Tamis de Sierpiński

Année 2015 - 2016

Raphaël BERNAS, Sacha DOUET, Antonin EYRAUD, Paul GLAVIER, Noah LUNNEY, Jean-Baptiste SABATIER, Alex TRAN VAN NHIEU, élèves de 4ème

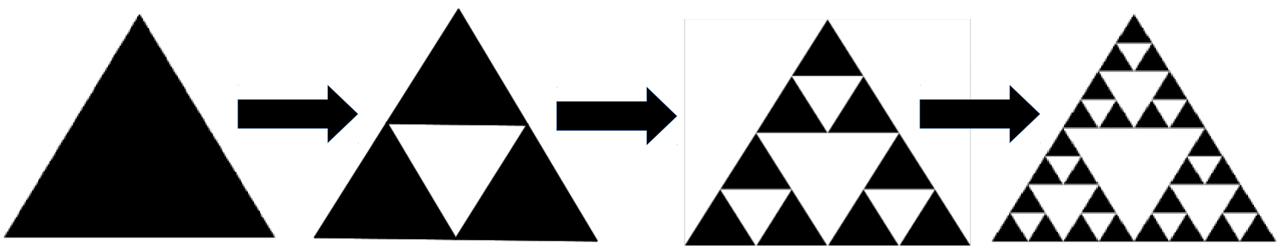
Encadrés par : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.

Établissement : Collège Alain-Fournier, Orsay (91).

Chercheuse : Céline Abraham.

<u>Le sujet</u> :

Le Tamis de Sierpiński se construit ainsi : nous prenons au départ un triangle équilatéral, nous le divisons en quatre triangles équilatéraux identiques, équivalents à un quart du triangle initial et nous retirons le triangle central. Nous reproduisons cette division dans les trois autres triangles. Nous pouvons continuer ainsi jusqu'à l'infini. Nous obtenons le Tamis de Sierpiński.
Voici les premières étapes :



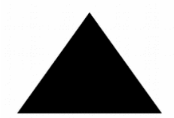
<u>Questions</u> :
- A quoi ressemble la figure au bout de plusieurs étapes ?
- Trouver d'autres méthodes pour construire ce tamis plus rapidement.
- Calculer son aire blanche (l'aire qu'on enlève) et son aire noire (l'aire qu'on garde).

<u>Nos résultats</u> : Nous avons établi des formules générales des aires blanche et noire à une étape *n* donnée, ainsi que le périmètre d'un triangle formé à cette étape. Nous avons trouvé des approches du tamis de Sierpiński, une basée sur une construction et une autre basée sur le triangle de Pascal. Nous avons ensuite étendu le sujet en nous basant sur des carrés à la place de triangles.

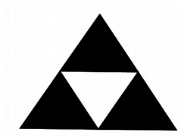
I – Premières constructions

1) **Avec les milieux des côtés**

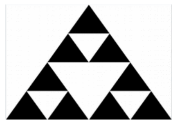
Etape 1 : on a un triangle équilatéral.



Etape 2 : On prend les milieux des côtés et on les relie par des segments, on obtient quatre triangles et on enlève le triangle central.



Etape 3 : On reproduit l'étape précédente dans chaque triangle noir formé.

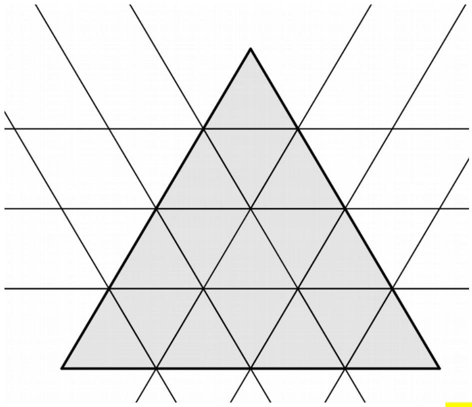


On continue ce procédé indéfiniment.

