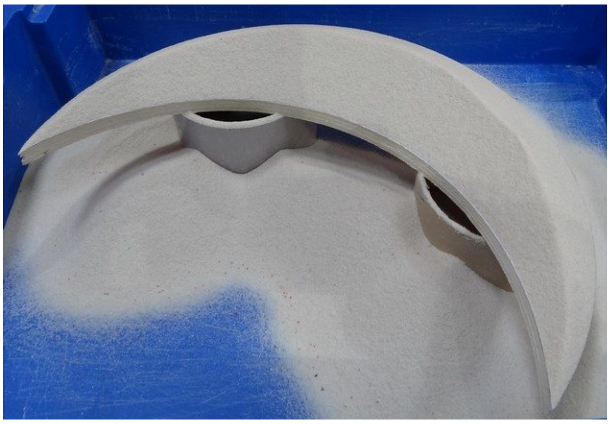
Les tas de sable
Année 2013-2014

Élèves : Gaspard COUSIN, David AMBLARD et Volodia KLUSZCZYNSKI, première S
Établissement : Lycée d'Altitude de Briançon (Hautes-Alpes 05)
Enseignants : Hubert PROAL et Mickaël LISSONDE
Chercheurs : Camille PETIT (Université de Fribourg) et Yves PAPEGAY (INRIA-Sophia Antipolis)

Présentation du sujet

Déterminer la forme d'un tas de sable réalisé sur une table de forme quelconque, c'est-à-dire déterminer la position et la forme des lignes de crête.



Ce problème est la prolongation du sujet de l'année dernière (cf. : http://www.lyc-altitude.ac-aix-marseille.fr/spip/IMG/pdf/2013-Tas_de_sable-Art-MeJ-Briancon.pdf) mais dans le cas général.

Résultats obtenus

Les élèves sont capables de déterminer la position de la ligne de crête pour de nombreuses formes (lune, deux carrés collés, ...)

Valorisations des travaux

Les élèves ont exposé ce sujet au congrès *MATh.en.JEANS* de Berlin en 2014 et lors du forum PASS à Aix-en-Provence.

Texte de l'article

Sujet :

L'année dernière nous avions déterminé le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et leurs positions quand nous réalisons un tas de sable sur une « table » de la forme d'un polygone convexe. Nos recherches de cette année portent sur les tas de sable quand les formes des tables sont quelconques.

I. La ligne de crête

Quand nous réalisons un tas de sable sur une table de forme polygonale il se forme un polyèdre, un peu comme un chapiteau. Ce polyèdre a une face qui est la table et les autres faces vont se couper selon des segments. Nous appellerons ligne de crête l'ensemble de ces segments, autrement dit la ligne de crête est l'ensemble des points qui appartiennent à au moins deux versants du tas de sable (*figure 1*).

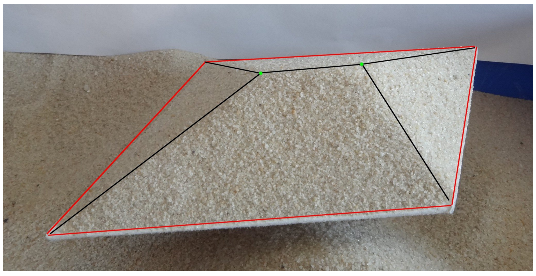


Figure 1 : en rouge la table, en forme de quadrilatère et en noir la ligne de crête, composée de 5 segments

Cette ligne de crête est un objet en trois dimensions, nous cherchons généralement la projection orthogonale de cette ligne de crête sur la table.
Comme nous le verrons par la suite, la ligne de crête n'est pas toujours formée de segments, elle peut être composée de partie de courbes.

La pente d'un versant d'un tas de sable est constante, autrement dit les angles en E et D sont égaux dans la figure 2. Un point M de la ligne de crête appartient à au moins deux versants V1 et V2. Si nous notons M' le projeté orthogonal de M sur la table nous obtenons : DM'=MM'×tan(D) et EM'=MM'×tan(E) (voir *figure 2*).
Ce qui prouve que M' va se trouver à égale distance des deux bords des versants V1 et V2 avec la table (*figure 2*).

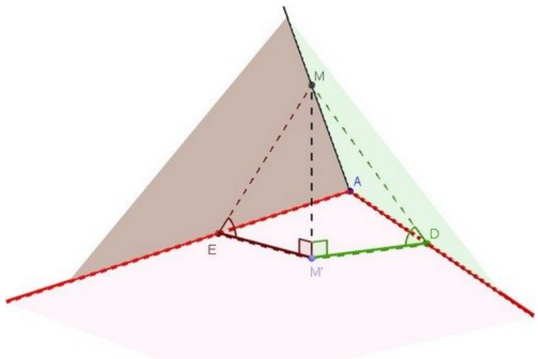


Figure 2 : M sur la ligne de crête des versants V1 (marron) et V2 (vert)

Conclusion : la projection de la ligne de crête est incluse dans l'ensemble des points à égale distance des bords de la table. (1)
Remarque : la hauteur du point M est proportionnelle à la distance de M' au bord et à la tangente de la pente du versant (qui ne dépend que de la nature du sable).

II. Les outils nécessaires

Nos expériences, en particulier avec le double carré et la lune, nous ont conduit à chercher les ensembles de points à égale distance de deux objets mathématiques simples (points, droites, cercles)

1) Ensemble de points à égale distance de deux points

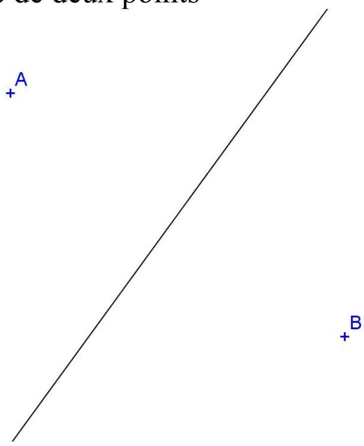


Figure 3 : la médiatrice de [AB]

L'ensemble des points à égale distance de deux points forme une droite, la **médiatrice** de [AB] (*figure 3*).

