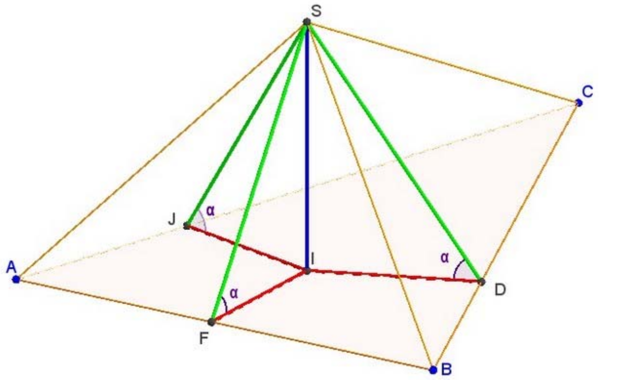
Nous pouvons écarter E et H car il arrive que dans certains triangles ces points soient à l'extérieur.

Propriété 1 : La projection du sommet (dans le cas du triangle) correspond au centre du cercle inscrit et les arêtes correspondent aux bissectrices.



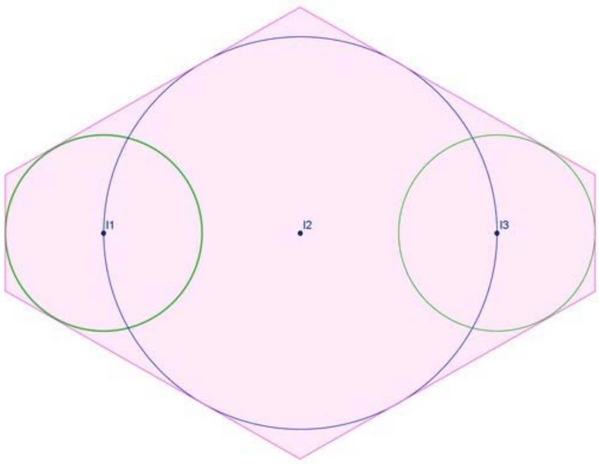
Postulat : la pente du tas de sable est constante (elle ne dépend que de la nature du sable), en effet on imagine mal que le tas de sable ait des pentes différentes de chaque coté du triangle.

Démonstration de la propriété 1. **(1)**
Intéressons nous aux triangles rectangles IJS, IDS, IES. D'après le postulat les angles en J, D et E sont égaux, notés α. Les tangentes des angles sont elles aussi égales. Ces trois triangles ont [IS], le coté opposé à l'angle, en commun. Donc IJ=ID=IE=IS×tan(α). Autrement dit I est le centre du cercle inscrit.



Corollaire 2 : la hauteur du tas de sable est proportionnelle au rayon du cercle inscrit.

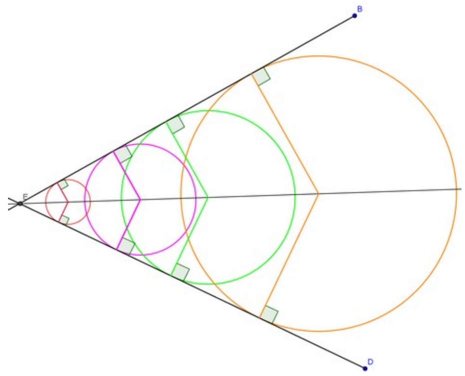
Démonstration du corollaire 2.
La hauteur IS=IE×tan(α), elle ne dépend que de IE car l'angle du tas de sable α est constant.



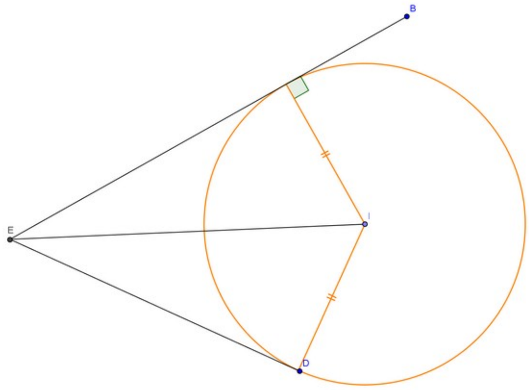
Expérience avec ce polygone qui a un cercle inscrit à 4 côtés et deux cercles inscrits tangents à 3 cotés. Ces deux cercles sont de rayon deux fois plus petit que le premier cercle. Nous avons observé que la hauteur au centre (I2) était deux fois plus haute que les hauteurs en I1 et I3

Propriété de la bissectrice : la bissectrice d'un angle DEB est l'ensemble des points à égale distance des droites (DE) et (BE).

