LES TABLES DE POSEIDON

Année 2015 – 2016

Maïa BINET, Cléo GUYOT, Raphaël HAIM, Yasmine MAAFA et Anouk POIGNANT, élèves de 4ème et 3éme.

Encadrés par Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.

Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

Chercheuse : Céline Abraham, Orsay.

Présentation du sujet :

Une table de Poséidon est construite ainsi :

- Les trois lignes contiennent chacune un nombre de trois chiffres.
- Le nombre de la deuxième ligne est le double de celui de la première ligne.
- Le nombre de la troisième ligne est le triple de celui de la première ligne.

Par exemple : 1 2 3 est une table de Poséidon.
2 4 6
3 6 9

Question : Existe-t-il des tables de Poséidon dans lesquelles chaque chiffre n'est utilisé qu'une seule fois ?

Début de l'article

Nos résultats : Nous avons démontré en faisant une étude des différents cas qu'il n'y avait que six tables répondant à notre sujet. Nous avons ensuite étendu le sujet :

- en rajoutant un chiffre au nombre de la troisième ligne.(1)
- en changeant les facteurs pour passer de la première aux autres lignes.

Dans ces deux cas nous n'avons pas trouvé de table répondant à la question.

–

I – Premières explorations

Nous avons commencé par tester tous les nombres un par un. Il s'est avéré que cette méthode n'était pas fiable, nous avions trouvé des réponses mais incomplètes par rapport aux résultats trouvés ensuite par méthode. De plus, étudier les cas un par un s'est révélé très long.
Nous avons alors cherché une méthode plus automatique.

II – Méthode de recherche et réponse au sujet

Commençons par nommer les chiffres par des lettres et plaçons-les dans un tableau :

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

Premières remarques qui vont nous éliminer des cas :

- Si a_3 vaut 0 ou 5, b_3 vaut 0 : il y a donc répétition du 0. **Donc a_3 ne vaut ni 0 ni 5.**
- Si a_1 est supérieur à 3, le deuxième nombre(2) aurait 4 chiffres, ce qui n'est pas possible. **Donc a_1 vaut 0, 1, 2 ou 3.**

Nous commençons l'étude des cas en intégrant ces remarques.

1) Cas $a_3 = 1$

Ceci implique que $b_3 = 2$ et $c_3 = 3$. Notre table devient :

a_1	a_2	1
b_1	b_2	2
c_1	c_2	3

Cherchons, avec les chiffres restants, les valeurs possibles pour a_2 qui vont nous donner celles de b_2 et de c_2 correspondantes.

a_2 :	0	4	5	6	7	8	9
b_2 :	**0**	8	0	**2**	4	6	8
c_2 :		**2**	**5**		**1**	4	7

Nous mettrons en gras dès qu'un chiffre est répété.
Nous poursuivrons la recherche avec les colonnes sans répétition.

Deux cas semblent possibles : $a_2 = 8$ et $a_2 = 9$; nous étudions ces deux cas ci-dessous.

a_1	8	1
b_1	6	2
c_1	4	3

Dans ce cas on a obligatoirement : $a_1 = 0$ et donc $b_1 = 1$, mais 1 est déjà utilisé.(3)

a_1	9	1
b_1	8	2
c_1	7	3

Ici aussi on a : $a_1 = 0$ et donc $b_1 = 1$

2) Cas $a_3 = 2$

Ceci implique que $b_3 = 4$ et $c_3 = 6$. Notre table devient :

a_1	a_2	2
b_1	b_2	4
c_1	c_2	6

Valeurs possibles pour a_2 et celles de b_2 et de c_2 correspondantes :

a_2 :	0	1	3	5	7	8	9
b_2 :	**0**	**2**	**6**	0	**4**	**6**	8
c_2 :				**5**			7

Un cas à étudier :