2) Ensemble de points à égale distance de deux droites

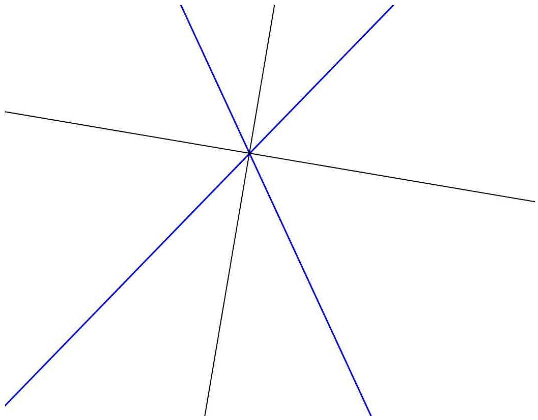


Figure 4 : les bissectrices des deux droites bleues

L'ensemble des points à égale distance de deux droites (bleues) est donné par les **bissectrices** (*figure 4*) si elles sont sécantes sinon la droite « médiane » (*figure 5*).

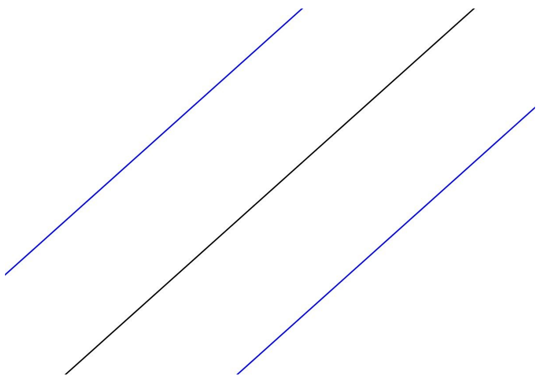


Figure 5 : droite « médiane » entre les deux droites bleues

3) Ensemble des points à égale distance entre un point F et une droite *d*

Nous pouvons toujours prendre comme axe des abscisses la droite donnée *d* et comme axe des ordonnées la droite perpendiculaire à *d* passant par F.

Propriété 1 : l'ensemble des points à égale distance de F et de *d* va former une **parabole** (*figure 6*).

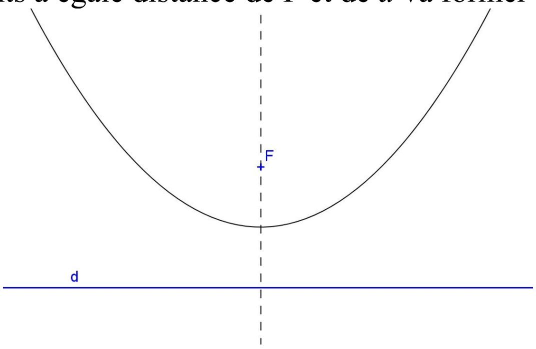


Figure 6 : parabole qui est à égale distance entre F et la droite d

Démonstration :
Nous posons F (0 ; y_F). Soit un point M (x ; y) qui est à égale distance de F et de *d*.
Nous avons $d(M\,;d)=|y|$ et $d(M\,;F)=\sqrt{x^2+(y-y_F)^2}$
Si M est à égale distance de F et de *d*, nous obtenons :
$|y|=\sqrt{x^2+(y-y_F)^2}\Leftrightarrow y^2=x^2+(y-y_F)^2\Leftrightarrow x^2-2\,y\,y_F+y_F^2=0\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2+y_F^2}{2\,y_F}$
Il va de soit que y_F est non nul, sinon l'ensemble cherché est la droite *d*. (2)

4) Ensemble de points à égale distance de deux cercles

Nous nous plaçons dans le cas où les deux cercles n'ont pas le même centre et sont sécants.
Nous pouvons réaliser un repère dont l'un des centres serait l'origine et dont le deuxième centre serait sur l'axe des ordonnées (positif).
Nous allons chercher l'ensemble de points à égale distance des deux cercles dans la zone jaune (*figure 7*).

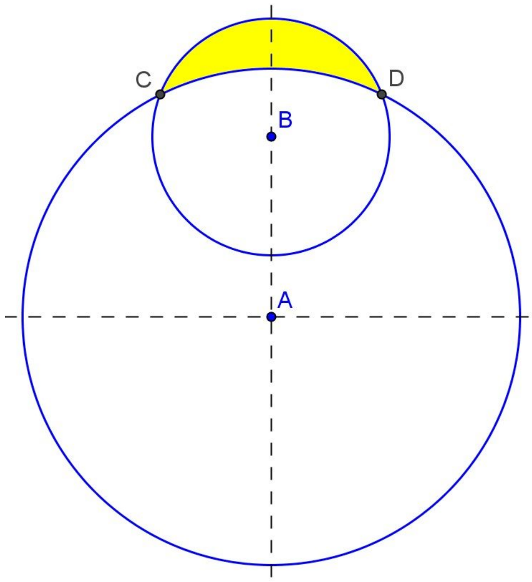


Figure 7 : recherche de l'ensemble de points se trouvant dans la zone jaune à égale distance des deux cercles bleus.

Nous savons que les points C, D et E (3) sont dans l'ensemble cherché (*figure 8*). Nous avons d'abord pensé que l'arc de cercle passant par ces trois points était la solution, mais en utilisant *GeoGebra* nous pouvons constater que certains points de cet arc ne sont pas à égale distance des deux cercles (en rouge dans la *figure 8*).