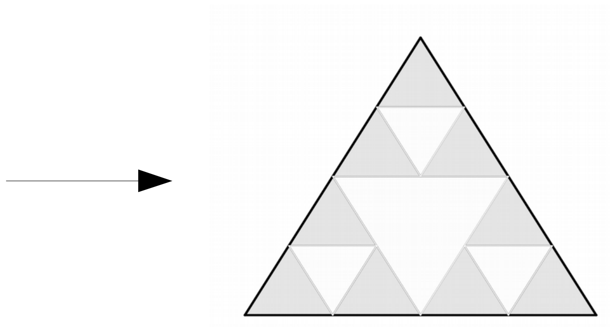
Voici encore le Tamis à l'étape 4 :

2) Avec des parallèles

Nous avons trouvé un moyen de former ce tamis plus rapidement, en construisant des parallèles(1).
On prend un triangle équilatéral ; on crée des parallèles pareillement espacées les unes des autres (les côtés sont pris en compte)(2).

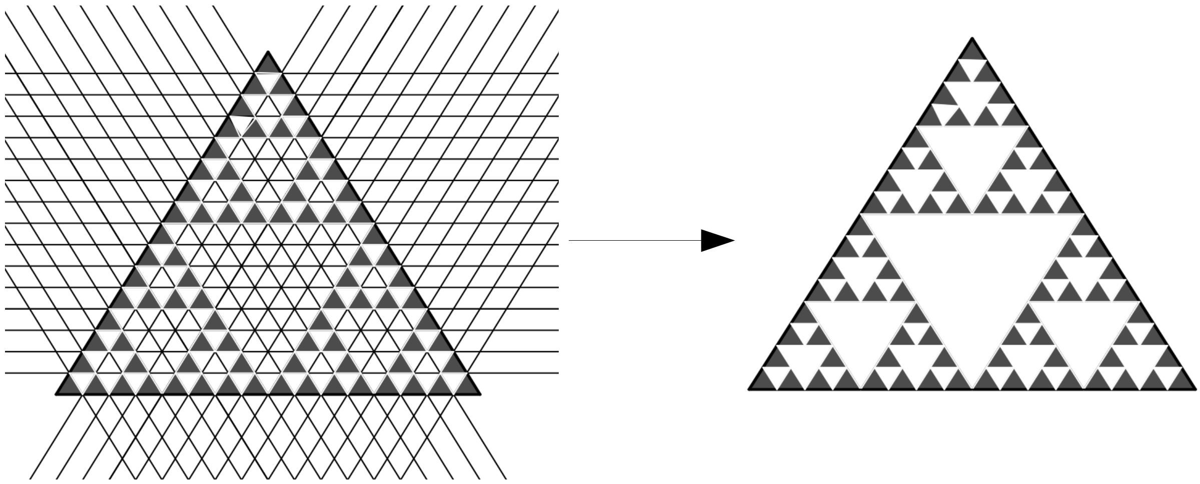


Ensuite on retire certains des triangles(3) pour former une des étapes du tamis de Sierpiński.



Triangle équilatéral formé de 5 parallèles

Tamis à l'étape 3

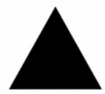


Avec 16 parallèles

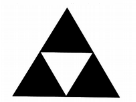
II – Calculs d'aires

1) Aire noire

Nous allons tout d'abord calculer l'aire noire ainsi que le nombre de triangles noirs ; on décide de choisir comme unité d'aire le triangle équilatéral de départ.
On note respectivement A_n et N_n l'aire noire et le nombre de triangles noirs à l'étape n, où n est un entier strictement positif.



