Les surplombs

2008-2009

Jean Mutillod et Thomas Duez, élèves de seconde

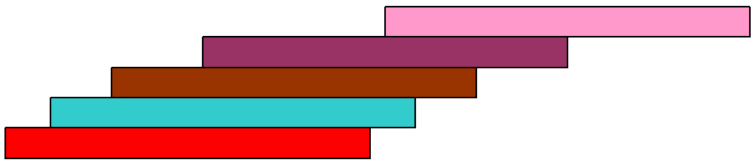
Enseignant : Hubert PROAL

Etablissement : Lycée d'Altitude de Briançon (Hautes-Alpes-05)

Chercheur : Patrick Verovic (Université de Savoie)

Présentation du sujet

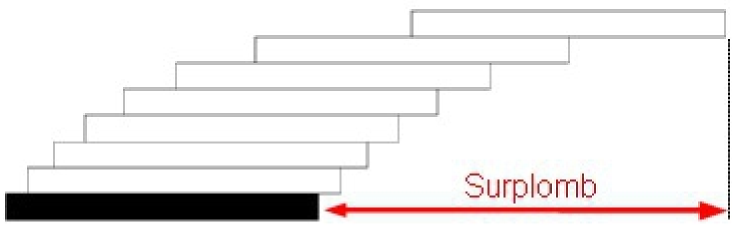
Comment avoir un surplomb maximal avec un nombre de pièces minimal ?
Où est la limite d'un surplomb ?



Résultats obtenus

On peut réaliser un surplombs aussi grand que l'on veut.

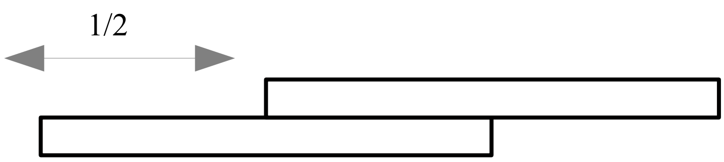
Tout d'abord, on appelle surplomb la partie d'un édifice se trouvant au-dessus du vide.
Les édifices réalisés sont composés d'une pièce de support sur lequel un ensemble de pièces forment un surplomb.
On rappelle que les pièces qui composent les édifices sont les mêmes et ne sont pas collées entre elles.



Expérimentation : modélisation avec des pièces de Kapla(1)

Nous sommes partis sur cette piste : pour qu'un édifice tienne en équilibre, il faut que le poids de l'ensemble des pièces formant le surplomb soit réparti de moitié au-dessus du vide et de moitié sur la pièce de support (si plus, l'édifice s'écroule, si moins, le surplomb ne sera pas maximal).

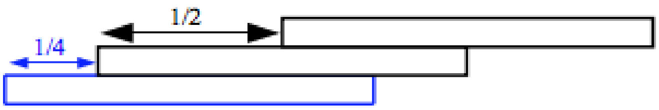
Recherche avec 2 pièces :
Avec 2 pièces de Kapla, pour avoir un surplomb maximal et garder une stabilité, il faut que la deuxième pièce soit posée au niveau de la moitié de la première, c'est-à-dire une demi-pièce de surplomb.



Recherche avec 3 pièces :

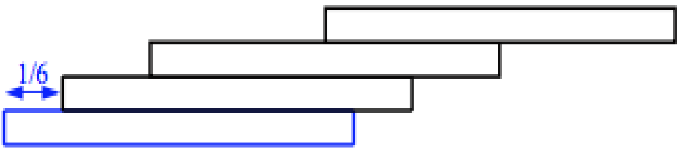
Pour former l'édifice suivant tout en gardant un surplomb maximal, on conserve l'ancien édifice, optimal, que l'on pose sur une pièce de support.

Avec 3 pièces, on pose le précédent édifice (2 pièces) sur une troisième au niveau de son quart.