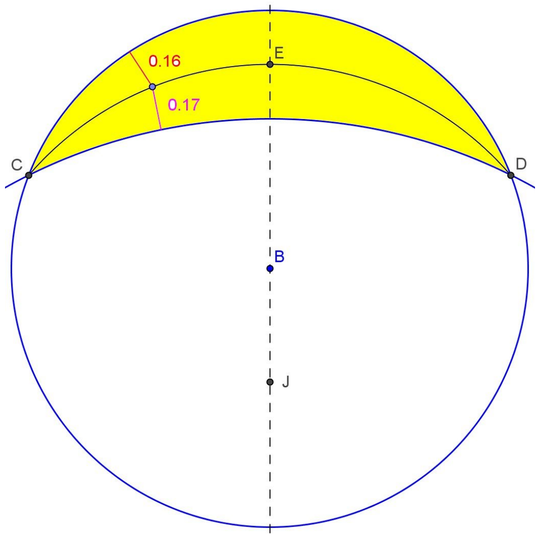


Figure 8 : l'arc de cercle passant par les points C, D et E n'est pas la bonne solution

Nos chercheurs et nos enseignants nous ont demandé de regarder de plus près l'**ellipse**, mais nous ne sommes pas arrivés à montrer que cet ensemble était la solution (voir annexe 1).

III. Mise en œuvre de nos outils

Nos travaux ont commencé sur les deux formes ci-dessous. C'est en essayant de comprendre comment allaient se former les tas de sable que nous avons compris que les ensembles de points à égale distance jouaient un grand rôle. En effet, la ligne de crête va se positionner à égale distance des bords les plus proches et sa hauteur est proportionnelle à cette distance.

1) Deux carrés collés

L'année dernière nous avions remarqué que pour une table en forme de L, la projection de la ligne de crête du tas de sable dans le « virage » n'avait pas la forme d'un arc de cercle (*figure 9*), en effet l'arc de cercle ne passe pas par le point N, point dont nous sommes sûrs qu’il appartient à la ligne de crête car nous pouvons dessiner un cercle de centre N à l'intérieur de la forme L.

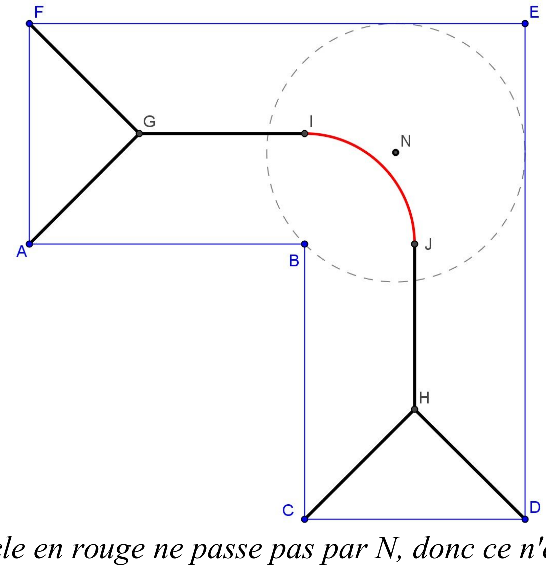


Figure 9 : l'arc de cercle en rouge ne passe pas par N, donc ce n'est pas la ligne de crête

Nous avons compris plus tard que le « virage » dans la forme du L était composé de deux arcs de parabole.

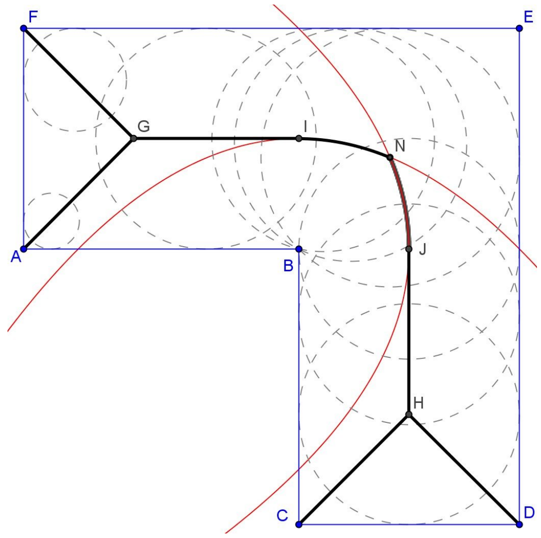


Figure 10 : la ligne de crête (en noire) pour la table en forme de L

Pour mieux comprendre la forme de la ligne de crête dans le virage, nous avons étudié la forme composée de deux carrés de tailles différentes accolés (*figure 11*).

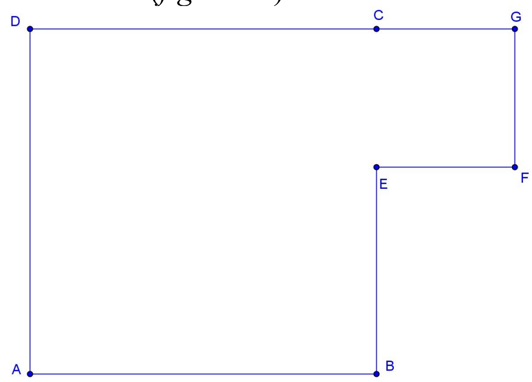


Figure 11 : deux carrés (ABCD et EFGC) accolés, un « L généralisé »

Pour une table comme dans la *figure 11*, nous connaissons déjà certaines lignes de crête (partie en noire dans la *figure 12*). Grâce au travail de l'année dernière, nous sommes capables de déterminer la position des centres des carrés. Pour cela, il suffit de tracer les diagonales de ce dernier et de repérer l'intersection. Puis, nous savons qu'une ligne de crête se formera parallèlement au côté [CG]. En effet, ce cas-là se rapproche de celui du rectangle. Mais nous n'arrivions pas à comprendre comment va se former la ligne de crête entre les points I et H. Un arc de cercle passant par I et H ne correspondait pas à l'expérience (*figure 13*).

