Maths en Jeans 2008

« Tableau Électrique »

Lycée du Parc des Loges

NGUYEN Isabelle, LAINE Marine,
COQUELLE Marion, CHHUN AUDAM
et LY Yusha .

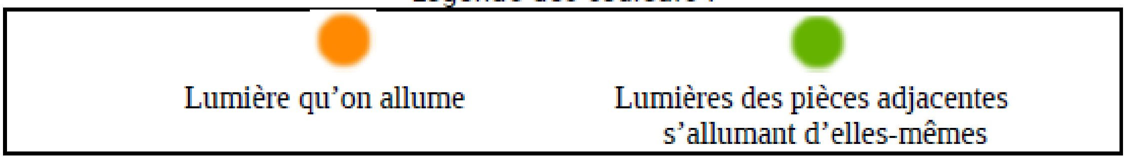
Table des matières (p.1):

Présentation du sujet :

Un électricien inexpérimenté se charge de l'installation électrique d'une maison et commets des erreurs qui entraînent un allumage hétéroclite des pièces : lorsque l'on allume la lumière dans une pièce, on change l'état de l'éclairage dans toutes les pièces voisines à celle-ci (d'éteint à allumé et d'allumé à éteint). Les pièces en diagonale ne sont pas considérés comme adjacentes et ne sont donc pas concernés par le problème cité ci-dessus.
Un problème se pose alors : Comment allumer toutes les pièces de la maison ? Sachant que les pièces sont au départ toutes éteintes et que l'on essaye de les allumer en une seule combinaison. (1)

N.B : Pour tous les exemples illustrés présents dans ce compte-rendu, on prendra les cercles orange pour les lumières qu'on allume, les cercles verts pour les lumières des pièces adjacentes s'allumant d'elles-mêmes et les numéros associés à chaque pièce l'ordre dans laquelle elle à été allumée.

Légende des couleurs :

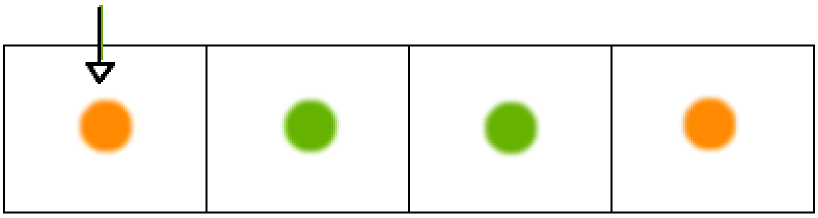


I. Les maisons à pièces alignées.

1) Les maisons à pièces alignées sur une ligne.

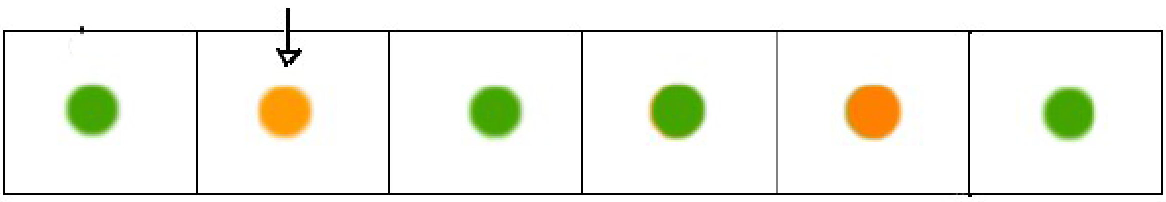
Toutes les pièces peuvent être allumées en une combinaison dans les maisons à pièces alignées et à une ligne. Il faut tout de même respecter un procédé particulier afin d'y parvenir.

■ Lorsqu'il y a un nombre de pièces indivisible par trois, il faut commencer par allumer la première pièce pour ensuite allumer toutes les trois pièces afin d'obtenir une illumination complète de la maison.