<table>
<tr><td>

a_1	9	2
b_1	8	4
c_1	7	6

</td><td>

Valeurs possibles pour a_1 et celles de b_1 et de c_1 correspondantes :
a_1 : 0 ; 1 ; 3
b_1 : 1 ; 3 ; **7**
c_1 : **2** ; 5

</td></tr>
</table>

Voici donc une solution à notre problème :

1	9	2
3	8	4
5	7	6

3) Cas $a_3 = 3$

Ceci implique que $b_3 = 6$ et $c_3 = 9$. Notre table devient :

a_1	a_2	3
b_1	b_2	6
c_1	c_2	9

Valeurs possibles pour a_2 et celles de b_2 et de c_2 correspondantes.

a_2 : 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8

b_2 : **0** ; 2 ; 4 ; 8 ; 0 ; 4 ; **6**

c_2 : **3 ; 6** ; 2 ; **5** ; 1

Deux cas semblent possibles : $a_2 = 4$ et $a_2 = 7$.

<table>
<tr><td>

a_1	4	3
b_1	8	6
c_1	2	9

a_1 : 0 ; 1
b_1 : **0 ; 2**

</td><td>

a_1	7	3
b_1	4	6
c_1	1	9

a_1 : 0 ; 2
b_1 : **1** ; 5
c_1 : 8

</td></tr>
</table>

Voici une deuxième solution à notre problème :

2	7	3
5	4	6
8	1	9

4) Cas $a_3 = 4$

Ceci implique que $b_3 = 8$ et $c_3 = 2$. Notre table devient :

a_1	a_2	4
b_1	b_2	8
c_1	c_2	2

Valeurs possibles pour a_2 et celles de b_2 et de c_2 correspondantes :

a_2 : 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9

b_2 : **0** ; **2** ; **6** ; 0 ; **2 ; 4 ; 8**

c_2 : 6

Un cas à étudier :

a_1	5	4
b_1	0	8
c_1	6	2

Valeurs possibles pour a_1 et celles de b_1 et de c_1 correspondantes :

a_1 : 1 ; 3

b_1 : 3 ; 7

c_1 : **4 ; Trop grand**

5) Cas $a_3 = 6$

Ceci implique que $b_3 = 2$ et $c_3 = 8$. Notre table devient :

a_1	a_2	6
b_1	b_2	2
c_1	c_2	8

Valeurs possibles pour a_2 et celles de b_2 et de c_2 correspondantes.

a_2 : 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 9

b_2 : 1 ; 3 ; **7** ; 9 ; 1 ; 5 ; **9**

c_2 : **1** ; 4 ; 0 ; 3 ; **6** ; **2**

Trois cas sont à étudier : a_2 = 1, 3 et 4.

a_1	1	6
b_1	3	2
c_1	4	8

a_1 : 0

b_1 : **0**

a_1	3	6
b_1	7	2
c_1	0	8

a_1 : 1

b_1 : **2**

a_1	4	6
b_1	9	2
c_1	3	8

a_1 : 0

b_1 : **0** (4)

Il n'y a pas de solution avec $a_3 = 6$.

6) Cas $a_3 = 7$

Ceci implique que $b_3 = 4$ et $c_3 = 1$. Notre table devient :

a_1	a_2	7
b_1	b_2	4
c_1	c_2	1

Valeurs possibles pour a_2 et celles de b_2 et de c_2 correspondantes.

a_2 : 0 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9

b_2 : **1** ; 5 ; **7** ; **1** ; 3 ; **7** ; **9**

c_2 : 8 ; 0

Deux cas à étudier : $a_2 = 2$ et $a_2 = 6$.

a_1	2	7
b_1	5	4
c_1	8	1

a_1 : 0 ; 3

b_1 : **0** ; 6

c_1 : 9

a_1	6	7
b_1	3	4
c_1	0	1

a_1 : 2

b_1 : 5

c_1 : 8

Voici encore deux solutions à notre problème :