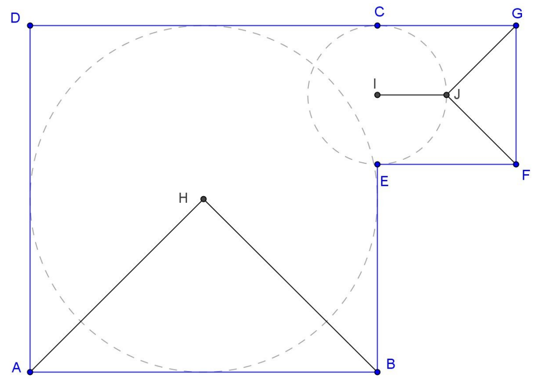


Figure 12 : en noir les lignes de crête connues, comment va se former la ligne de crête entre I et H ?

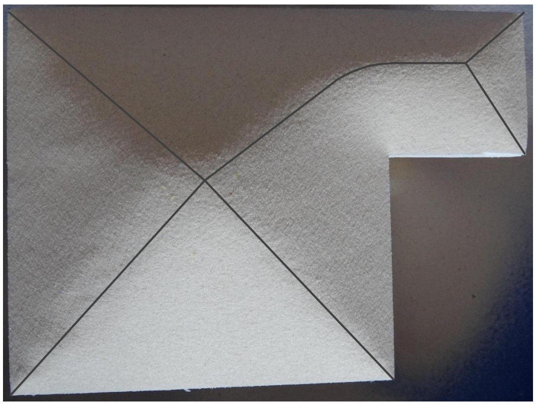


Figure 13 : photo du tas de sable vue de dessus

L'année dernière, afin de trouver la ligne de crête, nous avions mis au point une méthode qui consistait à faire rouler un cercle à l'intérieur de la forme. La trace du centre de ce cercle donne la ligne de niveau et en traçant de nombreuses lignes de niveau nous faisons apparaître la ligne de crête.
Regardons ce qu'on obtient quand l'on se place proche du point I (avec des cercles de rayon supérieur à IE) – *figure 14*.
Les lignes de niveau (en rouge sur la *figure 14*) sont formées d'un segment quand le cercle roule le long de [DC] jusqu'au moment où le cercle touche le point E. Puis il y a une rotation quand le cercle pivote autour du point E et enfin un segment parallèle à [EB].
Pour visualiser la ligne de crête, il faut nous intéresser au moment où le cercle est tangent à [DC] et touche le point E. Son centre est alors à égale distance de [DC] et E.

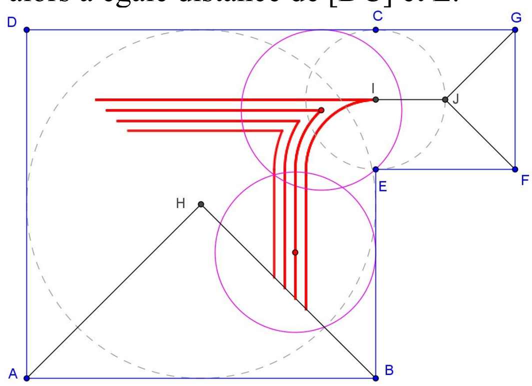


Figure 14 : en rouge les lignes de niveau autour de I

Ainsi, la ligne de crête, après I, va être un morceau de parabole de foyer E et de directrice [DC] (*figure 15*).

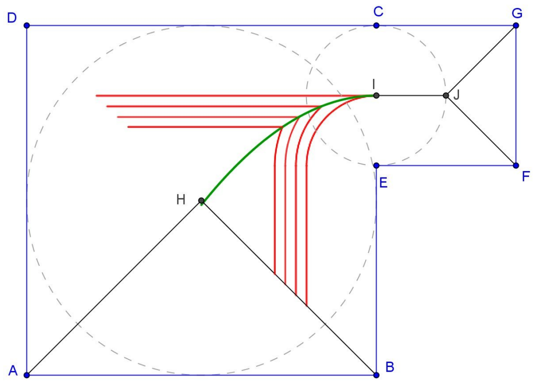


Figure 15 : en vert l'arc de parabole qui va donner une portion de la ligne de crête

Si nous agrandissons autour du point H nous pouvons constater que la parabole ne passe pas par H. En effet le point H n'est pas à égale distance de E et de [DC]
La ligne de crête va suivre la parabole jusqu'au moment où le cercle sera tangent à [EB] (point R sur la *figure 16*), puis la ligne de crête va être formée par les points à égale distance de [DC] et de [EB], c'est-à-

dire la bissectrice (*figure 16*).

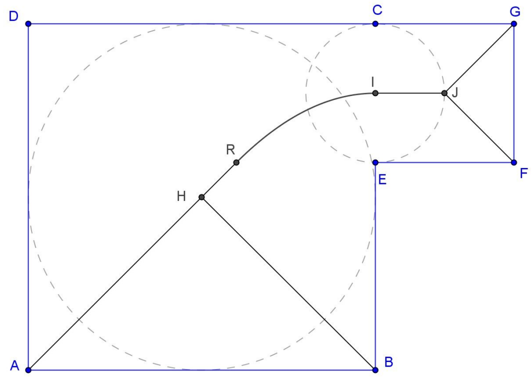


Figure 16 : projection de la ligne de crête, segment [HR] puis arc de parabole

Cette figure nous a permis de comprendre comment se formait la ligne de crête : elle est formée par l'ensemble des points à égale distance de deux côtés de la forme de la table.

