Tas de sables numériques

Etude réalisée par Kevin Poulet (Tle S), Nadège Chojnacki (1ère S) et Jean-Baptiste Honde (2nde).

Sujet proposé par A. Gaudillière (LATP, CNRS Marseille) et encadré par V. Chojnacki (physique) et E. Ferron (Mathématiques).

Au lycée Félix Esclangon, Manosque, année 2013-2014.

Les tas de sables numériques sont des matrices où chaque cellule peut contenir au maximum 3 grains de sable. L'idée est d'observer les phénomènes induits par l'ajout de grains sur le tas sachant que lorsqu'une cellule comporte plus de 3 grains, elle s'effondre en répartissant équitablement autour d'elle les grains jusqu'à contenir elle-même au maximum 3 grains.

Le but du projet a été tout d'abord de programmer un algorithme permettant de modéliser les tas de sable puis d'étudier les propriétés des configurations dîtes atteignables (sous-entendues atteignables depuis n'importe quelle configuration de départ).

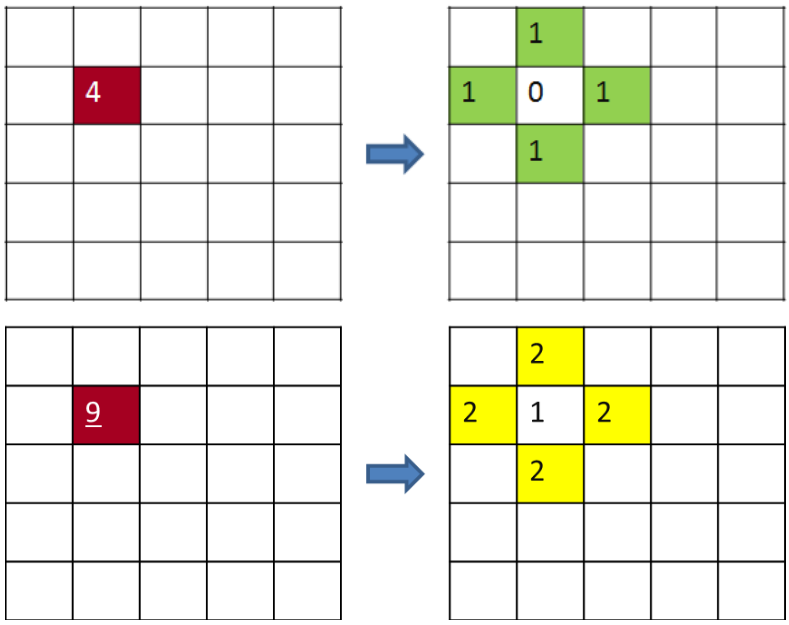
Afin de justifier la validité de notre algorithme, nous avons d'abord montré que l'ordre des écroulements était commutatif.

Ensuite, pour étudier les structures atteignables, nous avons d'abord établi des résultats en dimension 1 avant de repasser à l'étude de la dimension 2 avec plus ou moins de succès.

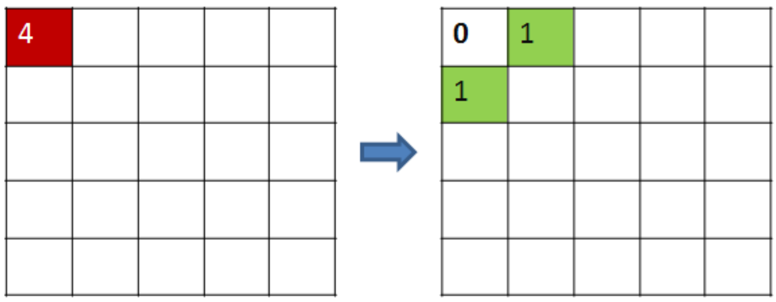
1. Définition et propriétés

1.1. Définition

Un tas de sable est une table divisée en cellules. Dans chaque cellule il peut y avoir entre zéro et trois grains de sable. Au delà de cette valeur la cellule est instable elle va donc s’écrouler de manière équitable sur les quatre cases adjacentes.



Si une case est sur le bord de la table les grains peuvent tomber hors de la table.