Étape 1 : $A_1 = 1$ $\quad$ $N_1 = 1 = 3^0$



Étape 2 : $A_2 = \frac{3}{4} \times A_1 = \frac{3}{4}$ $\quad$ $N_2 = 3 = 3^1$

Étape 3 : $A_3 = \frac{3}{4} \times A_2 = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4} \; A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ $\quad$ $N_3 = 9 = 3^2$

Étape 4 : $A_4 = \frac{3}{4} \times A_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\quad$ $N_4 = 27 = 3^3$

A chaque étape, l'aire noire fait 3/4 de l'aire précédente. Nous pouvons donc généraliser :

Pour n > 1, si à une étape n – 1 on a : $A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ alors on aura à l'étape n :

$$A_n = \frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

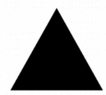
Chaque triangle noir de l'étape n – 1 est partagé en 4 et on en garde 3. Donc le nombre est à chaque étape multiplié par 3.
Pour n > 1, si à une étape n – 1 on a : $N_{n-1} = 3^{n-2}$ alors on aura à l'étape n :

$$N_n = 3\times 3^{n-2} = 3^{n-2+1} = 3^{n-1}\;.$$

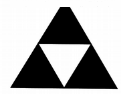
2) Aire blanche

On note respectivement B_n et M_n l'aire blanche et le nombre de triangles blancs à l'étape n, où n est un entier strictement positif.

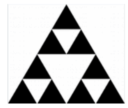
Étape 1 : $B_1 = 0$ $\qquad M_1 = 0$



Étape 2 : $B_2 = \frac{1}{4}$ $\qquad M_2 = 1$



Étape 3 : $B_3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4} + 3 \times (\frac{1}{4})^2$



Étape 4 : $B_4 = \frac{1}{4} + 3 \times (\frac{1}{4})^2 + 9 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{4} + 3 \times (\frac{1}{4})^2 + 3^2 \times (\frac{1}{4})^3$

A chaque étape, pour trouver l'aire blanche, on prend l'aire blanche de l'étape précédente et on ajoute 1/4 de l'aire blanche des plus petits triangles de l'étape précédente. Nous pouvons donc généraliser :

Pour n > 2, si à une étape n – 1 on a : $B_{n-1} = \frac{1}{4} + 3 \times (\frac{1}{4})^2 + ... + 3^{n-3} \times (\frac{1}{4})^{n-2}$ alors on aura à l'étape n :

$$B_n = \frac{1}{4} + 3 \times (\frac{1}{4})^2 + ... + 3^{n-2} \times (\frac{1}{4})^{n-1}$$

Une autre façon de calculer l'aire blanche si on a l'aire noire, est : $B_n = 1 - A_n = 1 - (\frac{3}{4})^{n-1}$, n>1

Pour M_n :

$M_1 = 0$

$M_2 = 1$

$M_3 = 4$ (ils ne sont pas de même taille) $= 1 + 3^1$

$M_4 = 13 = 1 + 3^1 + 3^2$

A chaque étape, on prend le nombre de triangles blancs précédents et on en ajoute 3 fois le nombre de triangles les plus petits à l'étape précédente.

Nous pouvons donc généraliser :

Pour n > 2, si à une étape n – 1 on a : $M_{n-1} = 1 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{n-3}$ alors on aura à l'étape n :

$$M_n = 1 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{n-3} + 3 \times 3^{n-3} = 1 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{n-3} + 3^{n-2}$$

Nous pouvons maintenant comparer les aires noires et blanches et voir à quelle étape l'aire blanche deviendra supérieure à l'aire noire. Nous avons rentré nos formules sur un tableur ; voici les résultats :

Etapes	Aire noire	Aire blanche
1	1	0
2	0,75	0,25
3	0,5625	0,4375
4	0,421875	0,578125

Étape 4

5	0,421875	0,68359375

L'aire noire se rapproche de plus en plus de 0 et l'aire blanche de 1 ; l'aire blanche devient supérieure à l'aire noire dès la quatrième étape.

III – Calculs de périmètres

On a choisi de calculer le périmètre du plus petit triangle formé à chaque étape.
Soit x, la longueur d'un côté du triangle équilatéral de départ. Soit P_n le périmètre à l'étape n.