2) La lune

La figure de la lune est d'apparence très simple. Il s'agit de deux arcs de cercles dont les centres sont situés sur une même droite (4) (*figure 17*).

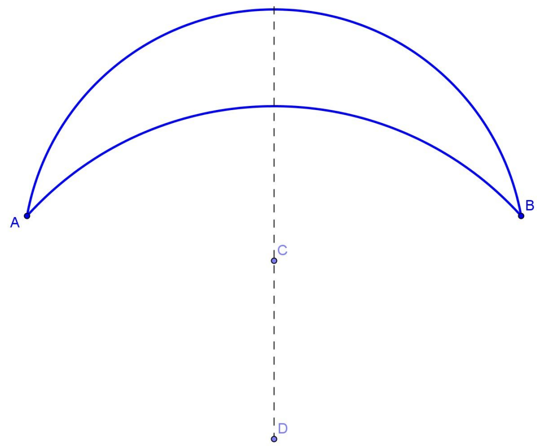


Figure 17 : construction de notre lune

a) Première hypothèse

Pour déterminer le tas de sable qui se formera sur cette figure, nous avons fait une hypothèse. Nous nous sommes dit que la ligne de crête correspondait à l'arc de cercle passant par les trois points A, B et G le milieu de [EF] (*figure 18*).

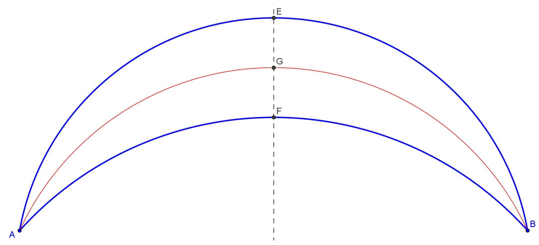


Figure 18 : arc de cercle passant par trois points A, G et B à égale distance des deux arcs de cercles de la lune

Pour vérifier cette hypothèse, nous avons utilisé *GeoGebra*. C'est alors que nous nous sommes aperçus qu'il ne s'agissait pas de la bonne solution. En effet, nous avons tracé un cercle tangent aux deux arcs de cercles de la lune et nous avons constaté que son centre I n'était pas sur l'arc de cercle de notre hypothèse (*figure 19*).

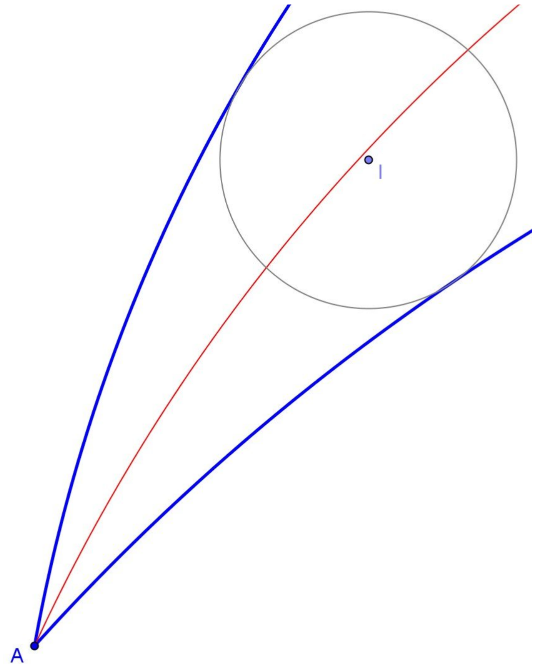


Figure 19 : le centre du cercle tangent aux deux arcs de cercles de la lune, le point I, n'est pas sur notre arc de cercle hypothèse (rouge)

b) La solution

Nous avons fait appel à notre chercheur, Camille Petit, qui a trouvé que l'ensemble des points à égale distance de deux cercles correspond à une **ellipse**, *voir annexe 1* (*figure 20*).

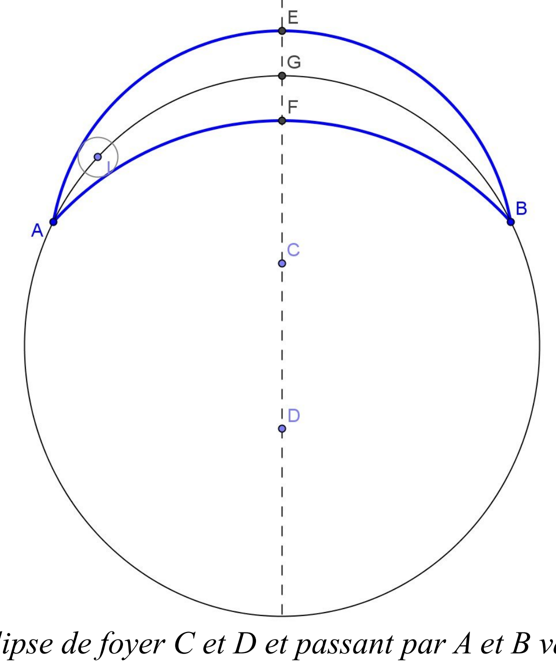


Figure 20 : l'arc d'ellipse de foyer C et D et passant par A et B va former la projection de la ligne de crête

Annexe 1.
Recherche des ensembles de points à égale distance de deux cercles

Nous avons le cercle de centre A et de rayon r_A (en bleu) et le cercle de centre B et de rayon r_B (en mauve). Nous prenons M une point à égale distance des deux cercles et on note $t=d(\mathrm{M}\,;\mathrm{C_A})=d(\mathrm{M}\,;\mathrm{C_B})$

a) Dans le cas où les deux cercles sont sécants (*figure 21*), nous avons quatre zones : jaune, verte, orange et blanche.