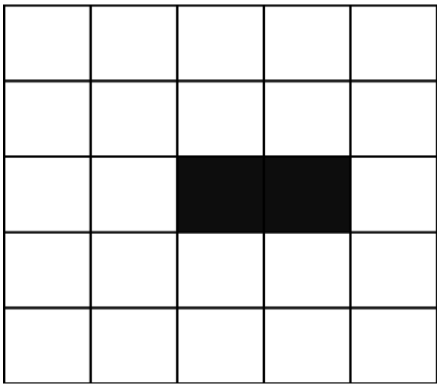


D’un point de vue physique, pour que l’analogie avec un tas de sable soit viable, les nombres dans les cellules doivent être considérés comme la pente du tas de sable en un point donné.

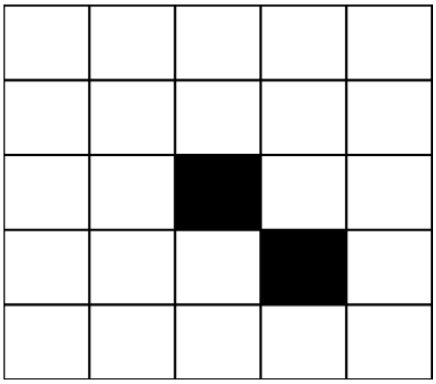
1.2. Distance dans un tas de sable

Nous avons eu besoin de définir une notion de distance entre deux cellules. Pour cela nous avons considéré une distance simple consistant à compter le nombre de cellules séparant deux cellules données en se déplaçant en ligne ou en colonne uniquement.

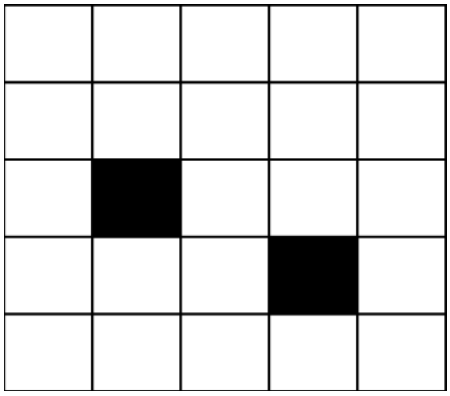
- Distance 1 : la distance entre deux cellules adjacentes est égale à 1



- Distance 2 : la distance entre deux cellules « en diagonale » est égale à 2



- Distance 3 :



(1)

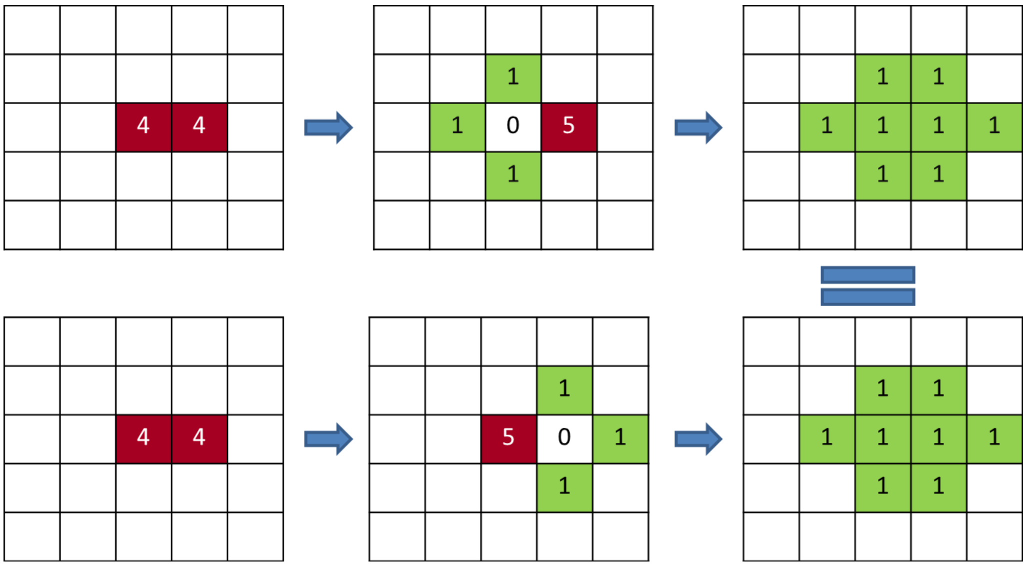
1.3. Propriétés

Il y a **commutativité des écroulements** au sein d'un tas de sable. Autrement dit, lorsque plusieurs cellules contiennent plus de trois grains, l'ordre dans lequel on choisit d'écrouler les cellules ne change pas le résultat final.

