

DETECTEURS SONORES

Année 2014/2015

GUIU Albin, HEURTEFEUX Matéo, KITTEL, NAZ Grégoire, SOSYNSKY Lysandre, VENET Haris, élèves de 4ème

Encadrés par CORM Pascal , BRUYERE Elisabeth

Etablissement : Collège Raoul DUFY (Lyon), jumelé avec le collège LONGCHAMBON (Lyon)

Chercheurs : PARREAU Aline, GLEDEL Valentin (LIRIS, Université Lyon 1)

Présentation du sujet :

Le principe de base est assez simple :

C'est un CPE qui veut surveiller son collège à l'aide de détecteurs sonores (aussi appelés capteurs), en sachant que chaque détecteur détecte le bruit dans la salle où il se trouve mais aussi dans les salles d'à côté (qui communiquent par une porte).



Explication sur ce modèle :

Il y a deux détecteurs : A et B (placés dans les salles de gauche et de droite). En bas à droite de chaque salle, c'est la combinaison qui serait marquée sur l'ordinateur du CPE s'il y avait du bruit dans cette salle :

S'il y a du bruit dans la salle du milieu la lettre A et la lettre B vont s'afficher sur l'ordinateur du CPE car les capteurs A et B sont dans des salles adjacentes à la salle du milieu.

Pour la salle de droite, seule la lettre A va s'afficher car le capteur B est trop loin (une salle d'écart) pour pouvoir capter le bruit.

De même pour la salle de gauche, seul le capteur B va détecter le bruit.

Ce modèle est donc complet : le CPE saura où intervenir, peu importe le lieu où réside le bruit car toutes ces combinaisons n'apparaissent qu'une seule fois.

Le but du problème est de trouver le nombre minimal de capteurs pour un nombre de salles défini.

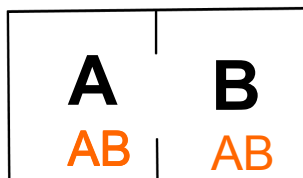
On a travaillé sur différentes formes de collège puis on a finalement calculé le nombre de salles pour un nombre de capteurs défini...

I. Différentes formes de collège

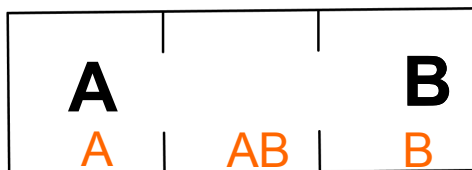
1. Collège en ligne :

Représentation : un carré représente une salle, une lettre noire un capteur et une lettre orange représente quel capteur capte le bruit dans cette salle.

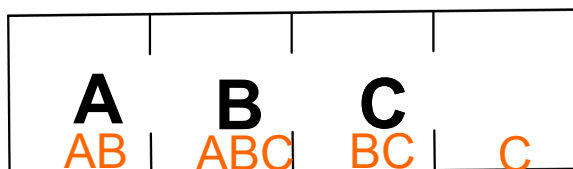
Commençons par tester sur un nombre de salles croissant



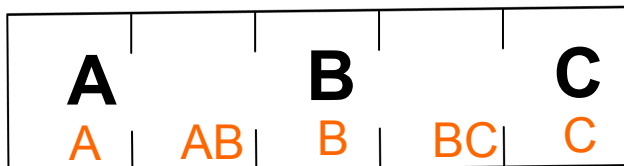
Cela ne marche pas avec deux salles car les combinaisons de lettres sont les mêmes dans les deux salles, nous ne savons donc pas où aller.



Avec trois salles on place un capteur à chaque extrémité.



Avec quatre salles on place un capteur sur deux et un entre les deux



Avec cinq salles on en place un sur deux à partir d'une extrémité.

Nombre de salles	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre de capteurs	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8

On observe que dans ces cas de salles en ligne le nombre de capteurs marche par deux : par exemple, pour 4 et 5 salles, on peut mettre 3 capteurs au minimum; pour 6 et 7 salles, 4... etc ([1](#))

Avec un nombre de salle impair : on en place un sur deux en partant d'une extrémité.