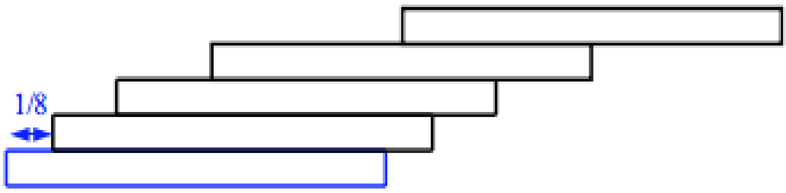
Recherche avec 4 pièces :

Avec 4 pièces, on pose le précédent édifice (3 pièces) sur une quatrième pièce au niveau de son sixième.



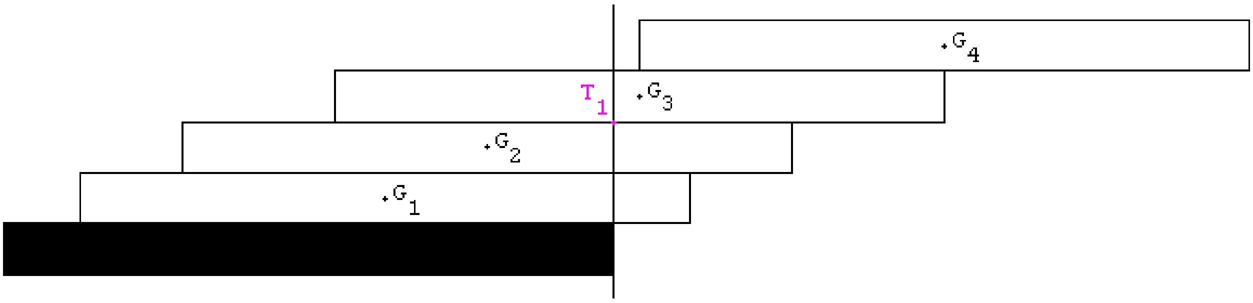
Recherche avec 5 pièces:

Avec 5 pièces, on pose le précédent édifice (4 pièces) sur une cinquième pièce au niveau de son huitième.

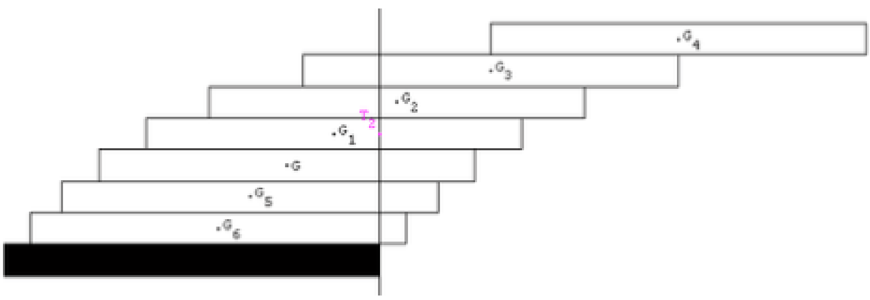


<u>Vérification sur ordinateur</u> :

Avec l'aide d'un logiciel de géométrie, on a pu vérifier que le centre de gravité de l'édifice était à l'aplomb de la pièce le supportant (pièce noire).(2)