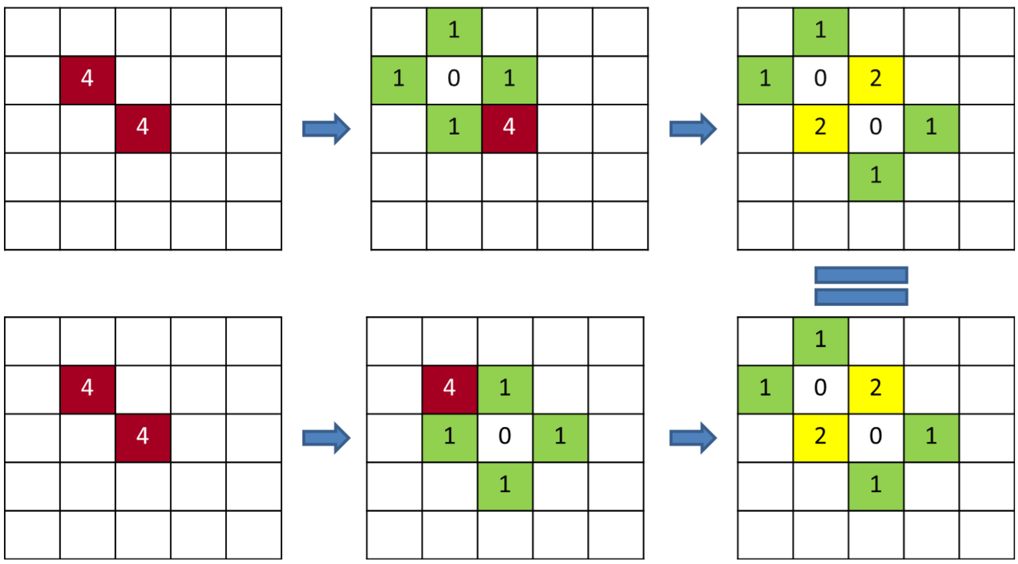
En effet, tout tas peut se décomposer en somme de tas élémentaires : on peut considérer qu'une case à n grains (n>3) peut être écroulée par « paquets » de quatre grains.

Nous avons démontré la commutativité pour des « paquets » de quatre grains en effectuant une disjonction des cas :

- Deux cellules à distance 1 :