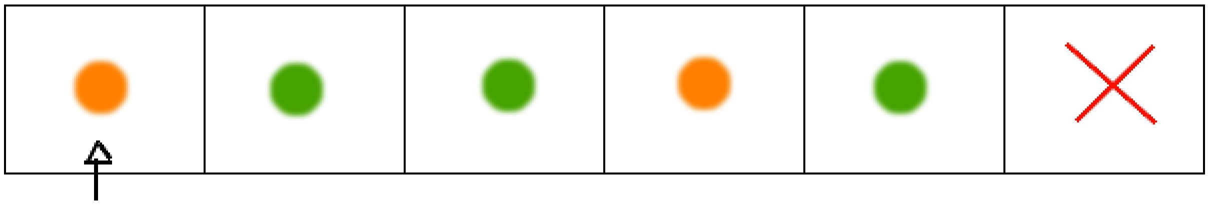
4 pièces

■ En revanche, pour les maisons à nombre de pièces divisibles par trois, il faut commencer par allumer la seconde pièce et ensuite allumer toutes les trois pièces comme énoncé précédemment :



6 pièces

Si on allume la première pièce, cela ne peut guère fonctionner :



6 pièces

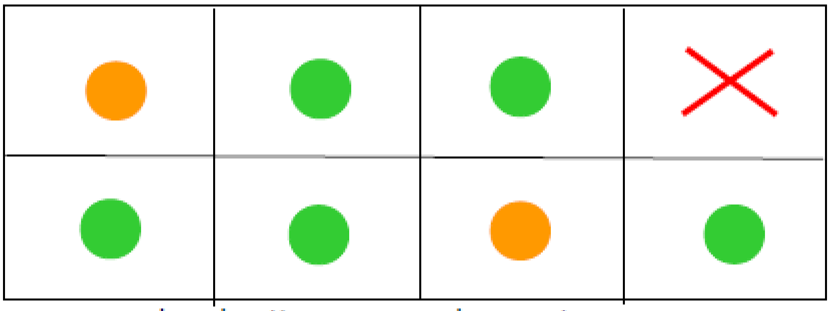
2) Les maisons à pièces alignées sur deux lignes.

Tout d'abord, nous avons réparti les maisons à pièces alignées sur deux lignes en deux catégories différentes :

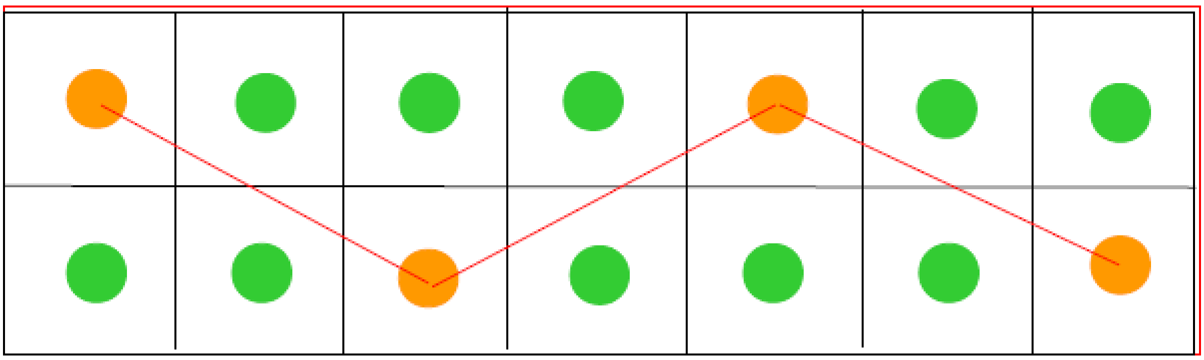
- les maisons ayant un nombre de pièces sur une base paire
  soit 4 ÷ 2 = **2** ou encore 8 ÷ 2 = **4**
- les maisons ayant un nombre de pièces sur une base impaire
  soit 6 ÷ 2 = **3** ou encore 10 ÷ 2 = **5**

Ainsi, nous avons deux résultats différents possibles :

- les maisons ayant un nombre de pièces sur une base paire ne peuvent être totalement éclairées. (2)
- les maisons ayant un nombre de pièces sur une base impaire peuvent être totalement illuminées. Toutes les pièces sont allumées si :
  - On commence par allumer la première pièce (1ère ou 2ème ligne au choix). (3)
  - Ensuite, on allume les pièces diagonalement de trois pièces.