Avec un nombre de salle pair à partir de 4 : on en place un sur deux et un entre les deux derniers.

Est-ce que ces solutions sont les meilleures ?

On le suppose car on n'a pas pu le prouver.

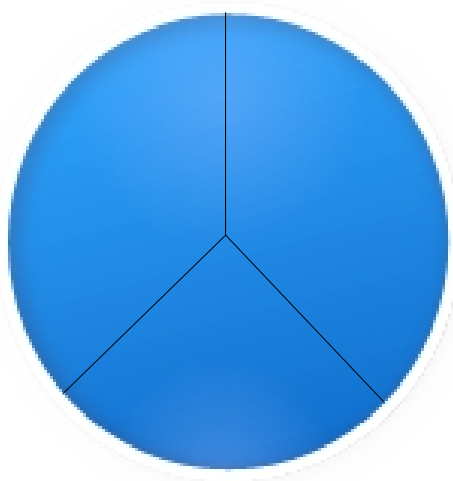
2. Autres formes de collège :

On a aussi tenté de travailler sur ces deux autres formes :



Phare avec salle centrale

Phare sans salle centrale



Mais sans résultat convaincant.

II. Nombre maximal de salles avec un nombre de capteurs fixe (combinaisons de lettres et formules)

Dans cette partie, on décide de prendre le problème dans l'autre sens :

On cherche maintenant à trouver non plus le nombre de capteurs minimal pour un nombre de salles défini mais le nombre de salles maximal avec un nombre de capteurs défini.

Par exemple pour 2 capteurs on ne peut faire que 3 combinaisons différentes (A, B, AB) donc on ne peut pas avoir plus de 3 salles.

1. Combinaison de lettres

Reprenons donc nos combinaisons : une combinaison sert à coder une salle avec un nom unique (A, B, C, AB, AC, BC...).

2. « $X*2+1$ »

C'est la première méthode que nous avons trouvée suite à nos combinaisons de lettres pour calculer le nombre maximal avec un nombre de capteurs fixe.

Pour passer d'un nombre de capteurs au suivant on multiplie par 2 et on ajoute 1

Exemple :

Pour 3 capteurs on peut avoir 7 salles. On peut déterminer le nombre de salles pour 4 capteurs.

X : nombre de salles maximum qu'on peut avoir avec le nombre de capteurs précédent.

Dans notre cas : 7 soit $X*2+1 \rightarrow 7*2+1 = 15$

Pour 4 capteurs, on peut donc avoir 15 salles.

Les combinaisons sont donc : A,B,C,D,AB,AC,AD,BC,BD,CD,ABC,ABD,ACD, BCD,ABCD. (2)

Démonstration sur cet exemple :

$$7 \times 2 + 1 = 7 + 7 + 1$$

7 combinaisons faites à partir de A,B,C

+ Ces 7 combinaisons plus sur chacune la lettre D

+ D seul

=

A, B, C, AB, AC, BC, ABC

AD, BD, CD, ABD, ACD, BCD, ABCD

D

Ce raisonnement peut s'appliquer à n'importe quelle étape.

Le bémol de cette technique c'est qu'il faut connaître la valeur du nombre de salles maximum qu'on peut avoir avec le nombre de capteurs précédent.

3. « $2^n - 1$ »

Avec cette technique on a mieux que le « $X*2+1$ » : on n'a plus le bémol de devoir connaître la valeur du nombre de salles maximum qu'on peut avoir avec le nombre de capteurs précédent.