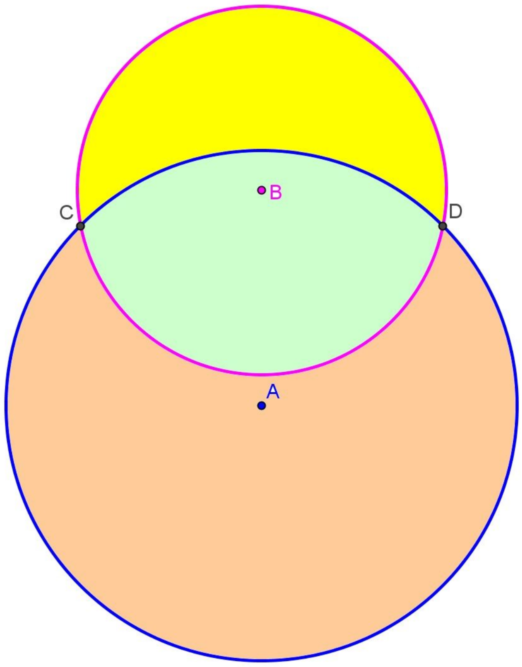


Figure 21 : les quatre zones délimitées par l'intersection des deux cercles

Quand M est dans la zone jaune (*figure 22*), $d(\mathrm{A}\,;\mathrm{M})=r_\mathrm{A}+t$ et $d(\mathrm{B}\,;\mathrm{M})=r_\mathrm{B}-t$, si on somme ces deux formules nous obtenons $d(\mathrm{A}\,;\mathrm{M})+d(\mathrm{B}\,;\mathrm{M})=r_\mathrm{A}+t+r_\mathrm{B}-t=r_\mathrm{A}+r_\mathrm{B}=constante$

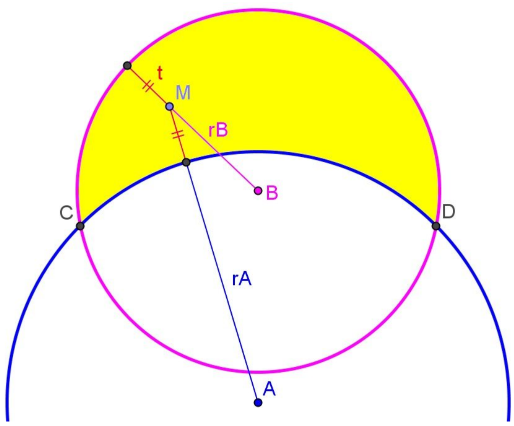


Figure 22 : quand M, à égale distance des deux cercles, est dans la zone jaune

De même si M est dans la zone orange, $d(\mathrm{A}\,;\mathrm{M})=r_\mathrm{A}-t$ et $d(\mathrm{B}\,;\mathrm{M})=r_\mathrm{B}+t$ qui conduit à $d(\mathrm{A}\,;\mathrm{M})+d(\mathrm{B}\,;\mathrm{M})=r_\mathrm{A}+r_\mathrm{B}$

Conclusion : si M est à égale distance des deux cercles, dans la zone orange ou jaune, alors M est sur l'ellipse de foyers A et B qui passe par C et D (car $\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=\mathrm{AD}+\mathrm{BD}=r_\mathrm{A}+r_\mathrm{B}$)

Réciproquement (*figure 23*), si N est un point de l'ellipse de foyers A et B et qui passe par C et D alors $\mathrm{AN}+\mathrm{BN}=r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}}$ mais nous avons aussi $\mathrm{AN}=r_{\mathrm{A}}+\mathrm{SN}$ et $\mathrm{BN}=r_{\mathrm{B}}-\mathrm{NT}$ qui permet de montrer que SN-NT=0 soit SN=NT.
De plus $\mathrm{SN}=d(\mathrm{N},\mathrm{C}_{\mathrm{A}})$ car (NS) est perpendiculaire à la tangente à C_A en S, de même $\mathrm{NT}=d(\mathrm{N},\mathrm{C}_{\mathrm{B}})$

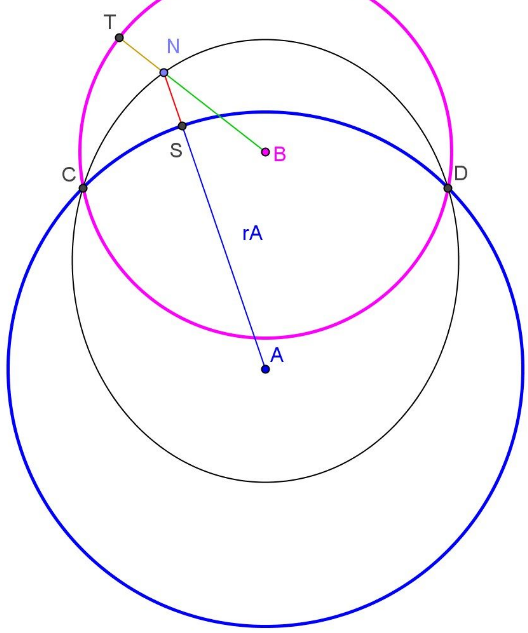


Figure 23 : N un point de l'ellipse de foyers A et B tel que $\mathrm{AN}+\mathrm{BN}=r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}}$

Nous avons le même type de raisonnement si N est dans la zone orange.

Quand M est dans la zone verte, conférer *figure 21*, nous avons $d(\mathrm{A};\mathrm{M})=r_{\mathrm{A}}-t$ et $d(\mathrm{B};\mathrm{M})=r_{\mathrm{B}}-t$. Ceci nous conduit, en faisant la différence à $\mathrm{AM}-\mathrm{BM}=r_{\mathrm{A}}-r_{\mathrm{B}}$ (*figure 24*).