Nombre de pièces sur une base paire 8 ÷ 2 = **4**

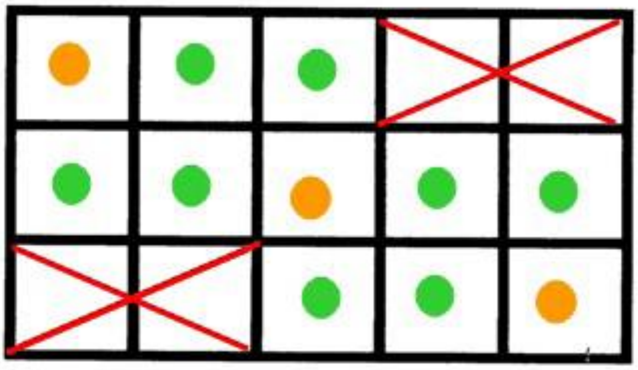


Nombre de pièces sur une base impaire 14 ÷ 2 = **7**

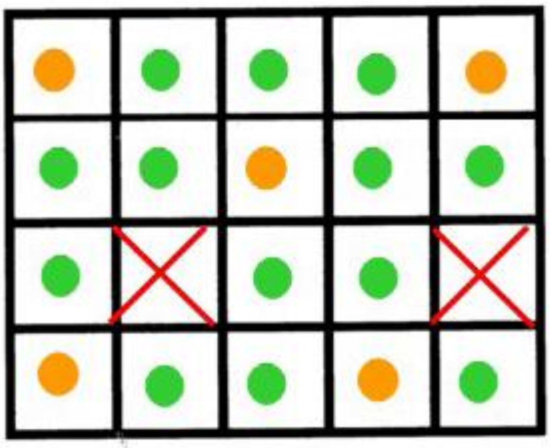
On remarque qu'une figure en « zig-zag » se répète perpétuellement.

1. Les maisons au nombre de lignes supérieures à 2.

Les maisons à pièces alignées sur un nombre de lignes supérieur à deux, ne peuvent en aucun cas avoir toutes leurs pièces allumées en une seule combinaison. (4)