3	2	7
6	5	4
9	8	1

2	6	7
5	3	4
8	0	1

7) Cas $a_3 = 8$
Ceci implique que $b_3 = 6$ et $c_3 = 4$. Notre table devient :

a_1	a_2	8
b_1	b_2	6
c_1	c_2	4

Valeurs possibles pour a_2 et celles de b_2 et de c_2 correspondantes.

a_2 : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9

b_2 : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 1 ; 5 ; **9**

c_2 : 2 ; 5 ; **8** ; 1 ; 7 ; 3

Cinq cas à étudier : a_2 = 0,1,3,5 et 7.

a_1	0	8
b_1	1	6
c_1	2	4

a_1 : 3
b_1 : **6**

a_1	1	8
b_1	3	6
c_1	5	4

a_1 : 0 ; 2
b_1 : **0 ; 4**

a_1	3	8
b_1	7	6
c_1	1	4

a_1 : 0 ; 2
b_1 : **0 ; 4**

a_1	5	8
b_1	1	6
c_1	7	4

a_1 : 3
b_1 : **7**
(5)

a_1	7	8
b_1	5	6
c_1	3	4

a_1 : 0 ; 1 ; 2
b_1 : 1 ; **3** ; **5**
c_1 : 2

Voici encore une solution à notre problème :

0	7	8
1	5	6
2	3	4

8) Cas $a_3 = 9$
Ceci implique que $b_3 = 8$ et $c_3 = 7$. Notre table devient :

a_1	a_2	9
b_1	b_2	8
c_1	c_2	7

Valeurs possibles pour a_2 et celles de b_2 et de c_2 correspondantes.

a_2 : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

b_2 : 1 ; 3 ; 5 ; **7** ; **9** ; 1 ; 3

c_2 : 2 ; 5 ; **8**   **7** ; 0

Trois cas sont à étudier : a_2 = 0, 1 et 6.

<table>
<tr>
<td>

a_1	0	9
b_1	1	8
c_1	2	7

a_1 : 3 b_1 : 6 c_1 : **9**
</td>
<td>

a_1	1	9
b_1	3	8
c_1	5	7

a_1 : 0 ; 2
b_1 : **0** ; 4
c_1 : 6
</td>
<td>

a_1	6	9
b_1	3	8
c_1	0	7

a_1 : 1 ; 2
b_1 : **3** ; 5
c_1 : **8**
</td>
</tr>
</table>

Une solution :

2	1	9
4	3	8
6	5	7

Conclusion : nous avons trouvé 6 tables de Poséidon répondant au sujet et nous sommes sûrs, avec notre raisonnement qu'il n'y en a pas d'autres. Voici les 6 tables :

1	9	2
3	8	4
5	7	6

2	7	3
5	4	6
8	1	9

3	2	7
6	5	4
9	8	1

2	6	7
5	3	4
8	0	1

0	7	8
1	5	6
2	3	4

2	1	9
4	3	8
6	5	7

III – Extensions

1 - Avec dix chiffres

On a cherché à utiliser tous les chiffres, c'est à dire des tables de Poséidon possédant dix chiffres. Il y a donc une ligne avec quatre chiffres et c'est obligatoirement la dernière car c'est celle qui contient le plus grand nombre. On note c le chiffre des milliers du troisième nombre.(6)

	a_1	a_2	a_3
	b_1	b_2	b_3
c	c_1	c_2	c_3

- Si c = 0 : on retrouve les tables trouvées au II ne contenant que 9 chiffres, excepté le 0 (il y en a 4).
- Si c = 1 : $a_1 > 2$; en effet, sinon, le plus grand nombre est 298 et le triple de 298 est 894, on aurait c = 0.
  $a_1 < 5$; en effet, sinon, le nombre de la deuxième ligne serait supérieur à 1000 alors qu'il ne doit avoir que 3 chiffres.
  Donc $a_1 = 3$ ou $a_1 = 4$. Nous étudions ces deux cas.