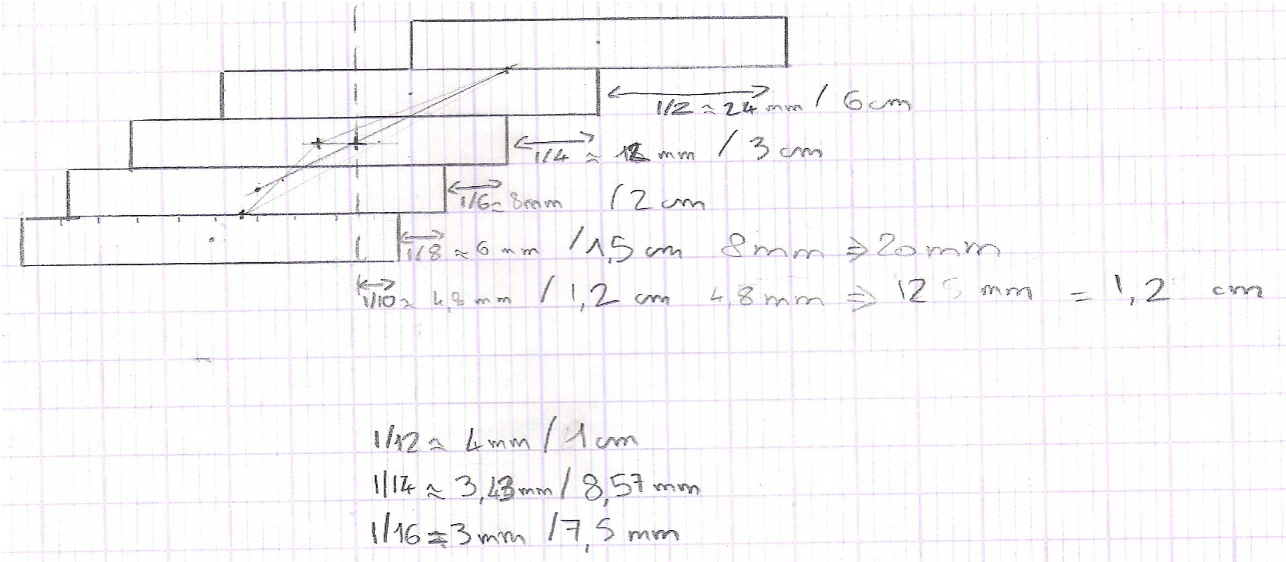


Surplomb à 5 pièces. Le centre de gravité des 4 pièces (T1) est est à l'aplomb de la pièce noire.



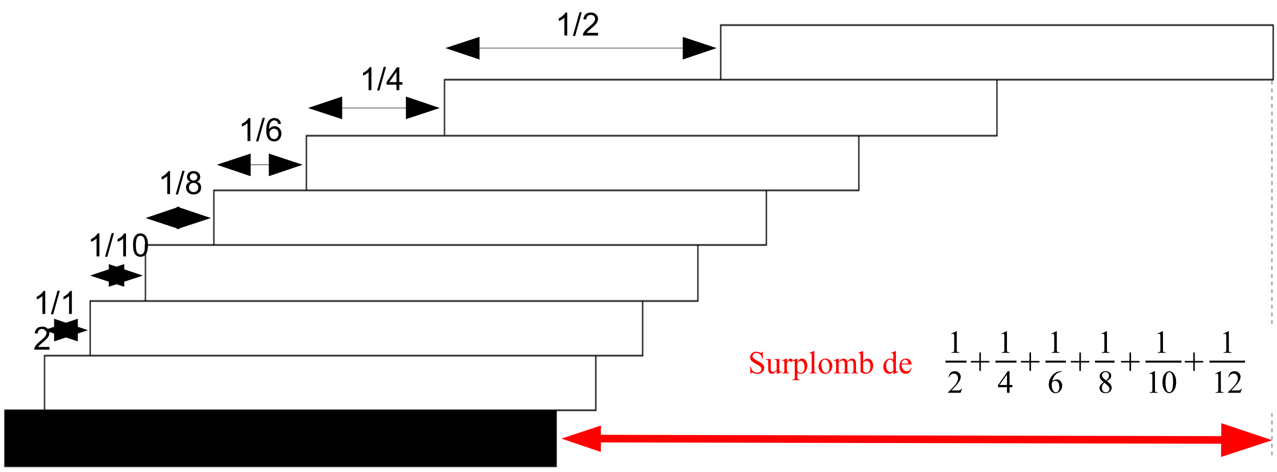
Surplomb à 8 pièces.

Ainsi on a pu déterminer les positions des futures pièces.



<u>Somme des valeurs</u> :

Pour connaître la dimension de notre surplomb en fonction du nombre de pièces, il faut faire la somme des différentes « marches » que nous avons construites.