Étape 1 : $P_1 = 3x$

En utilisant la propriété : « lorsqu'on joint les milieux de deux côtés d'un triangle, le segment formé mesure la moitié du troisième côté », on prouve que les triangles formés à une étape ont des côtés deux fois plus petits qu'à l'étape précédente ; ce qui nous donne :

Étape 2 : $P_2 = \frac{3}{2}x$ Étape 3 : $P_3 = \frac{3}{4}x$ Étape n – 1 (n>2) : $P_{n-1} = \frac{3}{2^{n-2}}x$

Étape n : $P_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2^{n-2}}x = \frac{3}{2^{n-1}}x$

IV – Approche du Tamis de Sierpinski

On nous a proposé une petite expérience :

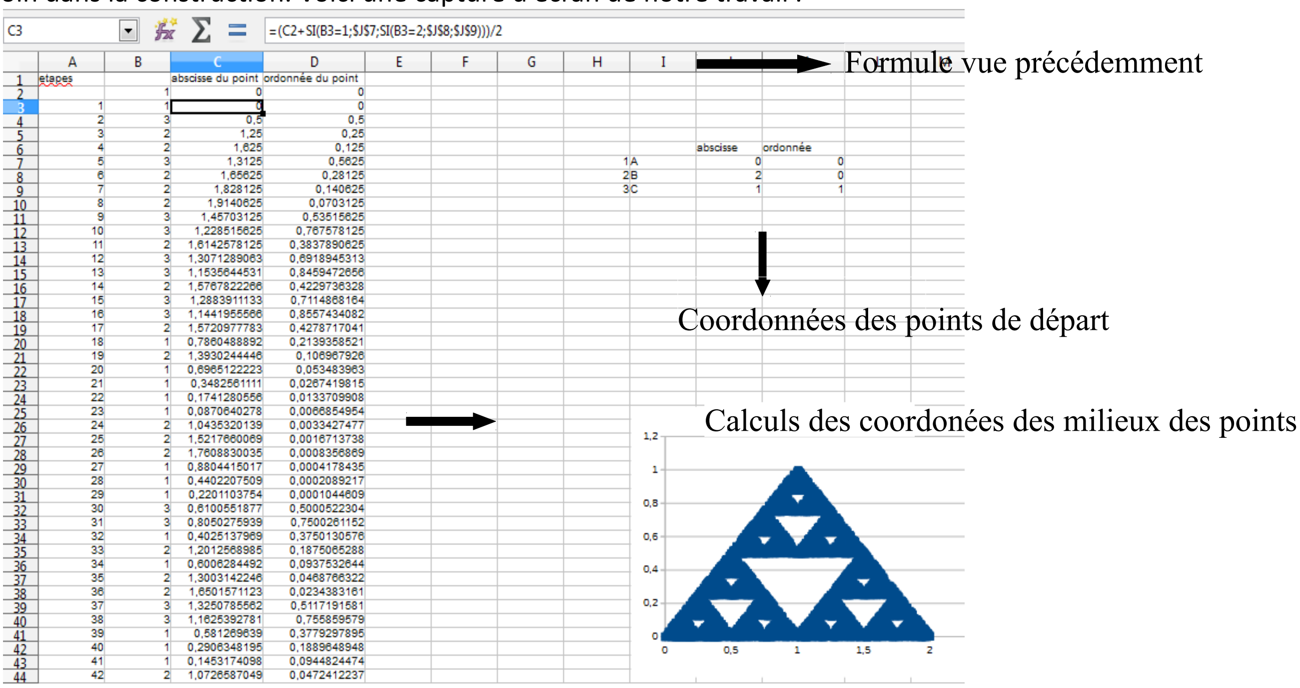
- Tracer un triangle ABC équilatéral et choisir au hasard un point entre A, B et C que l'on nommera point numéro 1.

- Choisir un point au hasard entre A, B, C que l'on nommera point numéro 2.

- Placer le milieu du segment formé par les points numéros 1 et 2.

- Prendre ce milieu comme nouveau point numéro 1 et recommencer les étapes précédentes à partir du second tiret.