3 lignes

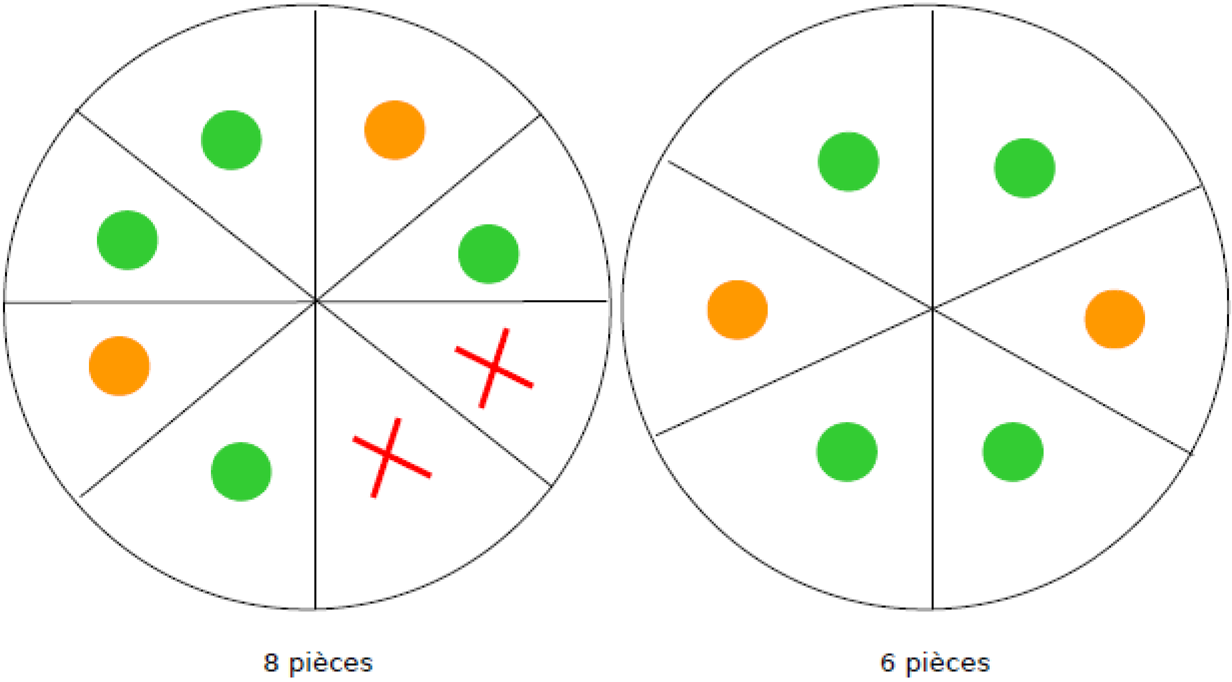


4 lignes

II. Les maisons rondes.

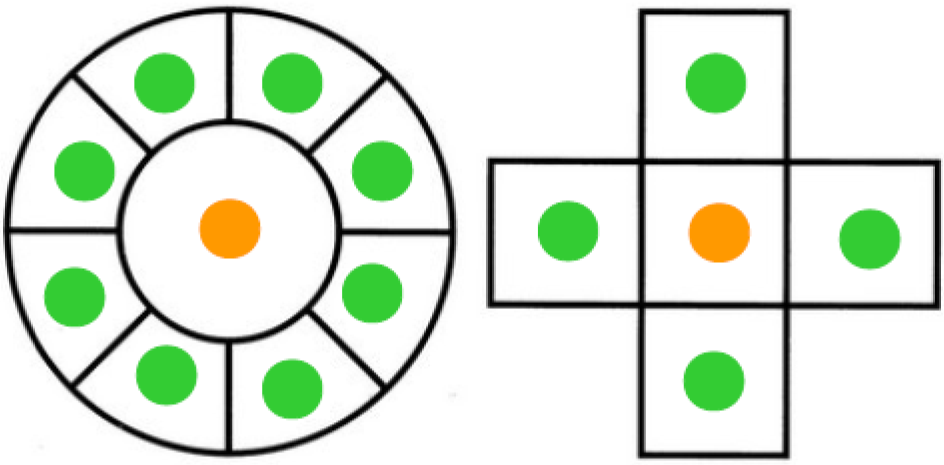
1) Les maisons rondes sans pièce centrale.

Toute la maison peut être illuminée si le nombre de pièces est divisible par trois et si on les allume toutes les trois pièces. (5)



2) Les maisons rondes avec pièce centrale.

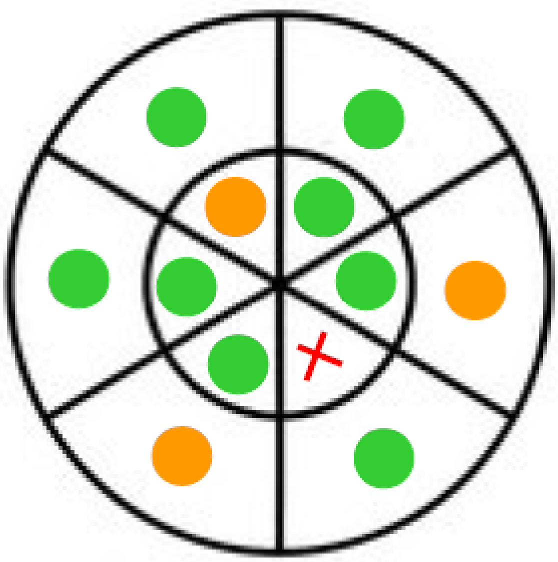
La pièce centrale étant mitoyenne aux autres pièces, il suffit d'allumer la lumière de celle-ci afin d'éclairer toutes les autres.

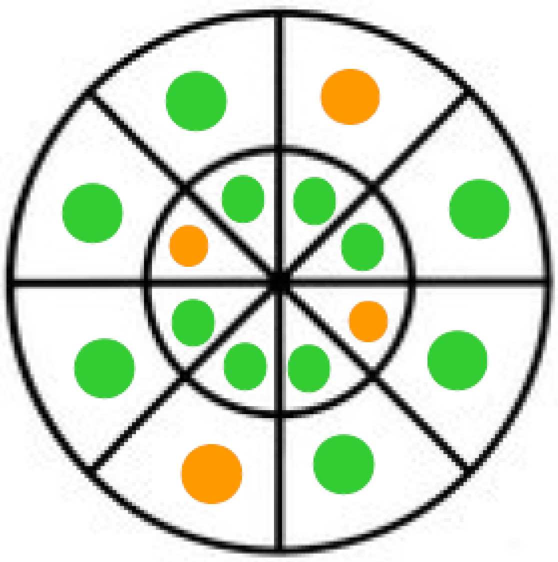


N.B. : Cette règle peut s'appliquer à toute maison ayant une pièce centrale, peu importe sa forme globale, à la condition qu'il n'y ait qu'une seule pièce adjacente pour chaque mur de cette pièce centrale. (6)

3) Les maisons rondes à cercles concentriques.