Ainsi l'ensemble des centres des cercles tangents à deux cotés du polygone va donner la projection de l'arête, c'est-à-dire la bissectrice.



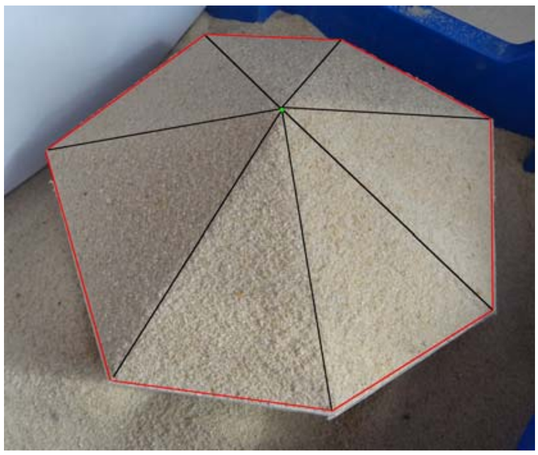
Propriété 3 : les bissectrices vont donner la projection des arêtes. L'intersection de deux bissectrices donne un sommet et limite ainsi la longueur de la bissectrice. **(2)**



L'arête la plus courte (dans le cas ci-contre [ED]) va limiter la longueur de la bissectrice à [EI]

Propriété 4 : Si le polygone de base a un seul cercle inscrit, alors nous aurons un seul sommet (le centre du cercle inscrit) dont la hauteur sera proportionnelle au rayon du cercle inscrit et les bissectrices donneront la projection des arêtes.

Démonstration de la propriété 4. Même démarche que la propriété 1.



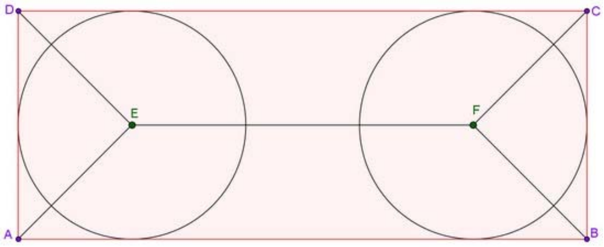
Résultats :

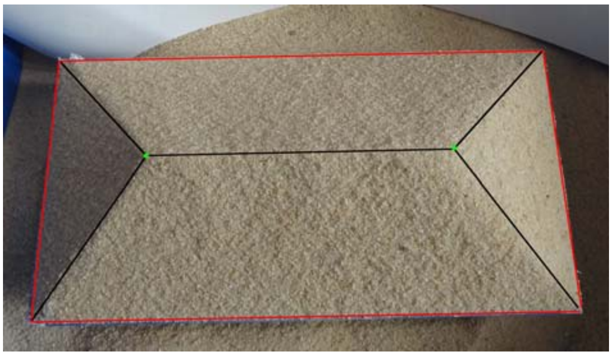
Polygone	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes
Triangle	1	3
n côtés mais un seul cercle inscrit	1	*n*

Que ce passe-t-il si les bissectrices ne sont pas concourantes, c'est-à-dire ne se coupent pas en un unique point ?

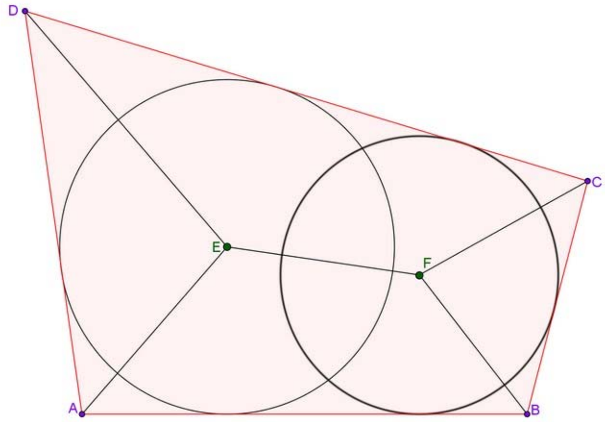
Les quadrilatères

Pour le rectangle il y a quatre bissectrices. D'après la remarque faite sur les bissectrices, elles vont être « limitées » en longueur. Nous obtenons deux points d'intersections E et F qui vont donner deux sommets à la même hauteur (les rayons des deux cercles sont identiques). Ces sommets sont reliés par une arête (qui est parallèle au côté le plus long du rectangle – théorème du toit).