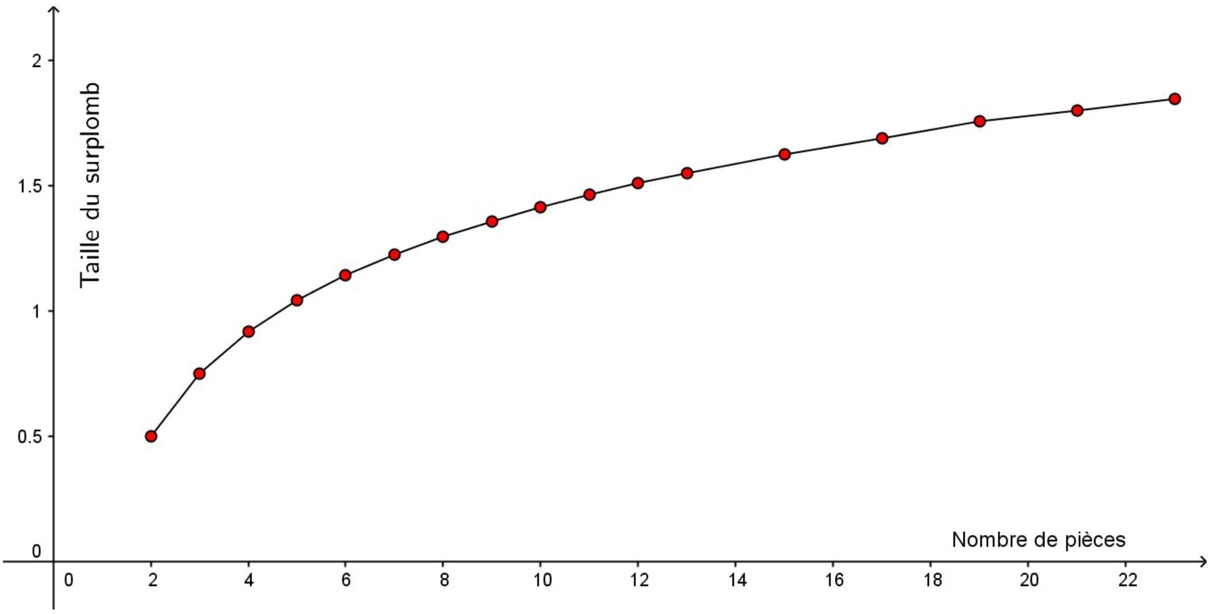


Le problème devient alors de calculer cette somme.