En traçant de nombreux points, nous n'avons rien remarqué ; nous avons alors utilisé un tableur pour aller plus loin dans la construction. Voici une capture d'écran de notre travail :



	A	B	C	D
1	etapes		abscisse du point	ordonnée du point
2		1	0	0
3	1	1	0	0
4	2	3	0,5	0,5
5	3	2	1,25	0,25
6	4	2	1,625	0,125
7	5	3	1,3125	0,5625
8	6	2	1,65625	0,28125
9	7	2	1,828125	0,140625
10	8	2	1,9140625	0,0703125
11	9	3	1,45703125	0,53515625
12	10	3	1,228515625	0,767578125
13	11	2	1,6142578125	0,3837890625
14	12	3	1,3071289063	0,6918945313
15	13	3	1,1535644531	0,8459472656
16	14	2	1,5767822266	0,4229736328
17	15	3	1,2883911133	0,7114868164
18	16	3	1,1441955566	0,8557434082
19	17	2	1,5720977783	0,4278717041
20	18	1	0,7860488892	0,2139358521
21	19	2	1,3930244446	0,106967926
22	20	1	0,6965122223	0,053483963
23	21	1	0,3482561111	0,0267419815
24	22	1	0,1741280556	0,0133709908
25	23	1	0,0870640278	0,0066854954
26	24	2	1,0435320139	0,0033427477
27	25	2	1,5217660069	0,0016713738
28	26	2	1,7608830035	0,0008356869
29	27	1	0,8804415017	0,0004178435
30	28	1	0,4402207509	0,0002089217
31	29	1	0,2201103754	0,0001044609
32	30	3	0,6100551877	0,5000522304
33	31	3	0,8050275939	0,7500261152
34	32	1	0,4025137969	0,3750130576
35	33	2	1,2012568985	0,1875065288
36	34	1	0,6006284492	0,0937532644
37	35	2	1,3003142246	0,0468766322
38	36	2	1,6501571123	0,0234383161
39	37	3	1,3250785562	0,5117191581
40	38	3	1,1625392781	0,755859579
41	39	1	0,581269639	0,3779297895
42	40	1	0,2906348195	0,1889648948
43	41	1	0,1453174098	0,0944824474
44	42	2	1,0726587049	0,0472412237

	H	I	J	K
6			abscisse	ordonnée
7	1	A	0	0
8	2	B	2	0
9	3	C	1	1

Fenêtre graphique

Nous observons qu'en construisant plusieurs centaines de points, on voit apparaître une forme se rapprochant du Tamis(4).

Voici une autre approche : le « **Triangle de Pascal** ».
Pour le construire, il faut placer des 1 sur deux côtés d'un triangle équilatéral et chaque nombre à l'intérieur du triangle vaut la somme des deux nombres d'au-dessus.

<u>Exemple :</u>

```
      1
    1   1
  1   2   1
1   3   3   1
     etc.
```

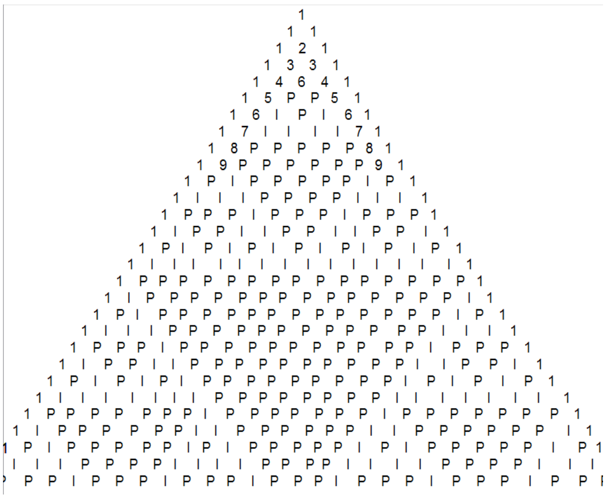
Voici trois propriétés que nous avons démontrées :
1 - La somme de deux nombres pairs est paire.
2 - La somme de deux nombres impairs est paire.
3 - La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire

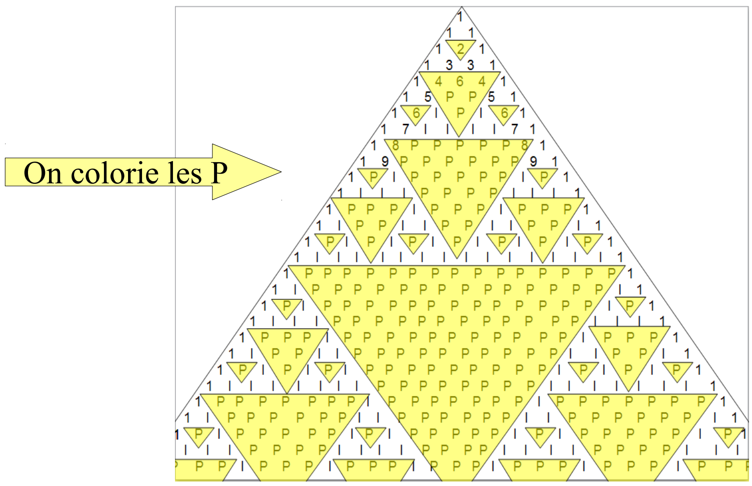
Démonstrations :
● Soient 2x et 2y, deux nombres pairs avec x et y entiers.
2x + 2y = 2 (x + y)   **x + y est un nombre entier donc 2 (x + y) est un multiple de 2 donc un résultat pair.**

● Soient 2x+1 et 2y+1, deux nombres impairs avec x et y entiers.
2x + 1 + 2y + 1 = 2 (x + y) + 2   **x + y est un nombre entier donc 2 (x + y) est un multiple de 2 donc un résultat pair, on rajoute 2 donc le résultat est encore pair.**

●Soient 2x un nombre pair et 2y+1 un nombre impair avec x et y entiers.
2x + 2y + 1 = 2 (x + y) + 1   **x + y est un nombre entier donc 2 (x + y) est un multiple de 2 donc le résultat est pair mais on rajoute 1 donc le résultat devient impair.**

Nous construisons ce triangle sur une plus grande échelle et nous allons repasser en couleur les nombres pairs. Dans l'illustration nous avons remplacé les nombres par P ou I suivant qu'ils étaient pairs ou impairs, en utilisant les trois propriétés ci-dessus.

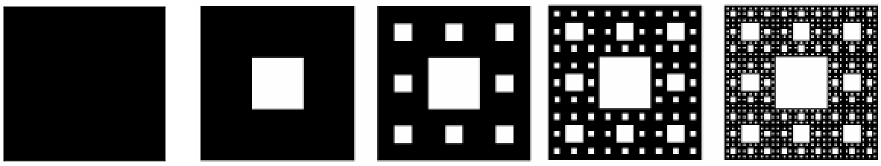




On voit encore apparaître une esquisse du Tamis de Sierpiński.

V – Extensions du sujet

Au lieu de partir d'un triangle équilatéral, on prend maintenant un carré comme figure de départ. On le partage en 9 carrés identiques et on enlève celui du milieu. On répète cette opération autant de fois que l'on veut dans chaque carré restant. On reprend nos calculs d'aires et de nombres de carrés.



1) Calcul de l'aire noire A_n et du nombre de carrés noirs N_n à l'étape n

On choisit comme unité d'aire le carré de départ.

<u>Étape 1</u> : $A_1 = 1$ $N_1 = 1$

<u>Étape 2</u> : $A_2 = \frac{8}{9} A_1 = \frac{8}{9}$ $N_2 = 8$

<u>Étape 3</u> : $A_3 = \frac{8}{9} A_2 = \frac{8}{9}\times\frac{8}{9} A_1 = \left(\frac{8}{9}\right)^2$ $N_3 = 64$

<u>Étape 4</u> : $A_4 = \frac{8}{9} A_3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3$

A chaque étape, l'aire noire fait 8/9 de l'aire précédente. Nous pouvons donc généraliser :

Pour n > 1, si à une étape n – 1 on a : $A_{n-1} = \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2}$ alors on aura à l'étape n :

$A_n = \frac{8}{9}\times\left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} = \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2+1} = \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$

Chaque carré noir de l'étape n – 1 est partagé en 9 et on en garde 8. Donc le nombre de carrés noirs est à chaque étape multiplié par 8.