Remarque : Nous appellerons sommet les intersections de au moins trois faces du tas de sable. Autrement dit un point de]EF[n'est pas considéré comme un sommet.
Pour le quadrilatère, nous avons des résultats très proches de celui du rectangle. La différence est que les cercles tangents à trois cotés ne sont pas de même rayon donc les deux sommets ne seront pas à la même hauteur.



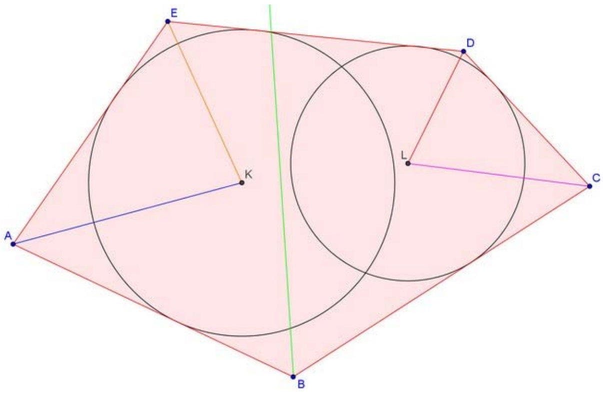
Résultats :

Polygone	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes
Quadrilatère	Au plus 2	4 ou 5

Nous pensions avoir suffisamment de résultats pour traiter le cas général, mais ce n'était pas le cas. Nous avons étendu notre étude aux pentagones.

Les pentagones.

Nous avons pris un pentagone quelconque et tracé ses bissectrices.

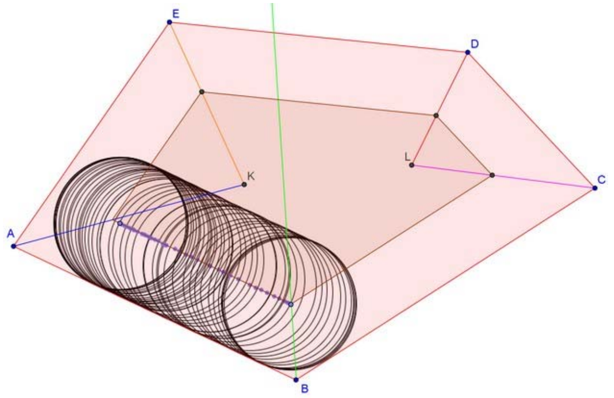


Nous avons remarqué que dans le pentagone il y avait une bissectrice « orpheline », c'est-à-dire qui ne coupe pas d'autres bissectrices.

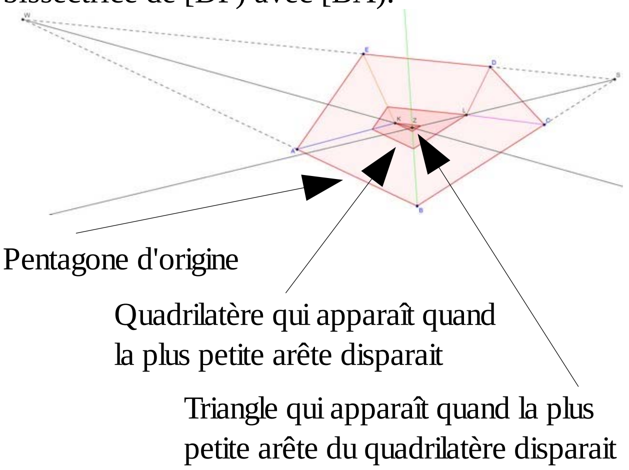
Nous avons réalisé l'expérience pour essayer de comprendre. Pas facile de voir le résultat.

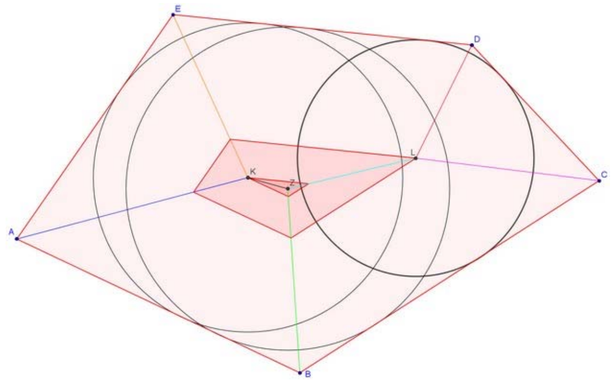
D'autres cas de figure nous ont aidé à trouver une démarche pour résoudre le problème du pentagone.
Si nous faisons rouler un cercle de rayon 1 à l'intérieur du pentagone, la trace du centre va

fournir tous les points à la hauteur 1 (la ligne de niveau 1) – en réalité la hauteur est proportionnelle au rayon du cercle, ce n'est pas vraiment la hauteur 1.