Toute la maison peut être illuminée si le nombre de pièces qui compose chaque anneau est divisible par quatre et si on les allume toutes les trois pièces. (7)





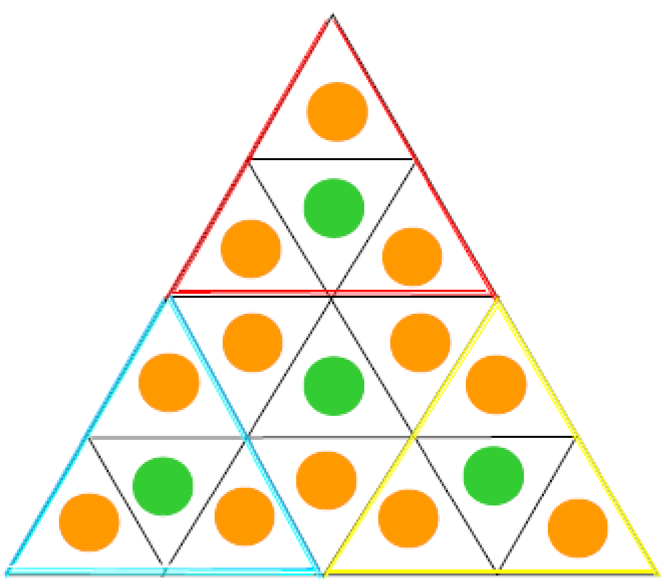
Anneaux de 6 pièces
(12 pièces au total)

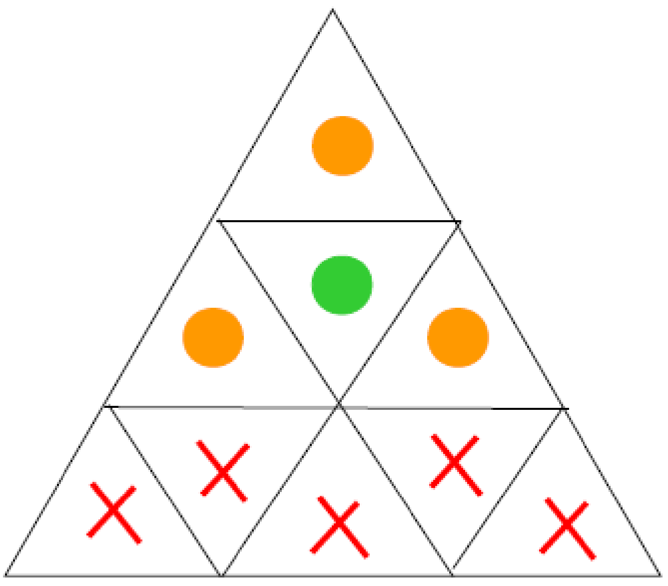
Anneaux de 8 pièces
(16 pièces au total)

III. Les maisons à pièces triangulaires.

Les maisons considérées ici sont des maisons de forme triangulaire et ayant des pièces triangulaires aussi. On remarque que toutes les pièces sont allumées s'il y a un nombre pair de lignes de pièces. Afin de réussir à toutes les allumer, on applique la règle trouvée pour les maisons à pièces alignées sur deux lignes ayant un nombre de pièces sur une base impaire.

- On commence par allumer la première pièce (1ère ou 2ème ligne au choix).
- Ensuite, on allume les pièces diagonalement de trois pièces.