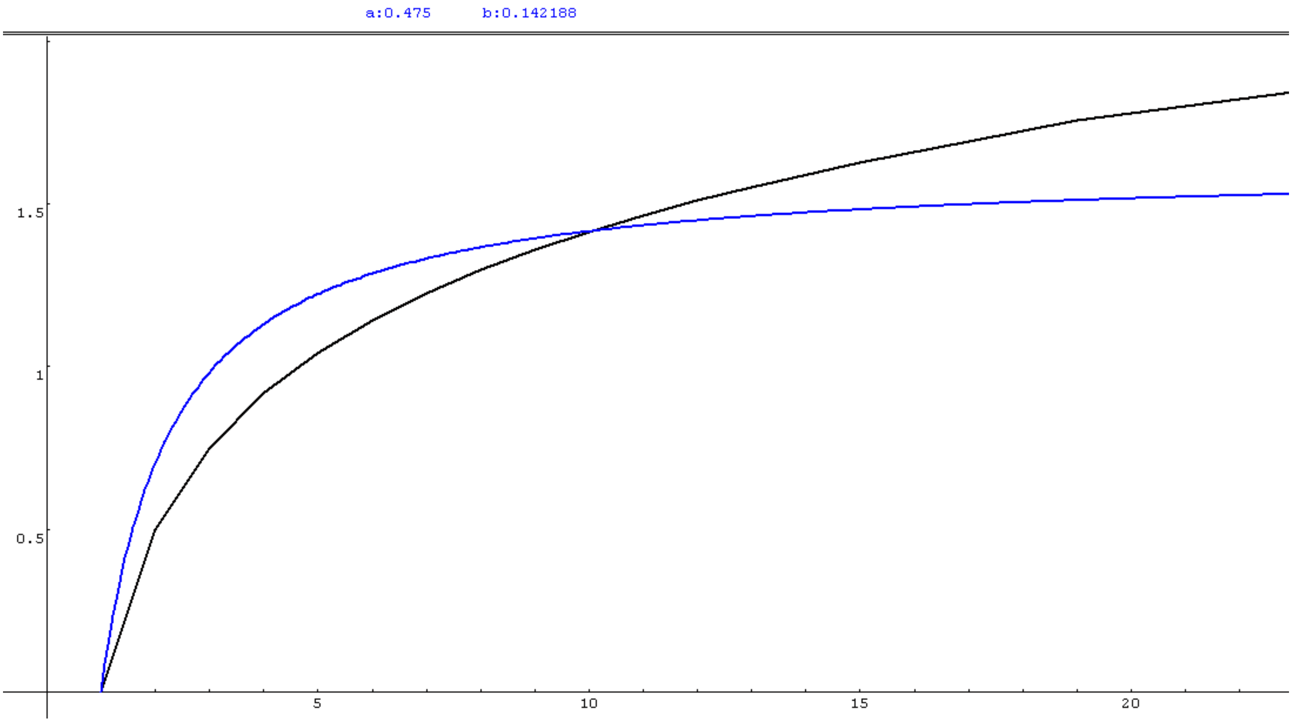
Recherche d'une formule « à la main » puis par approche d'autres fonctions :

Nous avons calculé les différentes sommes pour voir si on observait une régularité.
Au vu de ces résultats nous n'avons pas trouvé de logique dans la progression. On peut penser que le surplomb ne dépasse pas deux.(3)
(4)

Nombre de pièces	Taille du surplomb	Numérateur	Dénominateur
2	0,50000	1	2
3	0,75000	3	4
4	0,91667	11	12
5	1,04167	25	24
6	1,14167	137	120
7	1,22500	147	120
8	1,29643	363	280
9	1,35893	761	560
10	1,41448	7129	5040
11	1,46448	7381	5040
12	1,50994	83711	55440
13	1,55161	86021	55440
15	1,62578	1171733	720720
17	1,69036	2436559	1441440
19	1,75615	14274301	8128160
21	1,79887	55835135	31039008
23	1,84541	133652379	72424352