	3	a_2	a_3
	b_1	b_2	b_3
1	c_1	c_2	c_3

a_3 : 2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

b_3 : 4 ; 8 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8

c_3 : 6 ; 2 ; 8 ; **1 ;** 4 ; 7

$a_2/b_2/c_2$
0 **0**
5 0 **5**
7 **4**
8 **6**
9 8 7

$a_1/b_1/c_1$
3 **7**

$a_2/b_2/c_2$
0 **0**
5 0 6
6 **2**
7 **4**
9 **8**

$a_1/b_1/c_1$
3 7 **0**

$a_2/b_2/c_2$
0 **1**
4 9 **3**
5 **1**
7 5 **2**
9 **9**

$a_2/b_2/c_2$
0 1 2
2 5 **8**
5 **1**
7 5 **3**
9 **9**

$a_1/b_1/c_1$
3 **6**

$a_2/b_2/c_2$
0 **1**
2 5 **8**
4 **9**
5 **1**
6 **3**

	4	a_2	a_3
	b_1	b_2	b_3
1	c_1	c_2	c_3

a_3 : 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

b_3 : **4 ;** 6 ; 2 ; **4 ;** 6 ; 8

c_3 : 9 ; 8 **4 ;** 7

$a_2/b_2/c_2$
0 **0**
2 **4**
4 **8**
5 0 **5**
7 **4**
8 **6**

$a_2/b_2/c_2$
0 **1**
3 7 0
5 **1**
7 5 **2**
9 **9**

$a_1/b_1/c_1$
4 **8**

$a_2/b_2/c_2$
0 **1**
2 5 **8**
4 **9**
5 **1**
6 3 0

$a_1/b_1/c_1$
4 **9**

Il n'y a aucun résultat.

- Si c = 2 : $a_1 > 4$; en effet, sinon, le plus grand nombre est 498, son triple est 1494 et c ne pourra pas valoir 2.
  $a_1 < 5$: pour les mêmes raisons que dans c = 1.
  Donc c ne pourra pas être égal à 2.

Il n'y a donc pas de tables de Poséidon répondant au sujet composé de dix chiffres, différentes de celles du II.

2 - En multipliant par deux et par quatre

On a cherché des tables de Poséidon répondant au sujet mais cette fois en prenant 2 et 4 comme coefficients.