Reprenons notre exemple :

Pour $n = 3$ capteurs on peut avoir 7 salles, soit $2^n - 1 \rightarrow 2^3 - 1 = 7$

Démonstration

→ Cette relation est vraie dans les 5 premiers cas :

1 capteur : 1 salle : $2^1 - 1 = 1$

2 capteurs : 3 salles : $2^2 - 1 = 3$

3 capteurs : 7 salles : $2^3 - 1 = 7$

4 capteurs : 15 salles : $2^4 - 1 = 15$

5 capteurs : 31 salles : $2^5 - 1 = 31$

→ Notre objectif : prouver que si c'est vrai pour $n = a$, ce sera vrai pour $n = a + 1$

→ On écrit tout en fonction de n :

4 capteurs : $n = 4$

4 capteurs => 15 salles

$$15 = 2^4 - 1 \text{ soit } 2^n - 1$$

5 capteurs => 31 salles

5 capteurs : $n + 1 = 4 + 1$

$$31 = 2^{4+1} - 1 \text{ soit } 2^{n+1} - 1$$

$$\text{et aussi } 31 = 15 \times 2 + 1 \text{ soit } (2^n - 1) \times 2 + 1$$

→ On veut maintenant montrer que si pour un n donné, on a $2^n - 1$
 alors au rang suivant $n+1$ on a $2^{n+1} - 1$. On va pour cela montrer que $(2^n - 1) \times 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

$$\begin{aligned}(2^n - 1) \times 2 + 1 &= 2^n \times 2 - 1 \times 2 + 1 \\ &= 2^n \times 2 - 2 + 1 \\ &= 2^n \times 2 - 1 \\ (2^n - 1) \times 2 + 1 &= 2^{n+1} - 1\end{aligned}$$

C'est donc vrai au rang $n+1$. (3)

C'est là où s'achève la recherche sur nos formules car celle-ci est la plus convaincante.

4. Représentation à l'aide du graphe

Pour parvenir à représenter ces structures on a utilisé un moyen assez simple : le graphe, qui est simplement un autre moyen de modélisation (voir exemples ci-dessous).

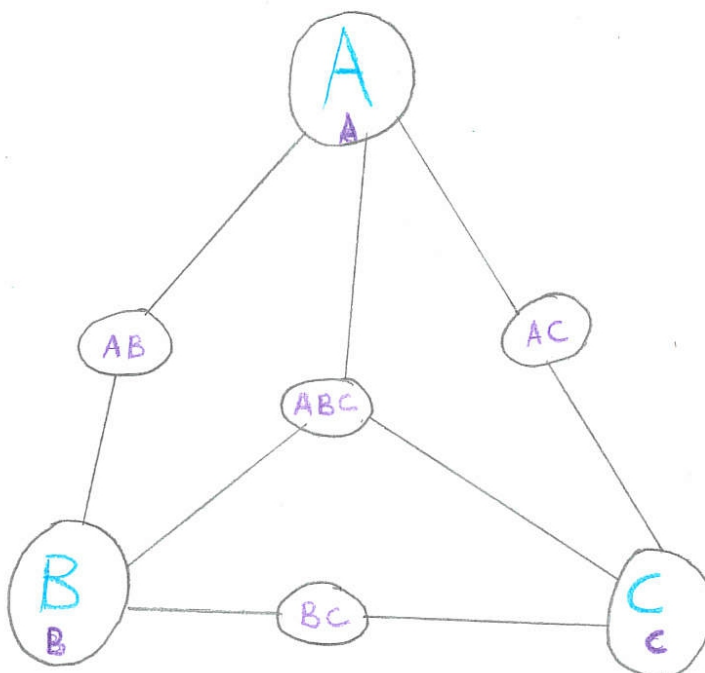
Cela nous à permis d'en représenter 2, notamment un avec 3 capteurs et 7 salles et un autre avec 4 capteurs et 15 salles. (4)

Exemples :