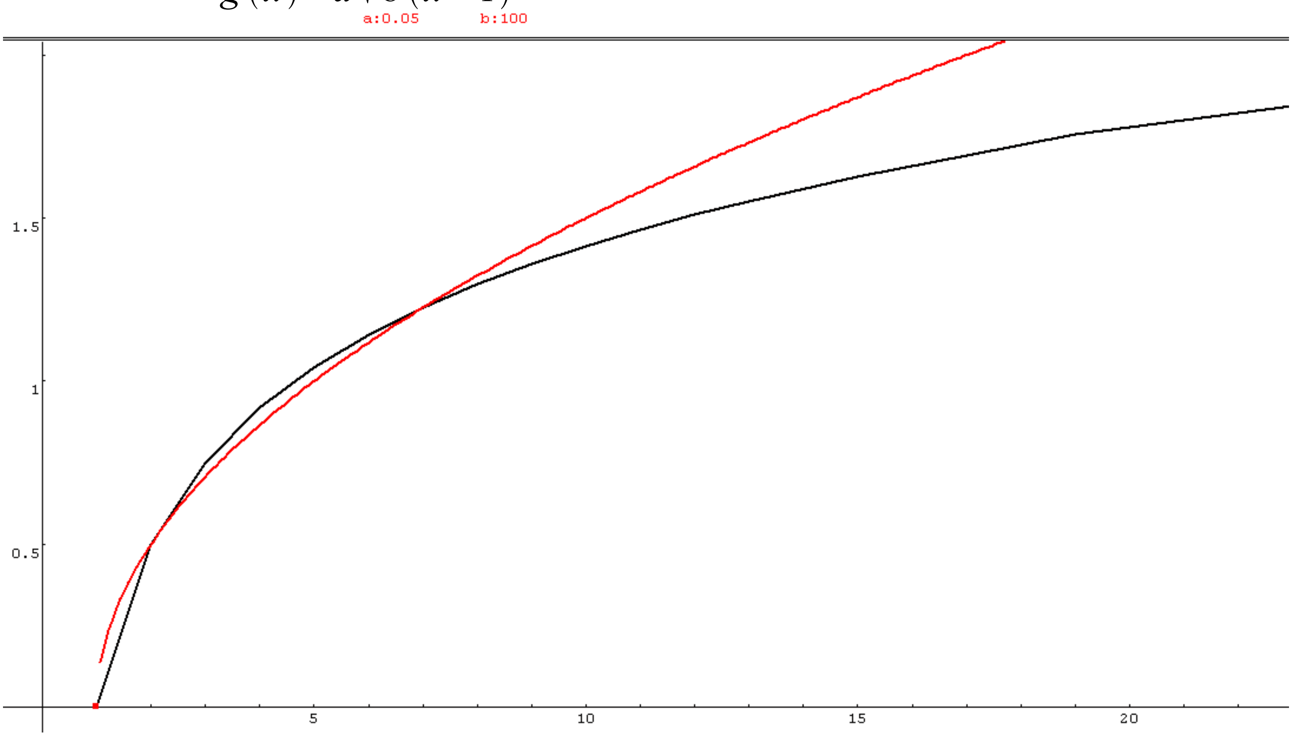


On peut aussi rajouter la valeur 0 pour une pièce. En effet dans ce cas nous n'avons pas de surplomb.
Le graphe de la fonction fait penser à une fonction racine ou une branche d'hyperbole(5). Nous avons essayé de faire coller une fonction du type $f(x)=\frac{1}{ax+b}-\frac{1}{a+b}$



Les résultats ne sont pas satisfaisants.

Puis la fonction $g(x) = a\sqrt{b(x-1)}$



Suite au séminaire avec nos collègues du collège Jean Jaurès de La Ciotat, nous sommes partis sur deux pistes :

1/ Est-ce que le surplomb peut dépasser 2 fois la taille d'une pièce ?
2/ Ne peut-on pas trouver une logique dans la taille des surplombs ?(6)

En refaisant nos calculs, nous obtenons le tableau ci-dessous (fraction non simplifiée). On voit aussi que pour 32 pièces le surplomb dépasse 2.

Nombre de pièces	Taille du surplomb	Numérateur	Dénominateur
2	0,500	1	2
3	0,750	3	4
4	0,917	11	12
5	1,042	50	48
6	1,142	274	240
7	1,225	1764	1440
8	1,296	13068	10080
9	1,359	109584	80640
10	1,414	1026576	725760
11	1,464	10628640	7257600
12	1,510	120543840	79833600
13	1,552	1486442880	958003200
14	1,590	19802759040	12454041600
15	1,626	283465647360	174356582400
16	1,659	4339163001600	2615348736000
17	1,690	70734282393600	41845579776000
18	1,720	1223405590579200	711374856192000
19	1,748	22376988058521600	12804747411456000
20	1,774	431565146817638000	243290200817664000
21	1,799	8752948036761600000	4865804016353280000
22	1,823	186244810780170000000	102181884343419000000
23	1,845	4148476779335460000000	2248001455555220000000
24	1,867	96538966652493100000000	51704033477770000000000
25	1,888	2342787216398720000000000	1240896803466480000000000
26	1,908	59190128811701200000000000	31022420086662000000000000
27	1,927	1554454559147560000000000000	806582922253211000000000000
28	1,946	42373564558110800000000000000	21777738900836700000000000000
29	1,964	1197348677077520000000000000000	609776689223428000000000000000
30	1,981	35027999979859800000000000000000	17683523987479400000000000000000
31	1,997	1059681761389530000000000000000000	530505719624382000000000000000000
32	2,014	33115387462887700000000000000000000	16445677308355800000000000000000000