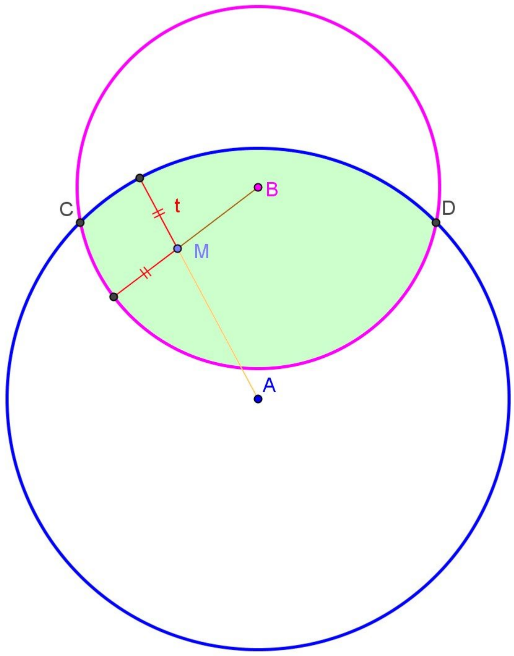


Figure 24 : quand M, à égale distance des deux cercles, est dans la zone verte

Attention, r_A-r_B>0, nous avons la branche d'hyperbole tournée vers le cercle de plus petit rayon.

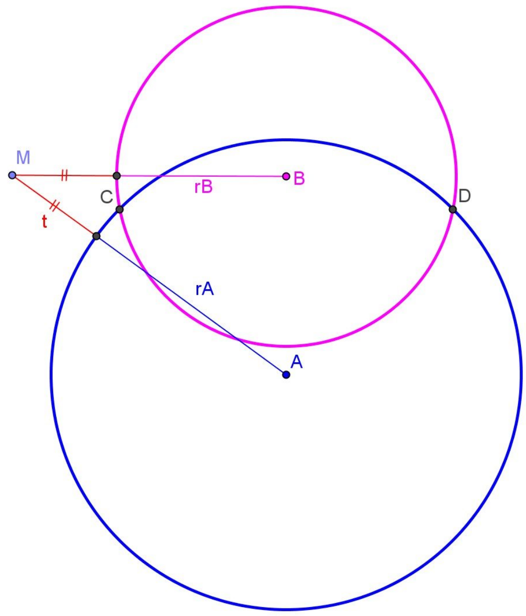


Figure 25 : *quand M, à égale distance des deux cercles, est dans la zone blanche*

De même si M est dans la zone blanche, conférer *figure 25*, nous avons $d(\mathrm{A}\,;\mathrm{M})=r_{\mathrm{A}}+t$ et $d(\mathrm{B};\mathrm{M})=r_{\mathrm{B}}+t$. Comme précédemment, quand nous faisons la différence des deux formules nous obtenons $\mathrm{AM}-\mathrm{BM}=r_{\mathrm{A}}-r_{\mathrm{B}}$ (*figure 25*).

Conclusion : si M est à égale distance des deux cercles dans la zone verte ou blanche alors M est sur la branche de d'hyperbole orientée vers le cercle de plus petit rayon ou encore la branche d'hyperbole qui passe par C et D.

Réciproquement nous pouvons montrer que si M vérifie $\mathrm{AM}-\mathrm{BM}=r_{\mathrm{A}}-r_{\mathrm{B}}>0$ et se trouve dans la zone blanche ou verte alors M est à égale distance des deux cercles. Il suffit de procéder comme pour l'ellipse en décomposant AM et BM astucieusement.

Remarque : si les rayons des deux cercles sont égaux, $r_{\mathrm{A}}-r_{\mathrm{B}}=0$ .La condition $\mathrm{AM}-\mathrm{BM}=r_{\mathrm{A}}-r_{\mathrm{B}}=0$ conduit la branche d'hyperbole à se « transformer » en médiatrice de [AB]

En conclusion du cas où les deux cercles sont sécants en C et D, l’ensemble des points à égale distance des deux cercles est composé d'une **ellipse** de foyers A et B et passant par C et D et de la branche d'hyperbole de foyers A et B passant par C et D (ou la médiatrice de [AB] si les deux rayons sont égaux).

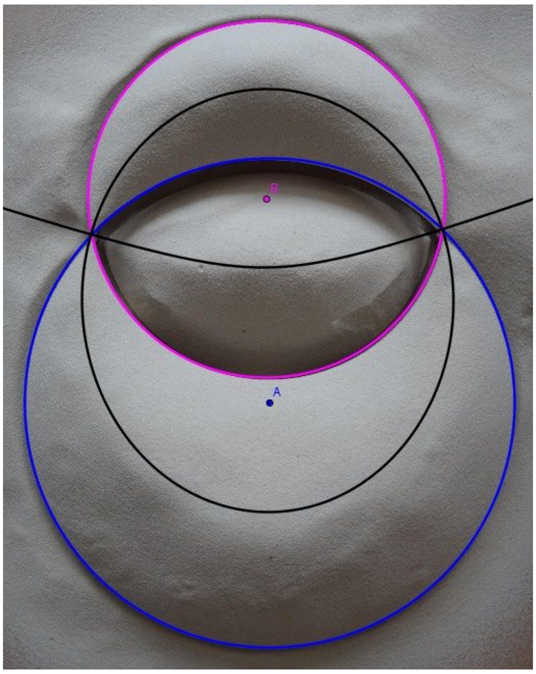


Figure 26 : photo des tas de sable, vue du dessus

b) Dans le cas où les deux cercles ne sont pas sécants (*figure 27*), nous avons trois zones : jaune, orange et blanche.