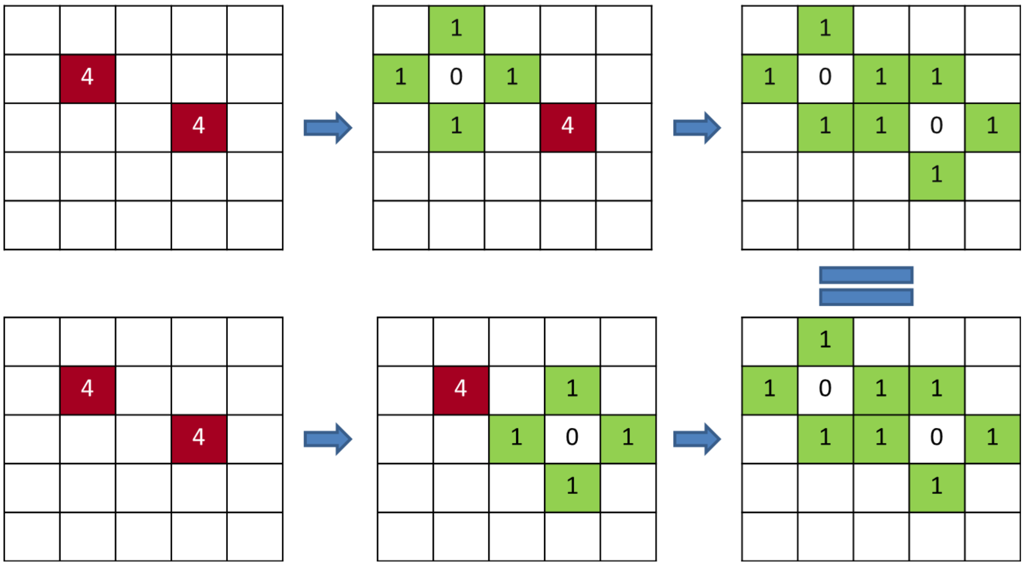


- Deux cellules à distance 2 :

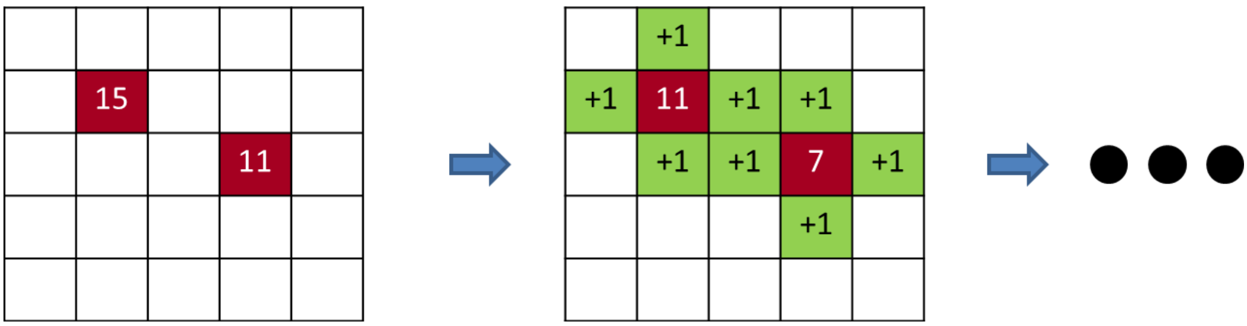


(2)

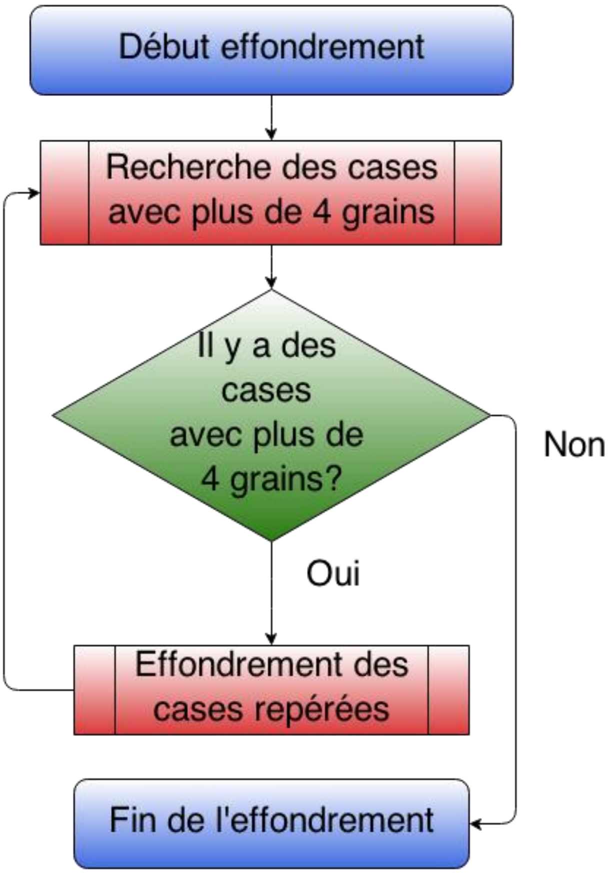
- Deux cellules à une distance strictement supérieure à 2 : il n'y a plus d'interférence entre les écroulements (3)