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

x2

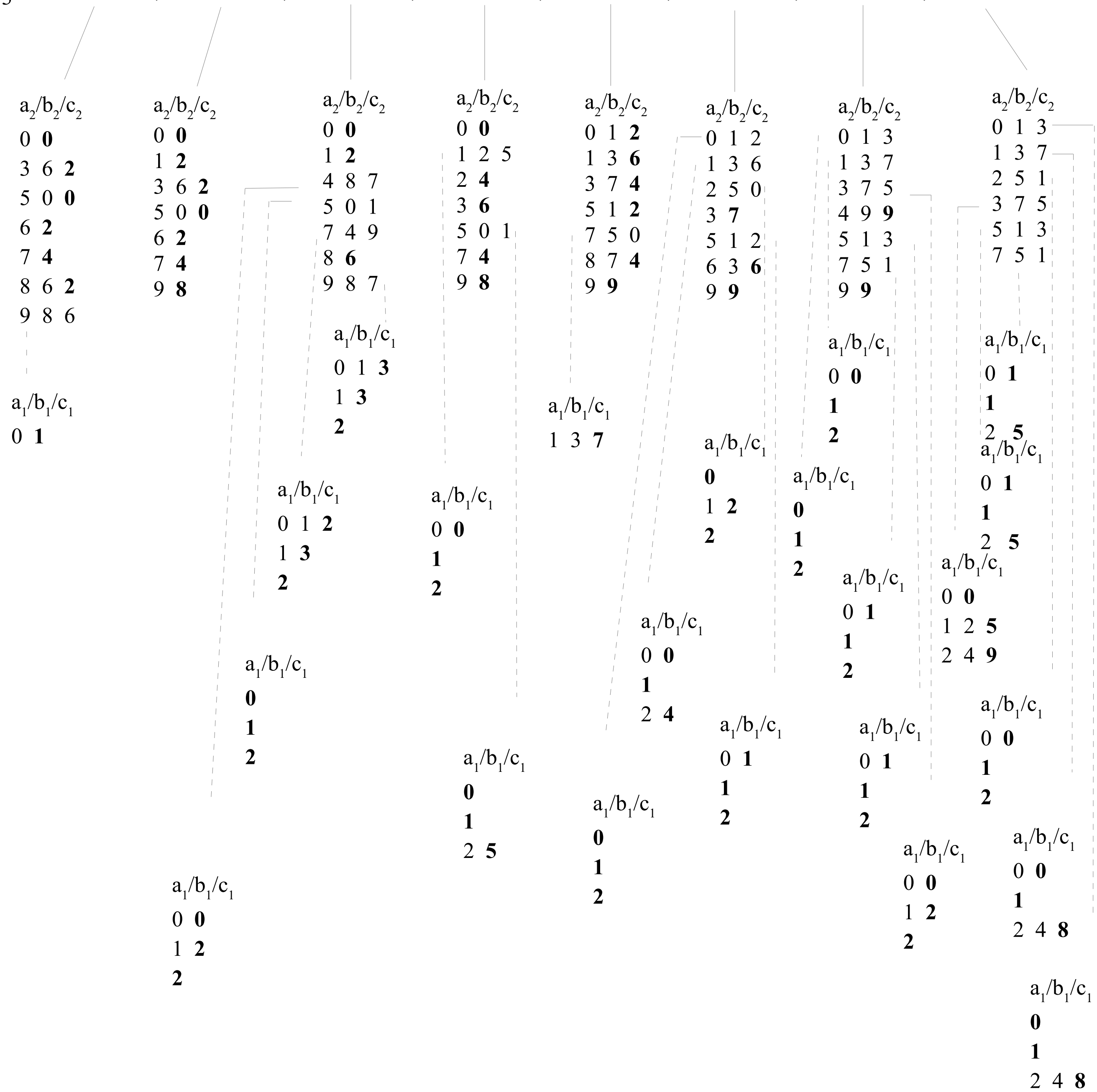
x4

Premières remarques qui vont nous éliminer des cas :

- Si a_3 vaut 0, b_3 vaut 0 et si a_3 vaut 5, b_3 vaut 0 et c_3 vaut 0 : il y a donc répétition du 0. **Donc a_3 ne vaut ni 0 ni 5.**
- Si a_1 est supérieur à 2, le plus petit nombre est 301 et le troisième nombre contient donc 4 chiffres. **Donc a_1 vaut 0, 1 ou 2.**

Nous avons repris nos recherches avec la même technique d'étude de tous les cas :

a_3 :	1 ;	2 ;	3 ;	4 ;	6 ;	7 ;	8 ;	9
b_3 :	2 ;	4 ;	6 ;	8 ;	2 ;	4 ;	6 ;	8
c_3 :	4 ;	8 ;	2 ;	6 ;	4 ;	8 ;	2 ;	6



Chaque chemin mène à une répétition de chiffres ; donc aucune table de Poséidon avec les coefficients 2 et 4 ne répond au sujet.

Notes d'éditions

(1) Autrement dit, en acceptant le fait que le triple du premier nombre soit supérieur ou égal à 1000 (mais inférieur à 10000).

(2) Le nombre de la troisième ligne.

(3) Dans ces deux cas, on a b_1=1 avec la retenue.

(4) Il faut *a priori* étudier le cas a_1=1… même s'il ne conduit pas à une solution.

(5) Il manque les cas a_1=0 et a_1=2

(6) Les cas a_3=0 et a_3=5 sont encore à exclure mais on peut préciser que la remarque initiale sur a_1 n'est plus d'actualité.