Pour n > 1, si à une étape n – 1 on a : $N_{n-1} = 8^{n-2}$ alors on aura à l'étape n :

$N_n = 8\times 8^{n-2} = 8^{n-2+1} = 8^{n-1}$.

2) Calcul de l'aire blanche B_n et du nombre de carrés noirs M_n à l'étape n

<u>Étape 1</u> : $B_1 = 0$ $M_1 = 0$

<u>Étape 2</u> : $B_2 = \frac{1}{9}$ $M_2 = 1$

<u>Étape 3</u> : $B_3 = \frac{1}{9} + \frac{8}{81} = \frac{1}{9} + 8\times\left(\frac{1}{9}\right)^2$ $M_3 = 1 + 8 = 9$

<u>Étape 4</u> : $B_4 = \frac{1}{9} + 8\times\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 8^2\times\left(\frac{1}{9}\right)^3$ $M_4 = 1 + 8 + 64 = 73$

A chaque étape, pour trouver l'aire blanche, on prend l'aire blanche de l'étape précédente et on ajoute 8 fois 1/9 de l'aire blanche des plus petits carrés de l'étape précédente. Nous pouvons donc généraliser :

Pour n > 2, si à une étape n – 1 on a : $B_{n-1} = \frac{1}{9} + 8\times(\frac{1}{9})^2 + \ldots + 8^{n-3}\times(\frac{1}{9})^{n-2}$ alors on aura à l'étape n :

$$B_n = \frac{1}{9} + 8\times(\frac{1}{9})^2 + \ldots + 8\times 8^{n-3}\times\frac{1}{9}\times(\frac{1}{9})^{n-2} = \frac{1}{9} + 8\times(\frac{1}{9})^2 + \ldots + 8^{n-2}\times(\frac{1}{9})^{n-1}$$

Une autre façon de calculer l'aire blanche si on a l'aire noire, est : $B_n = 1 - A_n = 1-(\frac{8}{9})^{n-1}$, n > 1.

Pour M_n, à chaque étape, on prend le nombre de carrés blancs précédents et on en ajoute 8 fois le nombre de carrés les plus petits à l'étape précédente.

Nous pouvons donc généraliser :

Pour n > 2, si à une étape n – 1 on a : $M_{n-1} = 1 + 8^1 + 8^2 + \ldots + 8^{n-3}$ alors on aura à l'étape n :

$$M_n = 1 + 8^1 + 8^2 + \ldots + 8^{n-3} + 8\times 8^{n-3} = 1 + 8^1 + 8^2 + \ldots + 8^{n-3} + 8^{n-2}$$

Nous pouvons maintenant comparer les aires noires et blanches et voir à quelle étape l'aire blanche deviendra supérieure à l'aire noire. Avec l'aide d'un tableur ; voici les résultats :

Etapes	Aire noire	Aire blanche
1	1,00000000	0
2	0,88888889	0,11111111
3	0,79012346	0,20987654
4	0,70233196	0,29766804
5	0,62429508	0,37570492
6	0,55492896	0,44507104
7	0,49327018	0,50672982
8	0.43846239	0,56153761

L'aire noire se rapproche de plus en plus de 0 et l'aire blanche de 1 ; l'aire blanche devient supérieure à l'aire noire dès la septième étape(5).

Notes d'édition

(1) Il s'agit de construire des parallèles aux côtés du triangle de départ (et donc aux côtés de tous les triangles construits ensuite)

(2) Pour construire n droites parallèles à l'un des côtés du triangle, on découpe les deux autres côtés en n-1 parties égales et on joint deux à deux les points obtenus.

(3) Quels sont ces « certains triangles » ?

(4) Les points numéros 1 successifs sont dans les triangles noirs du tamis. Et donc on voit, après un certain nombre d'itérations, se dessiner le tamis par ce procédé.

(5) Il faut remarquer que l'aire noire décroît et l'aire blanche croît ; donc dès que l'aire blanche devient supérieure à l'aire noire, elle le rest