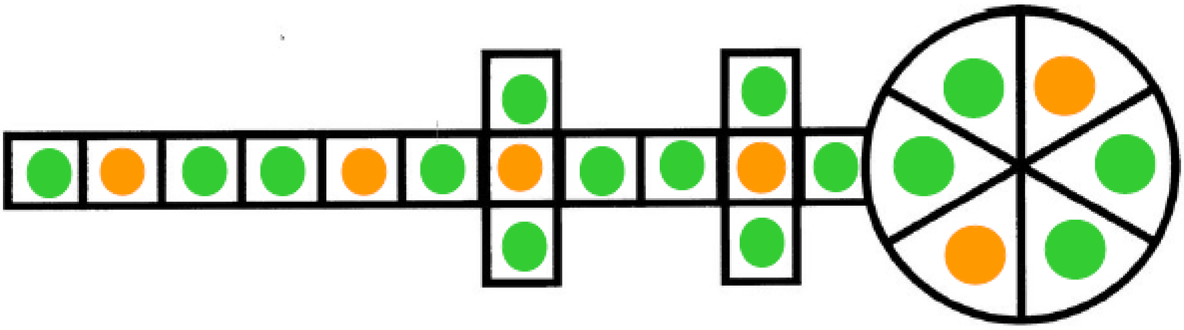


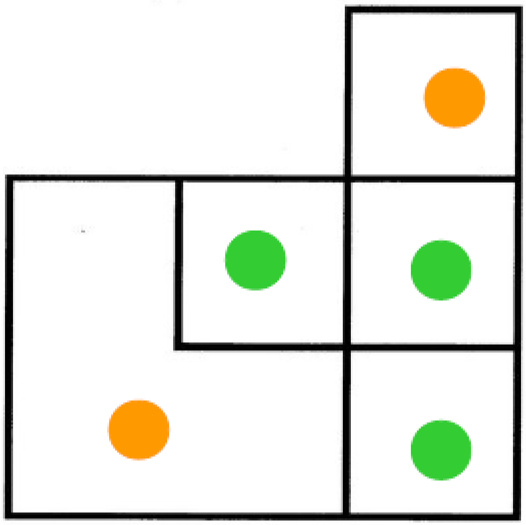
On remarque qu'on peut partager le triangle équilatéral en plusieurs petits triangles équilatéraux. (8)

IV. Approche ludique du problème.

1) Les maisons formées par l'assemblage de maisons types.

On a rassemblé plusieurs types de maisons afin de construire une grande maison. Pour allumer toutes les pièces, il suffit d'appliquer intelligemment toutes les règles citées ci-dessus.





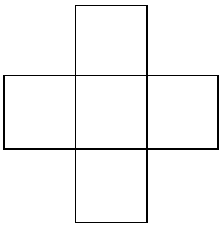
Résolution du problème par manipulation physique.

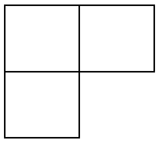
Pour aller plus loin dans la résolution du problème qui inclut de nombreux essais longs et qui se complexifient au fur et à mesure que l'on ajoute des pièces aux maisons, nous avons décidé de créer ces pièces physiquement (en carton) afin de manipuler plus facilement les combinaisons nous menant à l'éclairage complet d'une maison. Les cartons ont une face noire pour montrer que la pièce est éteinte et une face blanche pour montrer que la pièce est allumée. L'expérimentation de la résolution du problème proposé quel que soit le type de maisons s'offre alors au plus grand nombre...

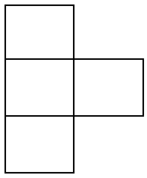
Notes de l'édition

1. Quel sens donner à cette précision ? Chaque pièce ne pourrait-elle changer qu'une seule fois d'état ? Cette contrainte aurait été alors oubliée dans le III. lors de l'étude des maisons triangulaires.
2. Pourquoi est-ce impossible ? Une multitude d'exemples aurait-elle suffit à s'en convaincre ?
3. Existe-t-il d'autres méthodes que celle présentée ?
4. Là encore intervient l'ambigüité des termes « unique combinaison ». Peut-être aurions-nous pu définir les groupes de pièces élémentaires dépendants de la forme des pièces choisie puis paver avec celles-ci des rectangles aux caractéristiques variées :

Pour des pièces carrées :







5. Pourquoi le fait que le nombre de pièces soit divisible par trois caractérise les maisons que l'on peut entièrement allumer ? L'étude rapide des pièces élémentaires (unique dans ce cas) permet de comprendre rapidement d'où vient ce critère.
6. On pourra chercher des contre exemples justifiant cette condition.
7. Une fois de plus, la recherche des pièces élémentaires (au nombre de deux ici) permet de comprendre pourquoi chaque anneau doit comprendre un nombre de pièces multiple de quatre.
8. Certaines cellules dans la maison de gauche ont changé deux fois d'état. Que signifie alors l' « unique combinaison » dans l'esprit des élèves ?