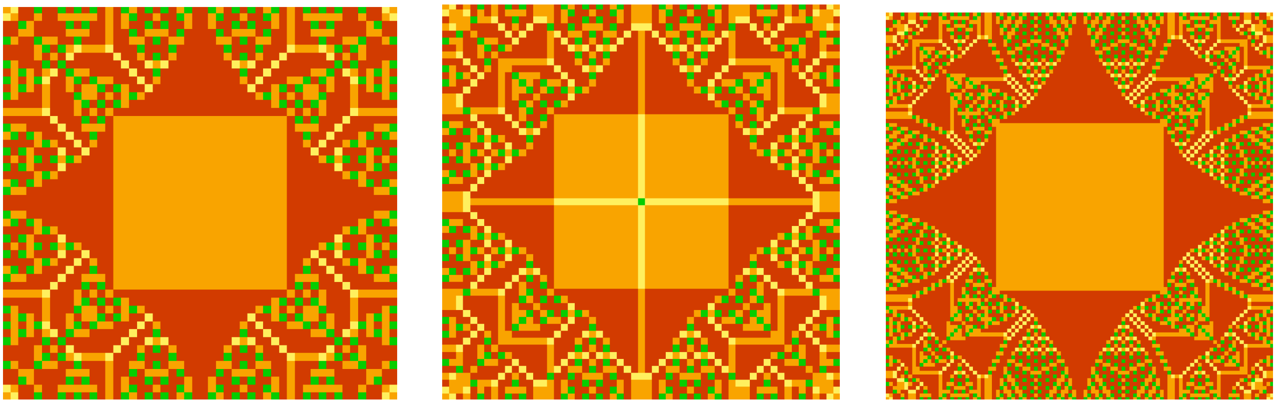
Puis en considérant que les cellules vides peuvent être éventuellement remplies avec des nombres quelconques et en décomposant les écroulements par « paquets » de quatre grains nous avons démontré la commutativité dans le cas général.



2. Algorithme de simulation



Quelques résultats générés par le programme :



Code présent à l’adresse suivante :
https://www.github.com/martinqt/Sand

3. Etude des configurations atteignables

Une structure atteignable est une structure que l'on peut atteindre depuis n'importe quelle configuration de départ en y ajoutant des grains de sable de manière quelconque.

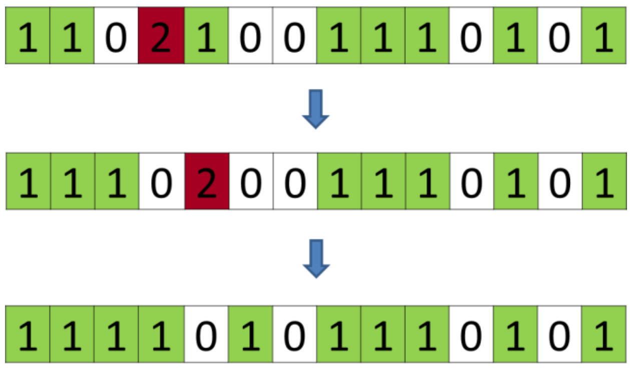
La première configuration atteignable évidente est la configuration pleine (de 3) notée T_3. Pour l'atteindre depuis une configuration quelconque il suffit effectivement de compléter les cellules jusqu'à 3 grains.

Il apparait alors clairement qu'une configuration atteignable dans un tas en dimension 2 est un tas de la forme T_3+x où x est un tas quelconque.

En effet un tel tas est toujours atteignable vu que la configuration pleine l'est. Réciproquement, une configuration atteignable devant pouvoir être atteinte depuis n'importe quelle configuration, elle doit l'être depuis la configuration pleine T_3, donc elle est de la forme T_3+x où x est un tas quelconque.

3.1. Etude en dimension 1

Sur une ligne les cellules ont 0 ou 1 grain et l'effondrement a lieu à partir de deux grains, ceux –ci se répartissant de part et d'autre de la cellule :



3.1.1. Configurations atteignables

De la même manière qu'en dimension deux, une configuration atteignable en dimension 1 est de la forme T_1+x où T_1 est la configuration pleine (de 1) et x est un tas quelconque.

Nous avons démontré que l'on ne peut pas avoir plus de un zéro par ligne.