Nous obtenons une suite de pentagone imbriqués les uns dans les autres qui nous permettent de comprendre comment est le tas de sable au début car ces pentagones correspondent à des lignes de niveaux.
A un moment, une des arêtes de ce pentagone devient un point. Nous nous retrouvons alors avec un quadrilatère dont trois bissectrices sont tracées. La nouvelle correspond à la bissectrice des côtés [ED) et [BC) – comme si [CD] avait disparu.
Si on poursuit les lignes de niveau, le quadrilatère va se transformer en triangle (disparition du point K) et apparition de la bissectrice de [DF) avec [BA).





Représentation du tas de sable du pentagone. Trois sommets (L, K et Z par ordre de hauteur) et 7 arêtes.

Résultats :

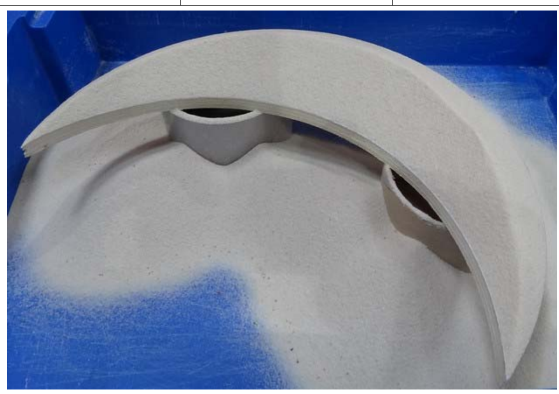
Polygone	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes
Pentagone	Au plus 3	5 à 7

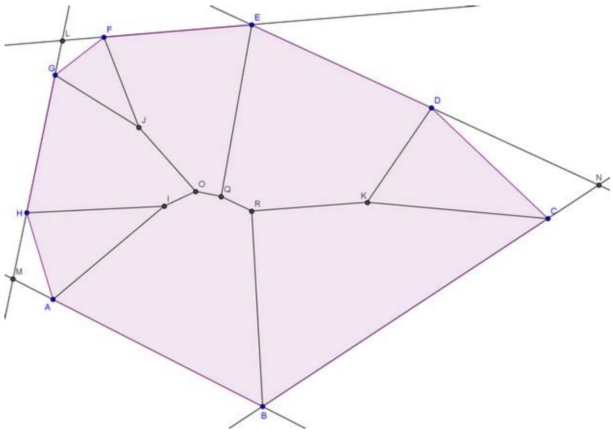
Le cas général

Conjecture 5 : un polygone à n côtés a au plus n-2 sommets et entre n et $2n$-3 arêtes.

Cette conjecture, avec ces valeurs, ne nous est pas apparue d'un coup. C'est en réalisant le tableau des résultats et en mettant le nombre de côtés et non le nom que nous avons trouvé ces relations.

Nombre de côtés du polygone	Nombre maximal de sommets	Nombre maximal d'arêtes
3	1	3
4	2	5
5	3	7
n	n-2	n+(n-2)-1= $2n$-3