Nous avons ainsi remarqué une logique au dénominateur et au numérateur.
On passe du dénominateur au rang n+1 en prenant le dénominateur au rang n et en le multipliant par n.

On passe du numérateur au rang n+1 en multipliant le numérateur au rang n par n et en additionnant le dénominateur au rang n lui-même divisé par 2.
Ainsi, on obtient ce tableau :

Nb de pièces	Taille du surplomb	Numérateur	Dénominateur
2	0,5	1	2
3	0,75	3	4
4	0,917	11	12
....	....	....	....
n	$\frac{N_n}{D_n}$	N_n	D_n
n+1	$\frac{N_n}{D_n}+\frac{1}{2n}$	$N_{n+1}=N_n\times n+\frac{D_n}{2}$	

Nous avons aussi remarqué que le dénominateur était toujours pair.
En prolongeant cette formule sur tableur, nous arrivons à 2,85 pour n=171 pièces. Le dénominateur est alors $1{,}47.10^{307}$

Nous avançons la conjecture : **Nous pouvons réaliser le surplomb aussi grand que l'on veut.**

Démonstration :
Suite au congrès national *MATh.en.JEANS*, des chercheurs nous ont proposé des pistes de recherche pour la démonstration.

Première étape : remarquer que si $n<m$ alors $\frac{1}{n}>\frac{1}{m}$

Deuxième étape : regrouper astucieusement les termes de la somme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}_{>1/4}+\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}}_{>1/4}+\underbrace{\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\ldots+\frac{1}{32}}_{>1/4}+\underbrace{\frac{1}{34}+\ldots+\frac{1}{64}}_{>1/4}+\ldots$$

car $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ d'après la remarque de la première étape

de même $\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}>4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{32}>8\times\frac{1}{32}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{34}+\ldots+\frac{1}{64}>16\times\frac{1}{64}=\frac{1}{4}$

Ainsi de suite, nous pouvons avec suffisamment de termes obtenir une somme qui est supérieure à autant de fois que l'on veut 1/4. (7)
Autrement dit nous pouvons réaliser un surplomb aussi grand que l'on veut.

Notes d'édition
(1) Il aurait été intéressant d'expliquer comment sont obtenues les fractions successives mentionnées sur les figures qui suivent (½, ¼, etc.).
(2) Comment ce centre de gravité a-t-il été obtenu ? Que veut dire « on a pu vérifier que ce centre de gravité

est à l'aplomb de la pièce le supportant »?
(3) Il faut comprendre que le surplomb ne dépasse pas deux fois la longueur d'un Kapla.
(4) On regrette que les formules qui ont permis de construire ce tableau ne soient pas données : au lecteur de les retrouver !
(5) Il aurait été intéressant de donner les courbes pour des valeurs différentes des paramètres a et b. Par ailleurs, le choix de deux paramètres (pourquoi pas trois ?) aurait pu être justifié.
(6) La question « géometrico-physique » de la position relative des pièces de Kapla permettant l'obtention d'un surplomb maximal semble évacuée. La « piste » évoquée en page 1 n'est pas entièrement validée.
(7) Le regroupement de termes dans une somme infinie peut donner lieu à quelques curiosités... Considérons la somme infinie 1-1+1-1+1-1+ …
Premier regroupement : 1+(-1+1)+(-1+1)+ ...=1+0+0+...=1
Deuxième regroupement : (1-1)+(1-1)+(1-1)+ ...=0+0+0+...=0
Donc 1=0   :(