Plus précisément, nous avons montré que pour un tas en ligne comportant n cellules :

- en partant de la configuration pleine, l'ajout d'un grain de sable sur la cellule k donne après effondrement une structure pleine de 1 avec un 0 dans la cellule n-k+1.

1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

- en partant d'une configuration ayant un 0 dans la cellule a, l'ajout d'un grain de sable dans la cellule k donne après effondrement :
  - une structure pleine de 1 avec un 0 dans la cellule a-k si k<a.
  - la configuration pleine si k=a
  - une structure pleine de 1 avec un 0 dans la cellule n+a-k+1 si k>a.

1	1	2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Ainsi, on obtient n+1 configurations atteignables : n configurations où le zéro peut apparaitre une fois et la configuration pleine T_1. (4)

3.1.2. Elément neutre

Nous avons découvert, un peu par hasard, qu'il existe un tas de sable appelé **élément neutre**, qui ajouté à un tas atteignable T_a quelconque, donne après écroulement le même tas T_a.

Elément neutre en dimension 1:

- Si n est pair, l'élément neutre est la configuration pleine
- Si n est impair, l'élément neutre contient un zéro sur la case centrale et des 1 ailleurs.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

(Notre méthode pour déterminer l'élément neutre est détaillée dans le cas de la dimension 2 ci-dessous). (5)

3.2. Etude en dimension 2

3.2.1. Elément neutre

Pour trouver l'élément neutre en dimension 2, nous partons de la structure pleine notée T_3 et nous l'ajoutons à elle-même, on obtient alors après écroulement une configuration θ. On cherche ensuite le tas α qui permet de retrouver la configuration T_3 depuis la configuration θ.

$$\underset{T_3}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}} + \underset{T_3}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}} = \underset{\Theta}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&2\\\hline 1&2&1\\\hline 2&1&2\\\hline\end{array}}$$

$$\underset{\Theta}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&2\\\hline 1&2&1\\\hline 2&1&2\\\hline\end{array}} + \underset{\alpha}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&1\\\hline 2&1&2\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array}} = \underset{T_3}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}}$$

L'élément neutre est alors le tas obtenu par la somme $T_3 + \alpha$.

En effet, un tas atteignable étant de la forme T_3+x avec x tas quelconque, on peut vérifier que $T_3+\alpha$ est bien neutre pour T_3+x en utilisant l'associativité, la commutativité et la construction de notre élément neutre ci-dessus :

$$(T_3+x)+(T_3+\alpha) = T_3+x+T_3+\alpha = T_3+T_3+\alpha+x = \theta+\alpha+x = T_3+x$$

3.2.2. Configurations atteignables

Nous avons fait quelques tentatives pour essayer de déterminer l'ensemble des structures atteignables en dimension 2. Il y a apparemment déjà plusieurs dizaines de configurations atteignables pour un tas 2x2, mais nous ne sommes pas parvenus à trouver une façon exhaustive de les décrire. Cela semble bien plus délicat qu'en dimension 1 et fera peut être l'objet d'une étude plus approfondie l'année prochaine.

4. Conclusion

Le programme que nous avons construit nous a permis de faire rapidement des conjectures sur le comportement des tas de sable. Cependant la recherche des configurations atteignables en dimension 2 nous a demandé beaucoup d'efforts et n'a produit que peu de résultats, mis à part la découverte intéressante mais hasardeuse de l'élément neutre. Le sujet semble encore très vaste.

Notes d'édition

(1) Il manque deux configurations. À distance deux, les cellules peuvent être sur la même ligne avec une case vide entre elles. De même pour les cellules à distance trois.

(2) Il manque le cas où les deux cellules sont sur la même ligne.

(3) C'est aussi le cas lorsque les deux cellules sont sur la même ligne.

(4) Il manque une preuve complète de ces résultats : les élèves n'ont pas eu le temps d'inclure cette preuve qui est assez longue.

(5) La méthode mentionnée n'est pas une preuve à elle seule. Pour le cas pair, il reste à montrer que $T_1+T_1=T_1$. Pour le cas impair, il s'agit de voir que θ est le tas de sable avec des uns partout sauf sur la case centrale. α est alors la configuration avec seulement un grain au centre et il faut enfin montrer que $T_1+\alpha= \theta$.