Le point M ne peut être que dans la zone blanche

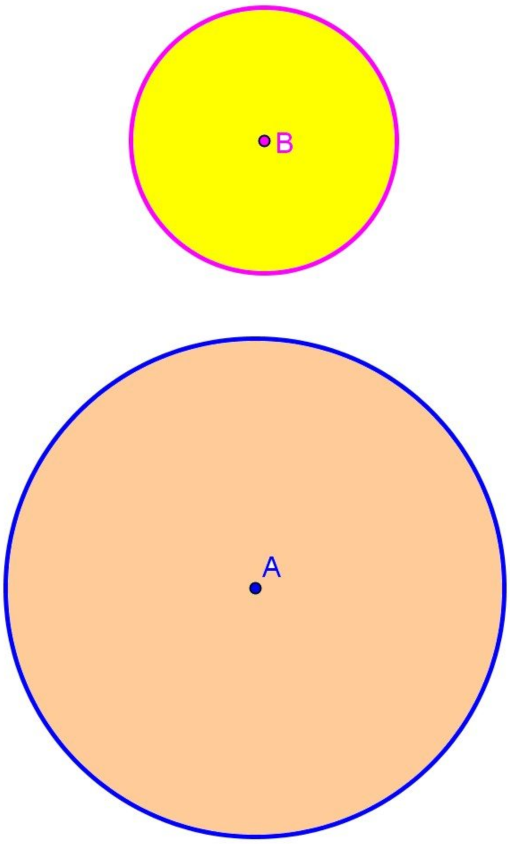


Figure 27 : trois zones délimitées par les deux cercles disjoints

Avec la même démarche et le même raisonnement que dans le paragraphe *a*, « quand M est dans la zone blanche », nous arrivons à la conclusion suivante :
L'ensemble des points à égale distance de deux cercles non sécants est la branche d'hyperbole de foyers A et B (5) la plus proche du cercle de plus petit rayon (*figure 28*).

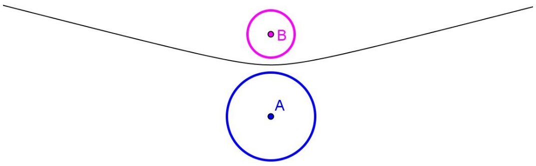


Figure 28 : la branche d'hyperbole correspondant à l'ensemble des points à égale distance de deux cercles disjoints

Il existe aussi un autre cas de figure de deux cercles qui sont non sécants (*figure 29*). Dans ce cas l'ensemble de points à égale distance des deux cercles est l'ellipse de foyers A et B telle que $d(\mathrm{A}\,;\mathrm{M})+d(\mathrm{B}\,;\mathrm{M})=r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}}$

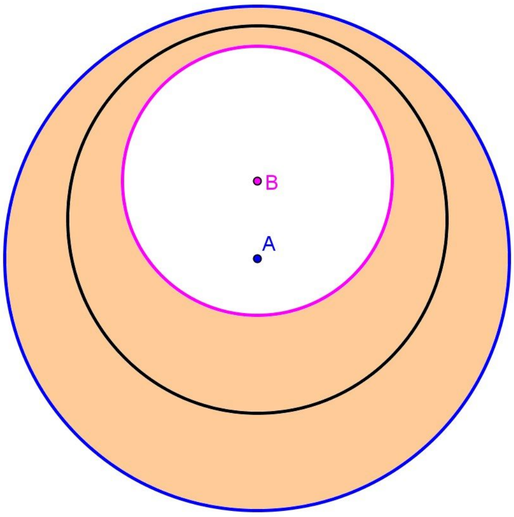


Figure 29 : ellipse correspondant à l'ensemble des points à égale distance de deux cercles disjoints concentriques(6)

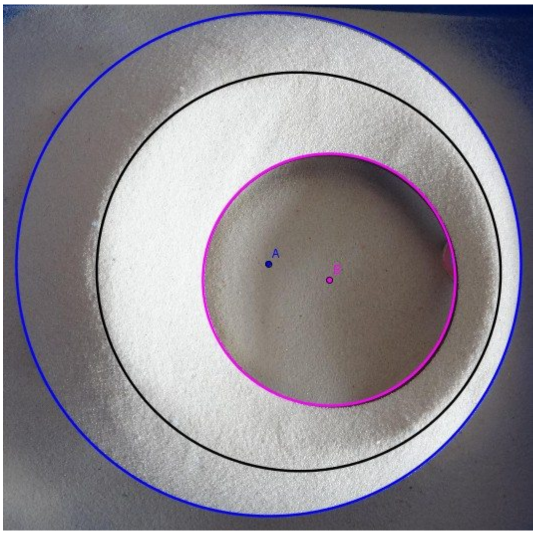


Figure 30 : photo du tas de sable vue de dessus

Notes d'édition :

(1) La démonstration produite ici fonctionne dans le cas où les bords sont rectilignes ; les auteurs extrapolent alors qu'il en est de même lorsque la forme de base est plus compliquée, et l'utiliseront par la suite.

(2) Non : l'ensemble cherché est la droite perpendiculaire à *d* et passant par F

(3) Le point E considéré est le milieu des deux points d'intersection des arcs de cercle avec la droite reliant leurs deux centres.

(4) Deux points sont toujours alignés !

(5) Cette condition ne détermine pas une hyperbole unique. Il faut préciser qu'elle passe par le point du segment [A,B], équidistant des deux cercles.

(6) Les deux cercles ne sont pas concentriques ; l'un est inclus dans l'autre. Si les deux cercles sont concentriques, alors l'ensemble recherché est aussi un cercle, de même centre que les deux cercles de départ.