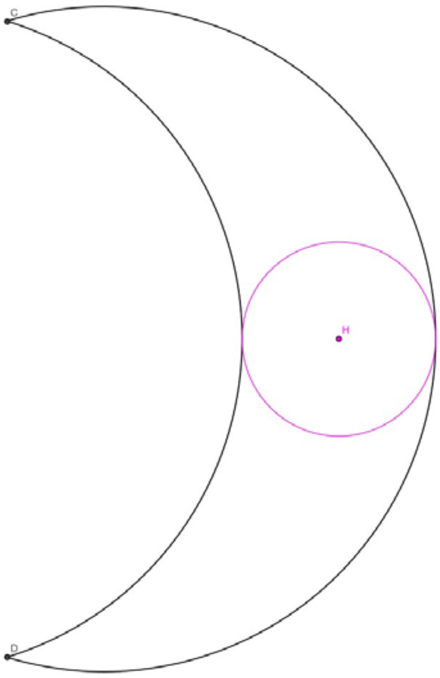


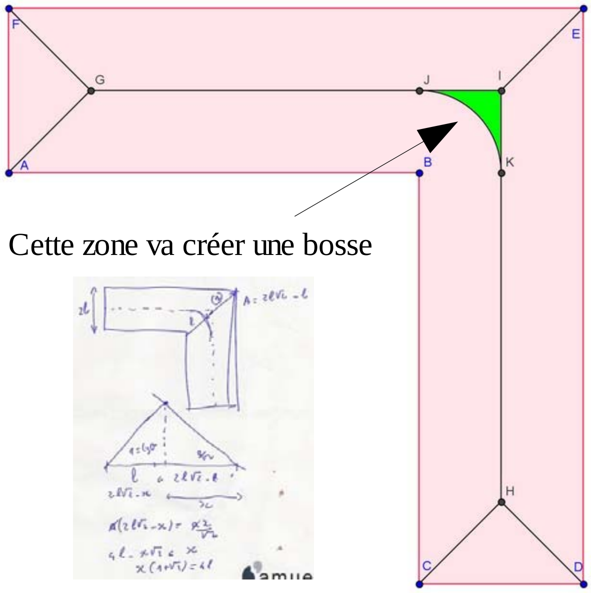


Il faut procéder de manière méthodique, en traçant les bissectrices, en les arrêtant quand elles se coupent et en regardant les nouvelles bissectrices engendrées par les intersections.
Par exemple, ci-dessus, les bissectrices des angles en F et G vont se couper en J et engendrer la bissectrice de l'angle en L.
Ci-dessus, un polygone avec 8 cotés qui à 8-2=6 sommets et 2×8-3=13 arêtes.

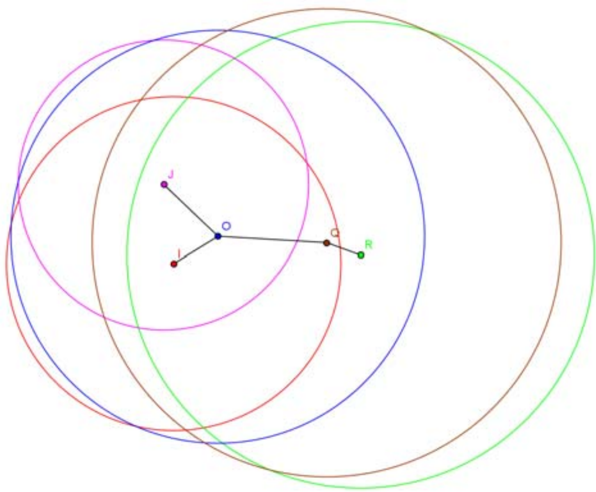
Quelques cas particuliers

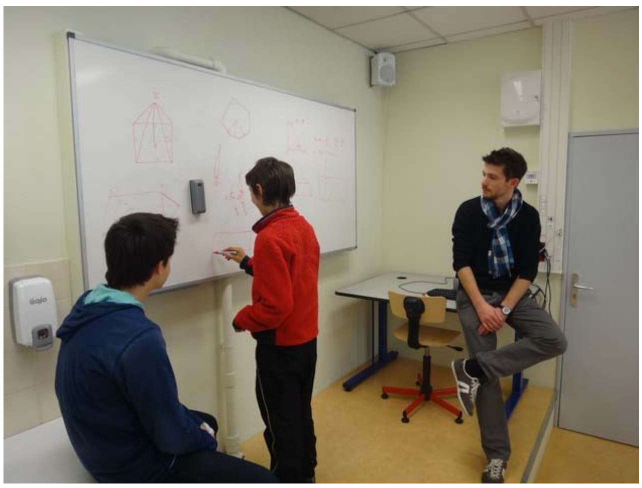
Si la figure de base n'est pas un polygone, par exemple une lune, ou si c'est un polygone non convexe alors ça se complique mais une bonne partie de nos idées peuvent être appliquées.





Se pose aussi le problème de savoir si quand on se donne uniquement les sommets avec les cercles inscrits nous sommes capable de retrouver la forme du polygone et si cette forme est unique.





Séminaire avec le chercheur

Notes d'édition

(1) Dans cette démonstration, on utilise le fait, non démontré, que le segment [IF] est perpendiculaire au côté [AB]. Ceci résulte du fait que la ligne de plus grande pente de la face ABS, descendant de S, est perpendiculaire au côté [AB].

(2) Plus précisément, l'intersection de deux bissectrices est la projection d'un sommet sur le plan horizontal, et limite donc la longueur des arêtes descendant de ce sommet.