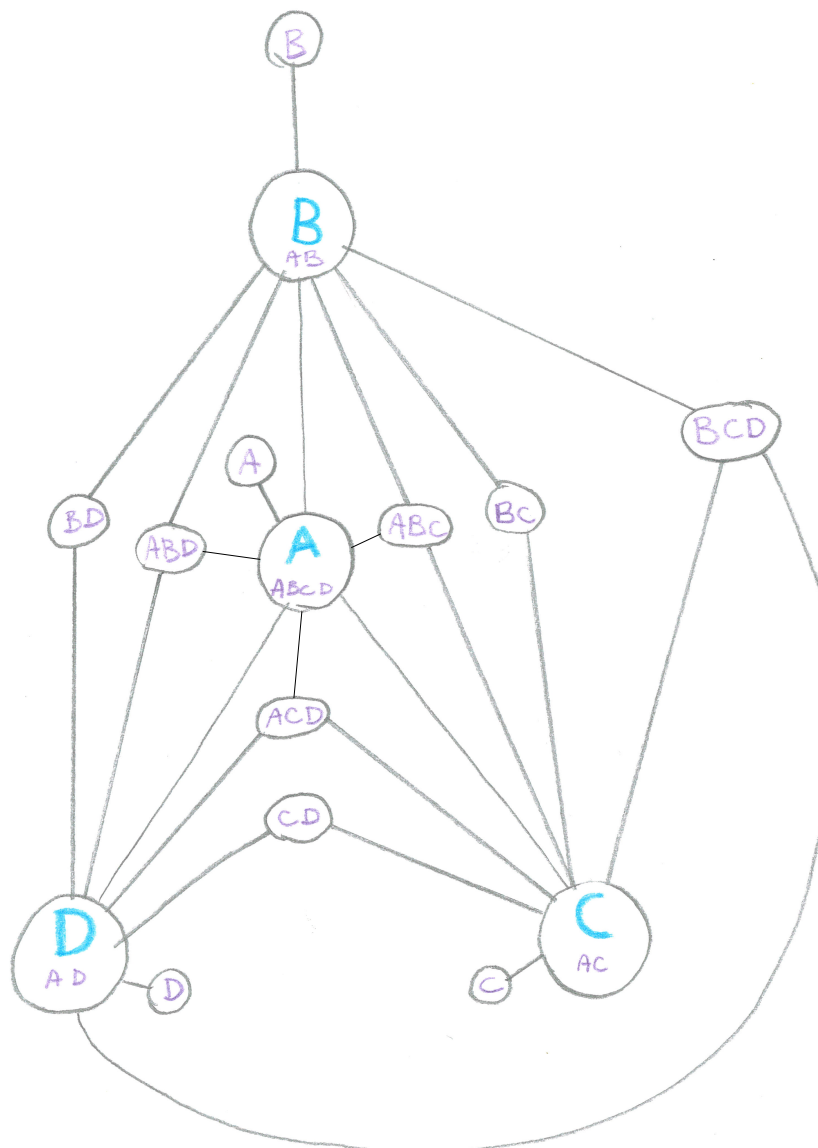
3 capteurs (A, B, C)
 → 7 salles

Ici, les ronds représentent les salles et les traits sont les liens entre ceux-ci.

Les lettres en grand sont les capteurs, et les lettres en petit sont les combinaisons uniques de chaque salle.



4 capteurs (A, B, C, D)
→ 15 salles



Cependant, on ne peut pas affirmer qu'on pourrait représenter un collège avec 5 capteurs ou plus et $2^n - 1$ salles.

Notes d'éditions

- (1) Il aurait été intéressant de donner une formule permettant de trouver le nombre minimum c de capteurs à installer suivant le nombre n de salles du collège. Les élèves ont ici trouvé (sans le démontrer, comme il l'est dit ensuite), que l'on a : si n est pair alors $c=n/2+1$, et si n est impair, $c=(n+1)/2$.
- (2) Il reste à prouver que l'on peut effectivement construire un bâtiment comportant 15 salles, permettant de placer 4 capteurs de telle sorte de faire apparaître ces 15 combinaisons. Cela sera vu en page 5, partie 4 « Représentation à l'aide du graphe ».
- (3) Les élèves ont effectué une *démonstration par récurrence*, un type de raisonnement vu en général en classe de terminale.
- (4) Cela aurait été intéressant de dessiner, à partir de ces graphes, un véritable plan d'un bâtiment de collège, correspondant à ces graphes. Les salles auraient-elles été rectangulaires ?